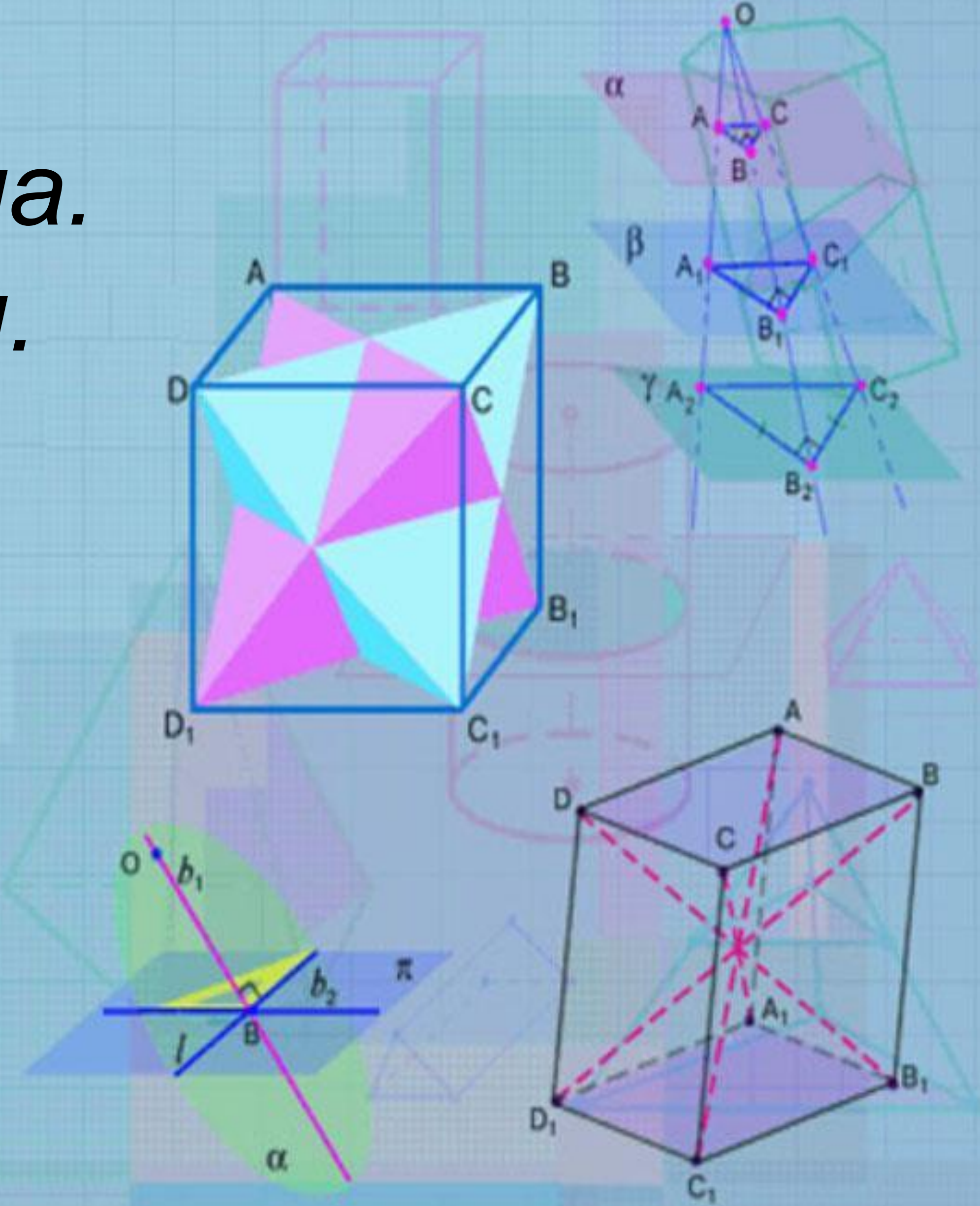
Понятие объема. Объем призмы.



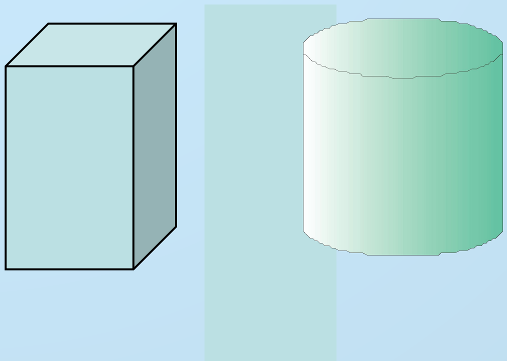
Геометрия, 11 класс

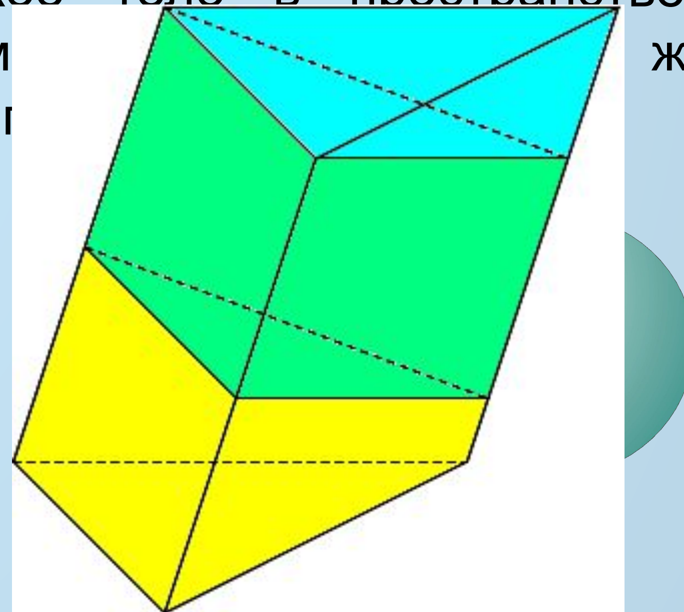
Воробьев Леонид Альбертович, г.Минск

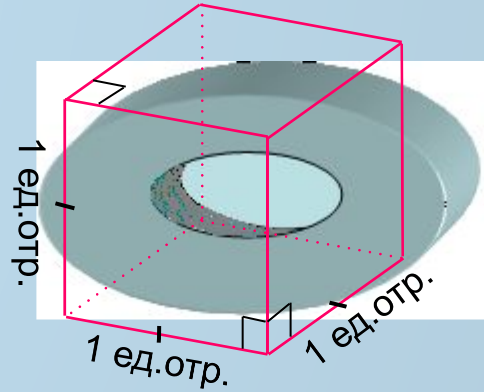
Любое геометрическое тело в пространстве характеризуется

называем … же такое – объем

енной фи





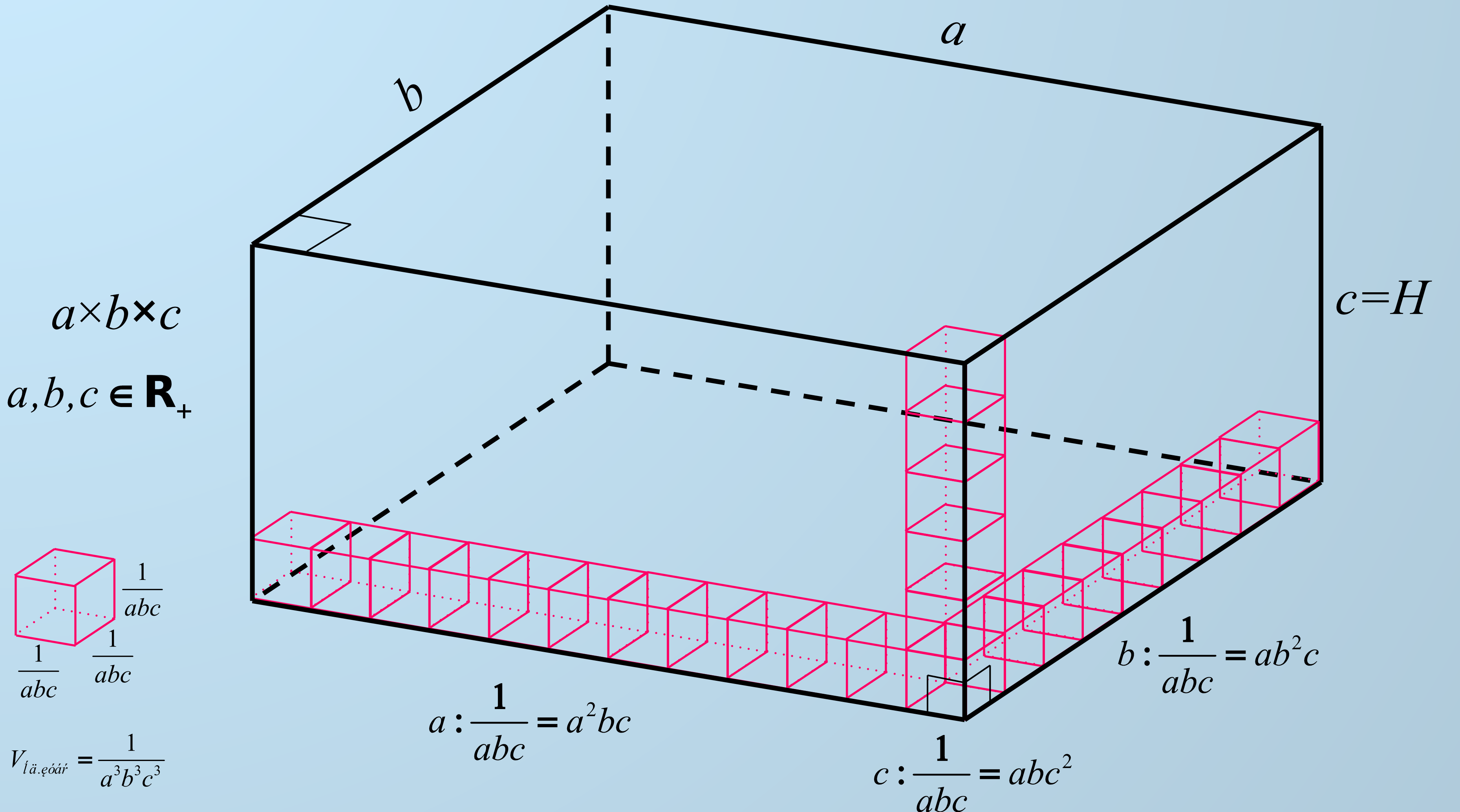


$V_1=V_2$ $V=V_1+V_2+V_3$ V=1 куб.ед.

Под объемом пространственной фигуры понимается положительная величина, обладающая следующими свойствами:

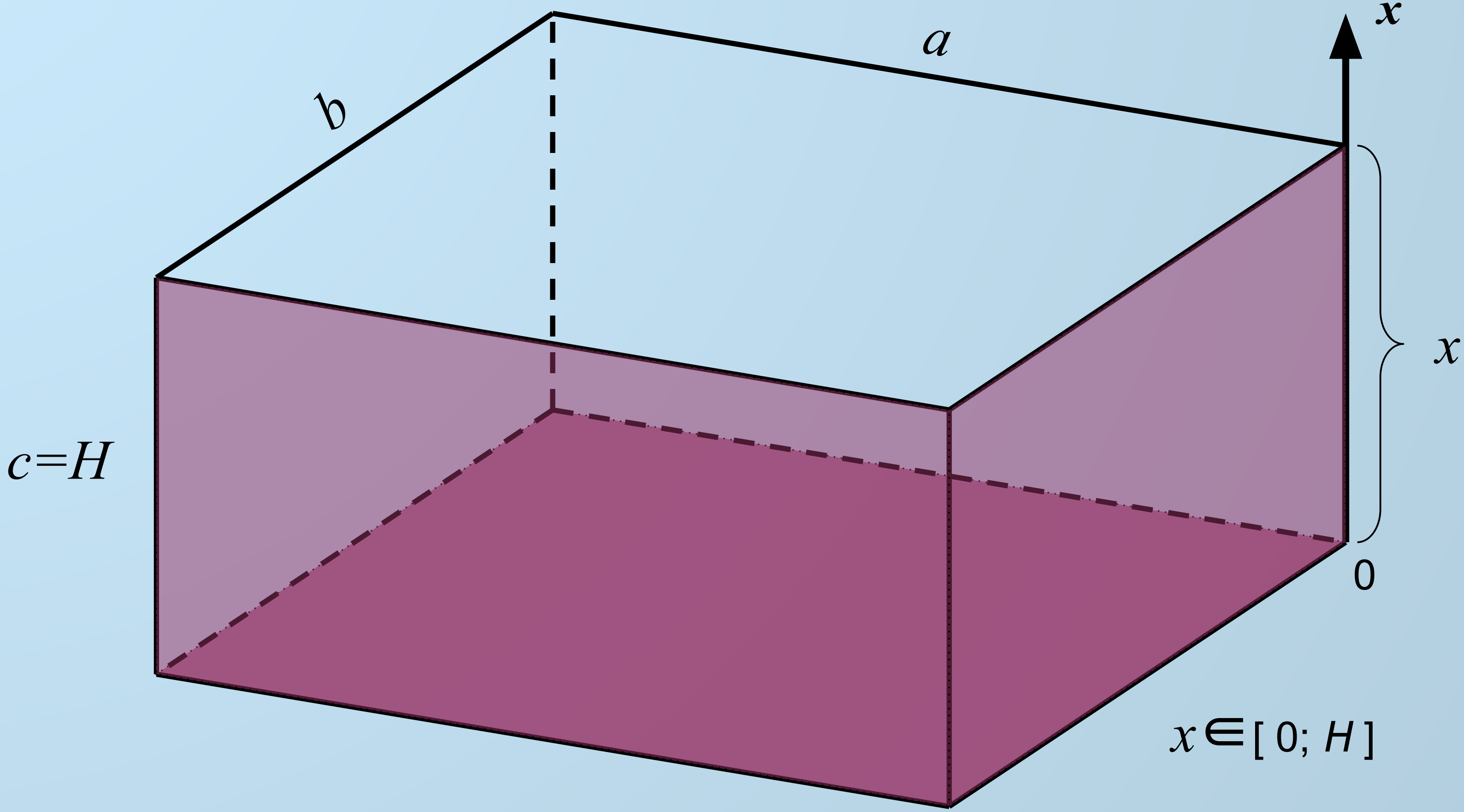
1) равные фигуры имеют равные объемы;
2) объем фигуры равен сумме объемов ее частей;
3) объем куба с ребром единичной длины равен одной кубической единице.

Самым естественным образом определяется объем прямоугольного параллелепипеда, как геометрического тела составленного из определенного количества единичных кубов. А значит, его объем определяется как сумма объемов этих единичных кубов.



$$V = \frac{1}{a^3b^3c^3} \cdot a^2bc \cdot ab^2c \cdot abc^2 = abc = \boxed{S_{\text{осн.}} \cdot H}$$

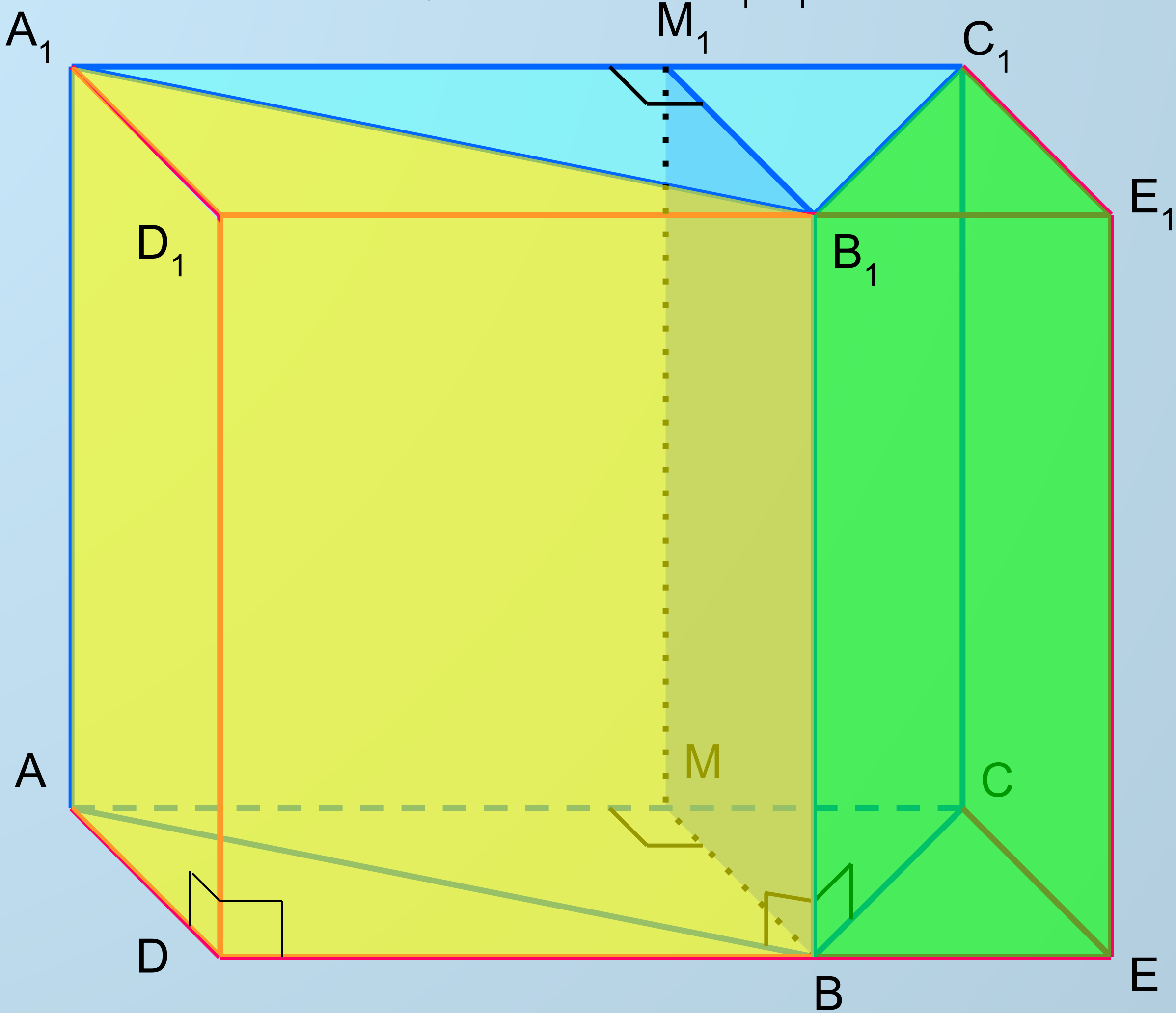
Эту же формулу объема прямоугольного параллелепипеда можно получить пользуясь понятием бесконечной интегральной суммы. Объем прямоугольного параллелепипеда можно понимать как бесконечную сумму площадей основания, взятых вдоль его высоты.



$$V=\int_0^H S_{\text{î ńí .}}\,dx = S_{\text{î ńí .}}\int_0^H dx = S_{\text{î ńí .}}\cdot x\Big|_0^H = \boxed{S_{\text{î ńí .}}\cdot H}$$

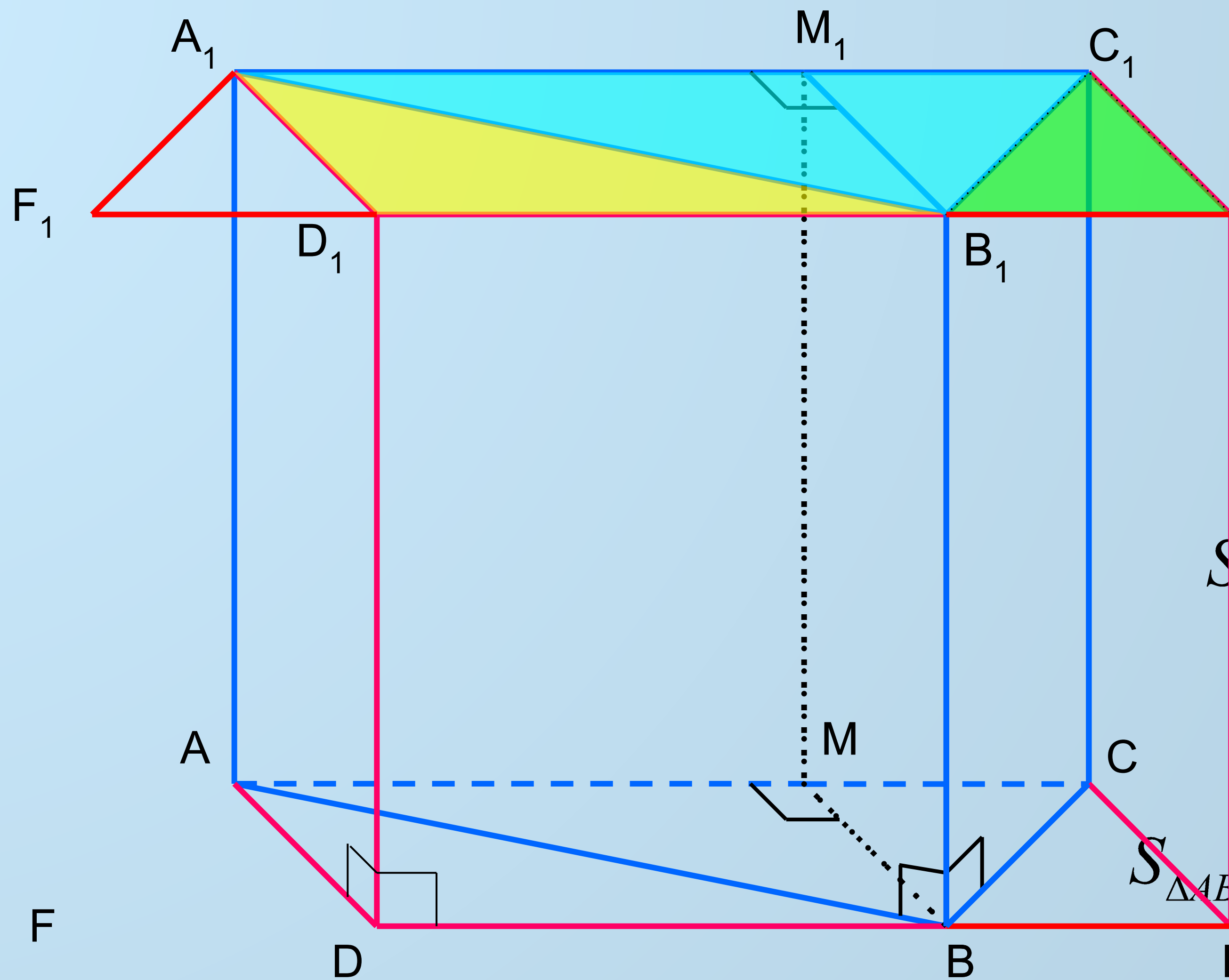
Рассмотрим произвольную треугольную прямую призму $ABCA_1B_1C_1$.

1) Разобьем призму на две прямые треугольные призмы $ABMA_1B_1M_1$ и $BCMB_1C_1M_1$ плоскостью, проходящей через высоту основания B_1M_1 и боковое ребро BB_1.



2) Достроим данную призму до прямоугольного параллелепипеда $ADECA_1D_1C_1E_1$.

3) Получили ещё две прямые треугольные призмы $ADBA_1D_1B_1$ и $BECB_1E_1C_1$.



Объясните самостоятельно:

$$\Delta AFB = \Delta BCA$$

$$\Downarrow$$

H

$$S_{\Delta AFB} = S_{\Delta BCA}$$

$$\Downarrow$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} S_{AFBC}$$

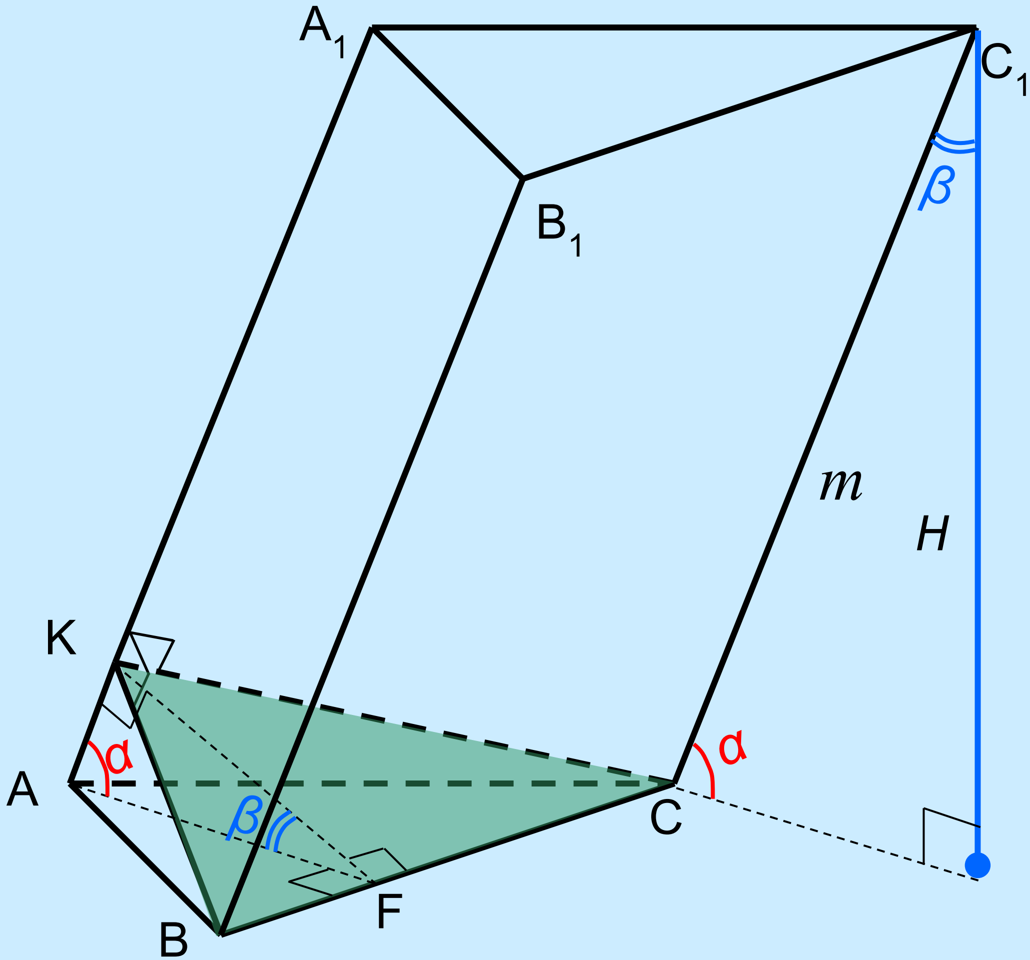
Нетрудно заметить, что объем треугольной призмы в два раза меньше объема прямоугольного параллелепипеда, т.е.

$$V_{ABCA_1B_1C_1} = \frac{1}{2} V_{AFBCA_1F_1B_1C_1} = \frac{1}{2} S_{AFBC} \cdot H = S_{\Delta ABC} \cdot H = \boxed{S \quad \cdot H}$$

Пусть дана наклонная треугольная призма. Построим сечение, перпендикулярное боковому ребру (□BKC).

Примем ∠KAF=α за угол наклона бокового ребра к основанию призмы, а ∠KFA=β – за угол между плоскостями основания и сечения. Очевидно, что $\alpha+\beta=90^0$.

Сечение (KBC) разбивает призму на две пространственные фигуры – треугольную пирамиду KABC и многогранник $KBCA_1B_1C_1$. По свойству объема фигуры объем призмы равен сумме объемов этих частей.



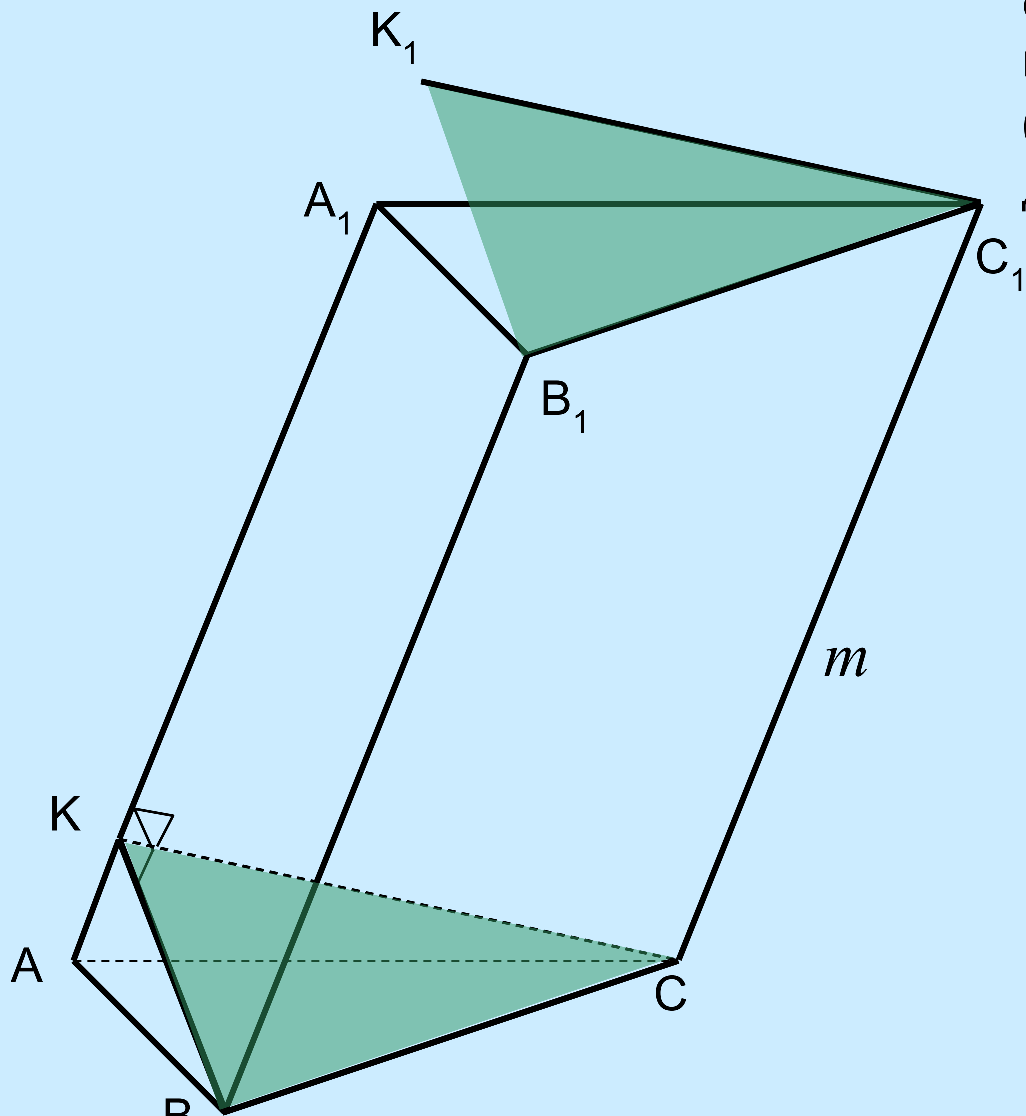
Вспомним, что:

$$\frac{H}{m} = \sin\alpha = \cos\beta$$

$$\frac{S_{\text{ńĺ÷.}}}{S_{\text{îńí.}}} = \cos\beta = \sin\alpha$$

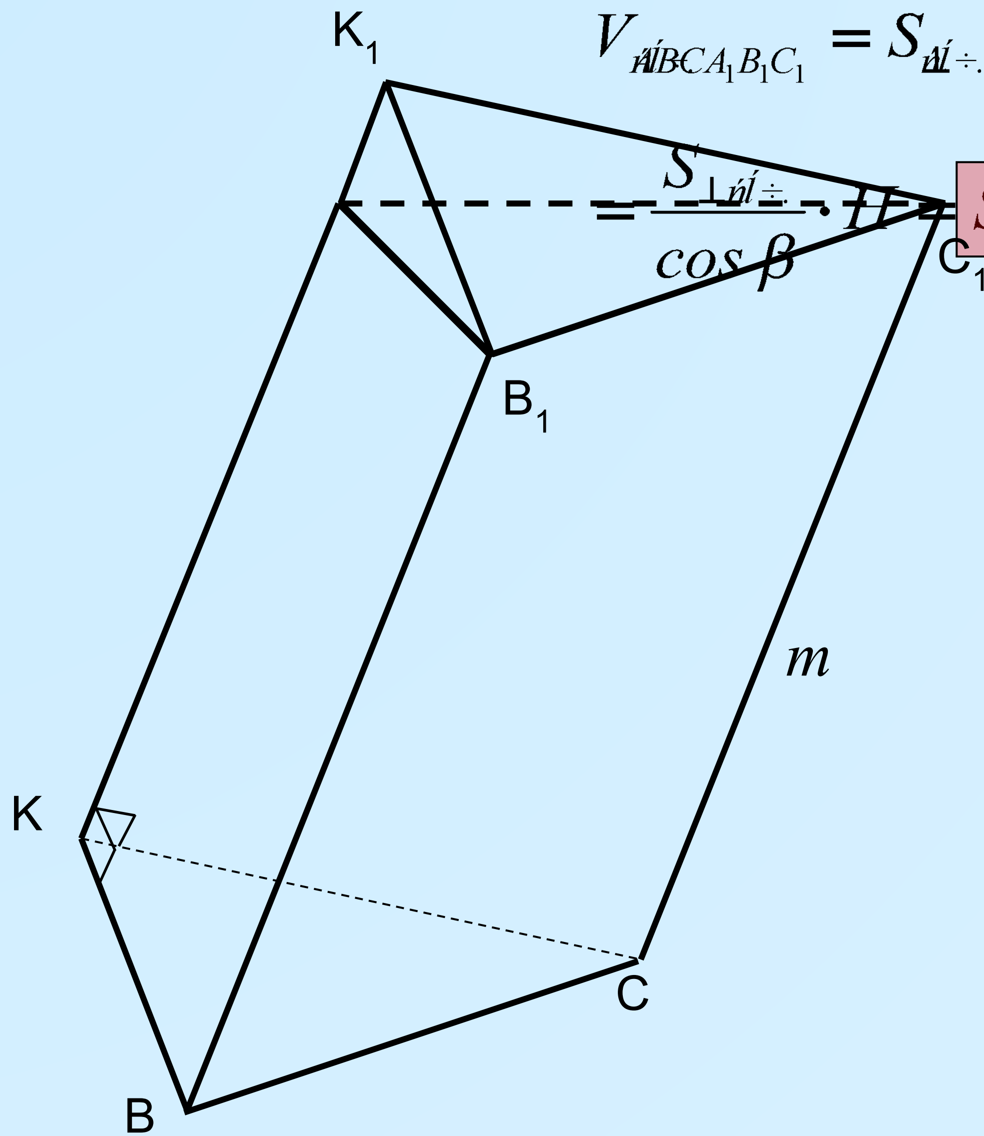
Перемещая соответствующим образом одну из частей можно получить прямую треугольную призму, равную по объему данной наклонной призме.

Тогда: $V_{ABCA_1B_1C_1} = V_{KBCK_1B_1C_1} = S_{\Delta KBC} \cdot m = S_{\perp \text{ńĺ÷.}} \cdot m$, где $S_{\perp\,\text{сеч.}}$ – площадь сечения, перпендикулярного боковому ребру и m – длина бокового ребра.



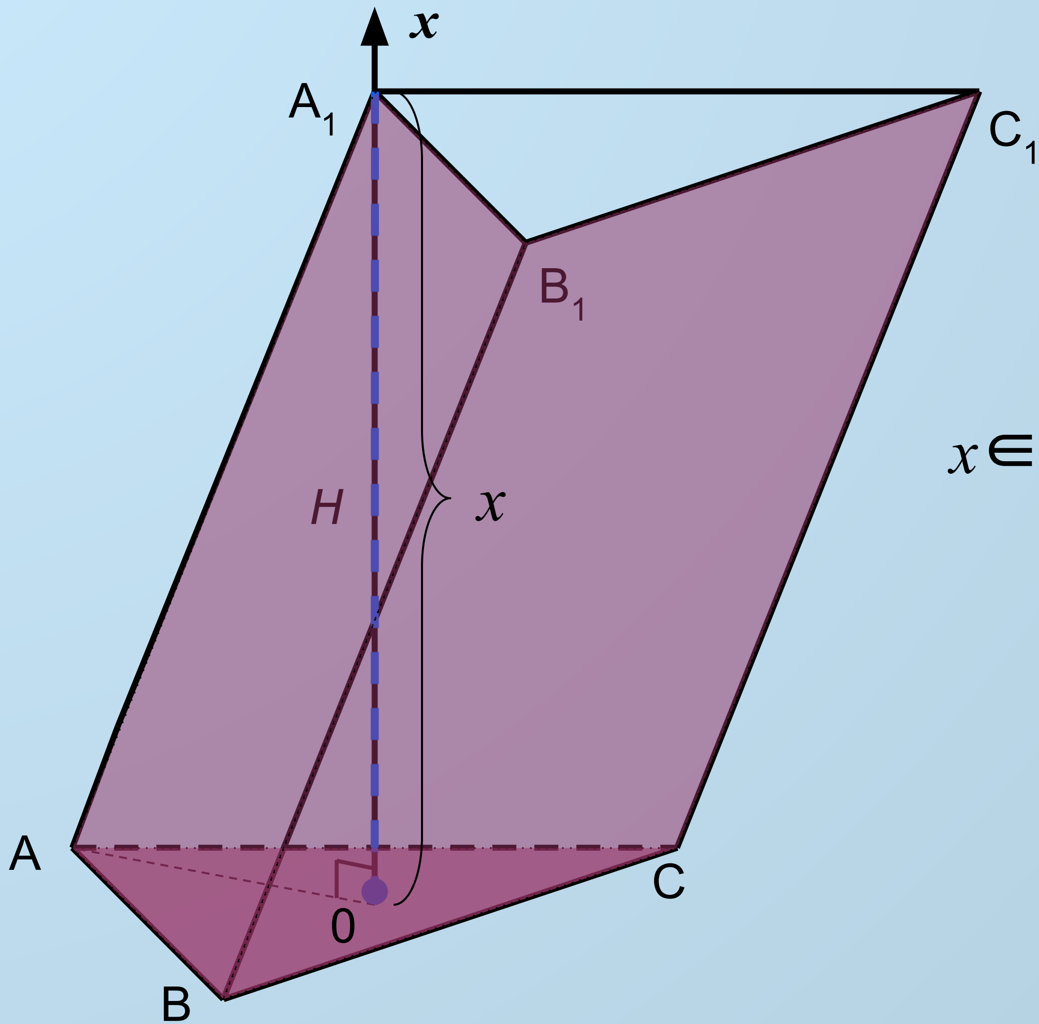
С учетом вспомненных соотношений, получим:

$$V_{\text{ńĺ}ABCA_1B_1C_1} = S_{\text{ŕí÷.}} \cdot m = S_{\perp} \cdot \frac{H}{\sin\alpha} = \frac{S_{\perp\text{ńĺ÷.}}}{\cos\beta} \cdot H = \boxed{S_{\text{î ńí .}} \cdot H}$$

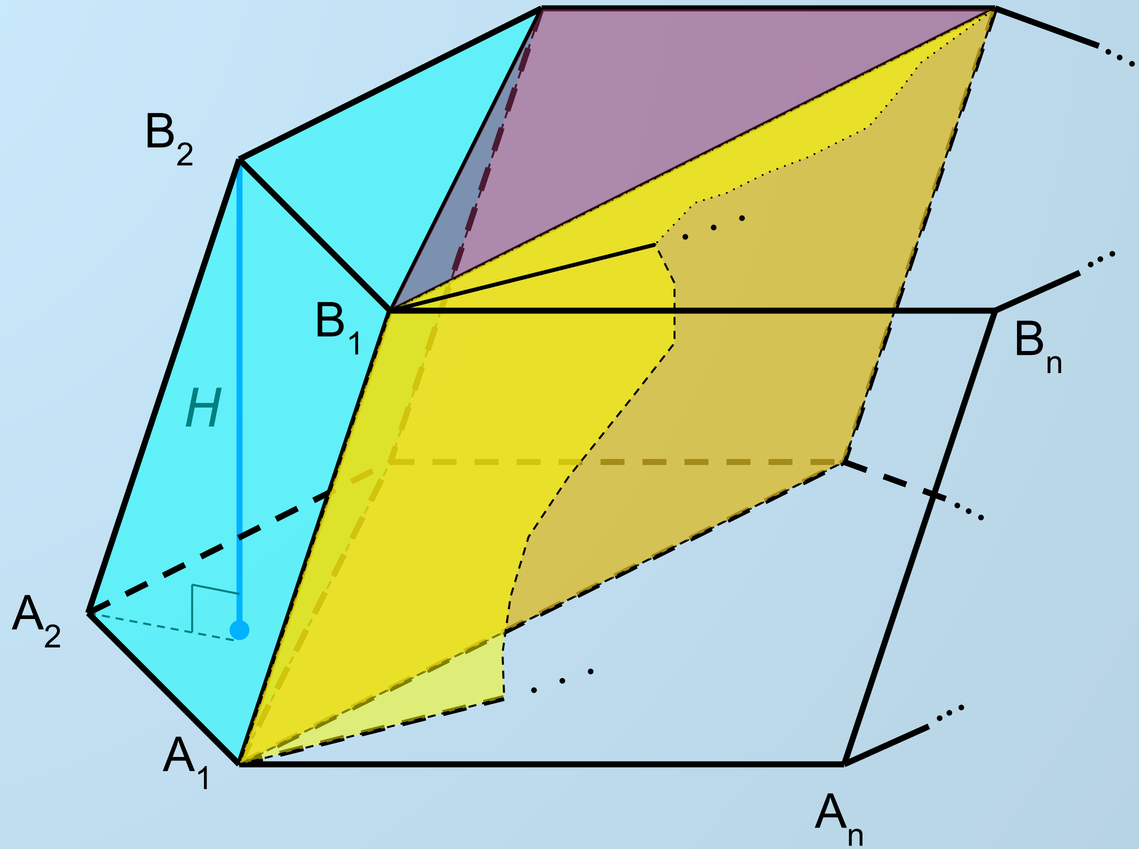


Если применить метод бесконечных интегральных сумм, то получится:

$$V = \int_0^H S_{\text{î ńí .}} dx = S_{\text{î ńí .}} \int_0^H dx = S_{\text{î ńí .}} \cdot x \Big|_0^H = \boxed{S_{\text{î ńí .}} \cdot H}$$



$x \in [\,0;\, H\,]$



Рассмотрим произвольную n-угольную призму $A_1A_2\ldots A_n\ B_1B_2\ldots B_n$. Разобьем её на ($n$–2) треугольные призмы, полученные при проведении диагональных сечений из вершины A_1. По свойству объема:

$$V_{A_1A_{2\ldots}A_nB_1B_{2\ldots}B_n}=S_{\Delta A_1A_2A_3}\cdot H+S_{\Delta A_1A_3A_4}\cdot H+\ldots+S_{\Delta A_1A_{n-1}A_n}\cdot H=$$

$$=H\cdot\left(S_{\Delta A_1A_2A_3}+S_{\Delta A_1A_3A_4}+\ldots+S_{\Delta A_1A_{n-1}A_n}\right)=\boxed{S\quad\cdot H}$$

Итак, для любой *n*-угольной призмы:

$$V = S_{\text{î ńí .}} \cdot H$$

или

$$V = S_{\perp \text{ńĺ÷.}} \cdot m$$

,где $S_{\text{осн.}}$ – площадь основания призмы, $S_{\perp\,\text{сеч.}}$ – площадь перпендикулярного сечения, *H* – высота призмы, *m* – длина бокового ребра призмы.