Глава 3.
Обходы графов

Существует ряд задач на графах, в которых требуется найти маршрут, который содержит все вершины или ребра графа – ***обход.***

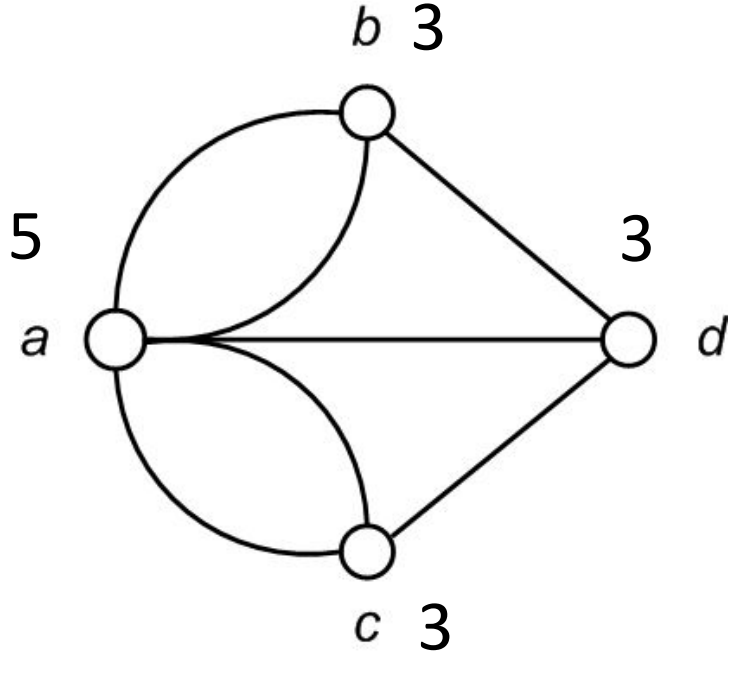
Часто требуется, чтобы длина этого маршрута была минимальной (для взвешенных графов), или ограничивается число проходов по одному и тому же элементу графа.

3.1. Эйлеровы цепи и циклы

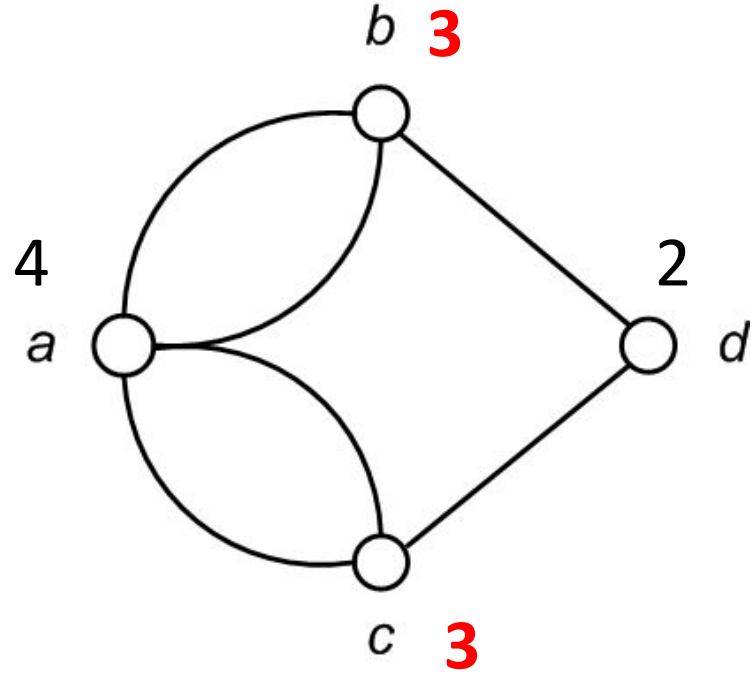
Постановка задачи

Определение. ***Эйлеровой*** **цепью (циклом)** называется цепь (цикл), содержащая (содержащий) все ребра графа. Если в графе существует эйлерова цепь (цикл), то граф называется ***эйлеровым***.

Эйлеров граф можно нарисовать одним росчерком пера.



Кенигсбергские мосты



Теорема Эйлера (1736 г.)

Теорема. Эйлерова цепь (цикл) существует тогда и только тогда, когда число вершин с нечетной валентностью равно 2 (0).

Доказательство.

1. Необходимость.

Пусть эйлерова цепь существует и проходит из вершины *x* в вершину *y*. Если эта цепь – цикл $(x = y)$, то в каждую вершину цепь должна зайти столько же раз, сколько и выйти (т.е. валентности всех вершин – четные). Если $x \neq y$, то из x цепь должна выйти на один раз больше, чем зайти; в y цепь должна зайти на один раз больше, чем выйти (т.е. валентности вершин x и y должны быть нечетными).

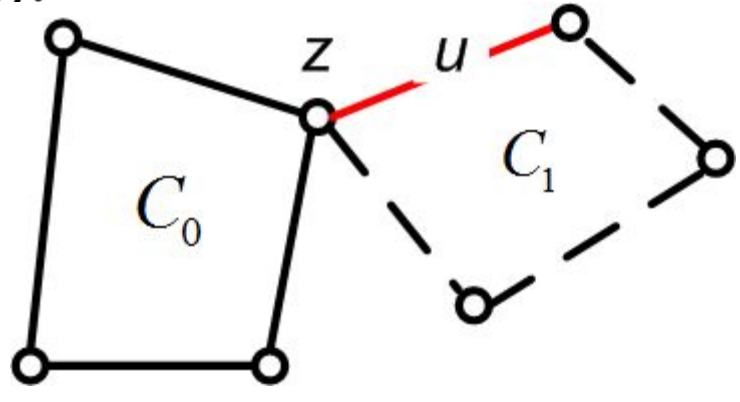
2. Достаточность (конструктивное доказательство).

Пусть валентности всех вершин, за исключением может быть вершин x и y, четные. Докажем существование эйлерова цикла, построив его.

Если все валентности четные: начнем цепь из некоторой произвольной вершины x и пойдем по некоторому еще не пройденному ребру к следующей вершине и так до тех пор, пока не вернемся в вершину x и не замкнем цикл. Если пройдены все ребра, то искомый эйлеров цикл C_0 построен.

Достаточность (продолжение).

Если в C_0 входят не все ребра графа, то цикл C_0 должен проходить через некоторую вершину z, инцидентную некоторому ребру u, не вошедшему в C_0 (т.к. граф связен).



Если удалить все ребра цикла C_0, то в оставшемся суграфе вершины будут по-прежнему иметь четные валентности. Начиная теперь с вершины z построим цикл C_1, начинающийся и кончающийся в z.

Достаточность (продолжение).

Если в C_1 пройдены все оставшиеся ребра, то процесс закончен. Нужный нам эйлеров цикл будет образован частью цикла C_0 до z, затем циклом C_1 и, наконец, частью цикла C_0 от z.

Если циклы C_1 и C_1 содержат не все ребра графа, то строится следующий цикл, и так далее, до тех пор, пока не будет найден эйлеров цикл.

Достаточность (окончание).

Если вершины x и y имеют нечетные валентности, то сначала находим цепь, соединяющую x и y; удалив ребра этой цепи, построим эйлеров цикл, начиная с вершины x. Эйлерова цепь выходит теперь из вершины x, проходит эйлеров цикл, а затем снова из вершины x по найденной цепи в вершину y.

На этом доказательстве основан алгоритм нахождения эйлеровой цепи.

Алгоритм

Шаг 1. Находим простую цепь, соединяющую вершины с нечетной валентностью (если они есть) x и y.
Если $x \neq y$, то все ребра этой цепи пометим меткой $L = 0$.

Шаг 2. Разметка циклов. Пусть наибольшая из меток ребер равна L. Среди непомеченных ребер выбираем такое u, которое смежно хотя бы с одним помеченным. Из непомеченных ребер построим простой цикл, содержащий ребро u (например, с помощью алгоритма нахождения цепей) и все ребра этого цикла пометим меткой $L + 1$.

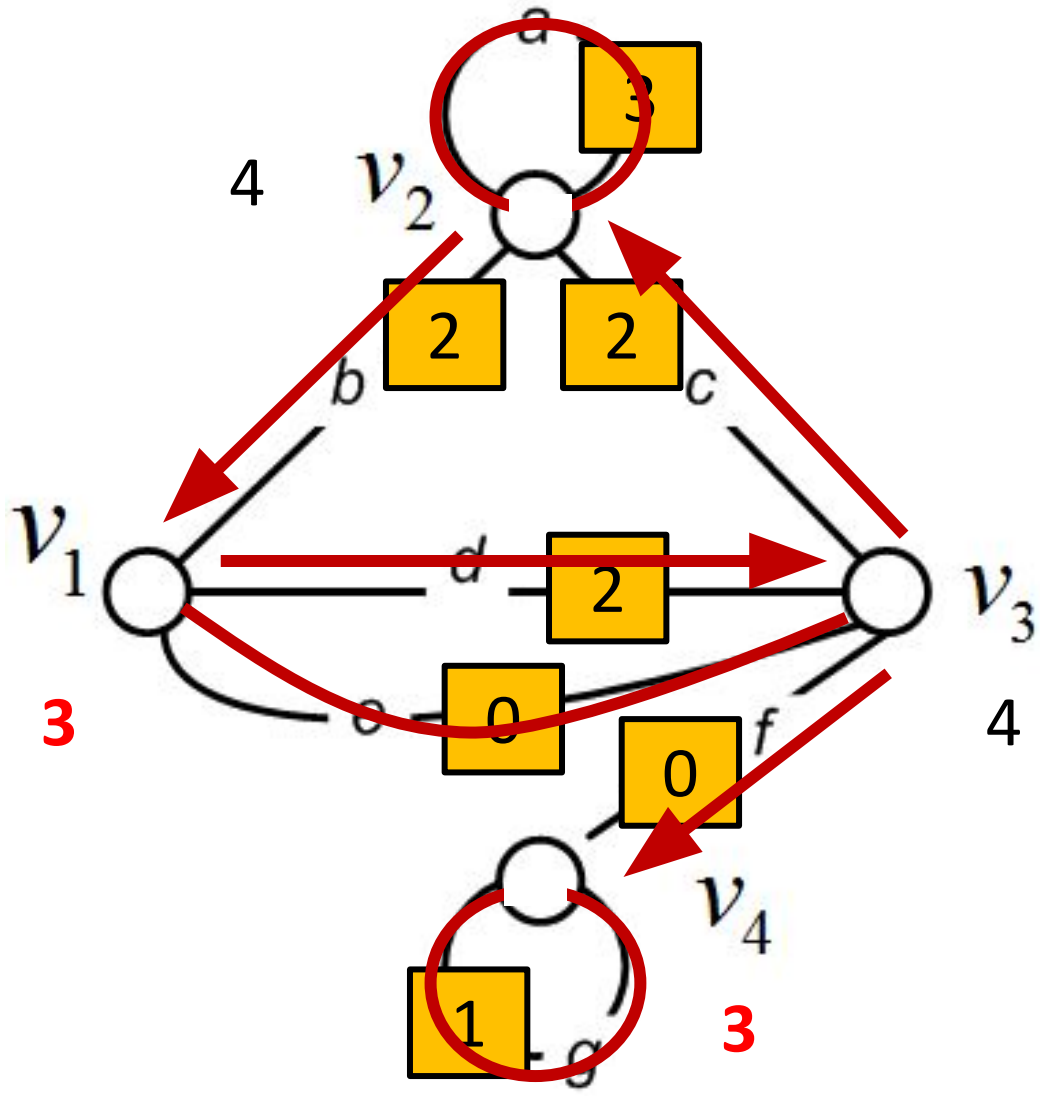
Разметка продолжается до тех пор, пока не будут помечены все ребра графа.

Шаг 3. Маршрут строится следующим образом: за начальную вершину выбираем $x_0 = x$. Если уже построен маршрут $x_0 u_1 x_1 \dots x_{k-1} u_k x_k, \ (k \geq 0)$, котором все ребра различны, то

1) в случае $k = m$ (число ребер графа) процесс закончен (маршрут найден);

2) если $k < m$, то среди ребер, инцидентных x_k и отличных от $u_1 \dots u_k$ выбираем такое, которое **помечено наибольшей меткой** (или любое из них) и добавляем его к маршруту как ребро u_{k+1}, а за x_{k+1} берем ту вершину, с которой u_{k+1} соединяет вершину x_k (возможно $x_{k+1} = x$).

Пример



$v_1\ d\ v_3\ c\ v_2\ a\ v_2\ b\ v_1\ e\ v_3\ f\ v_4\ g\ v_4$

Задача китайского почтальона

В графе с неотрицательными весами ребер найти циклический маршрут наименьшей длины, проходящий через каждое ребро графа по крайней мере один раз.

Почтальон называется китайским потому, что первоначально эту задачу изучал китайский математик Мэй-Ку Куан в 1962 году.

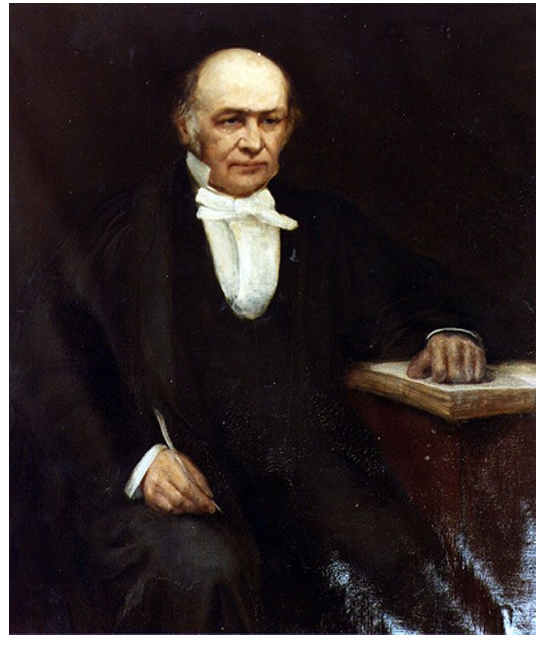
Очевидно, если граф эйлеров, то эйлеров цикл и будет оптимальным.

Если граф не эйлеров, то задача становится весьма трудоемкой. Для ее решения имеются специальные алгоритмы, сокращающие число перебираемых вариантов.

3.1. Гамильтоновы цепи и циклы

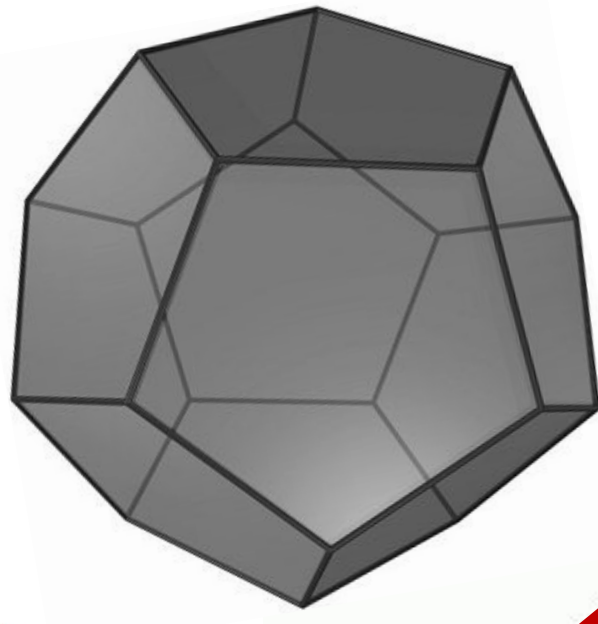
Постановка задачи

Определение. ***Гамильтоновой цепью (циклом)*** графа называется простая цепь (простой цикл), содержащая (содержащий) все вершины графа.

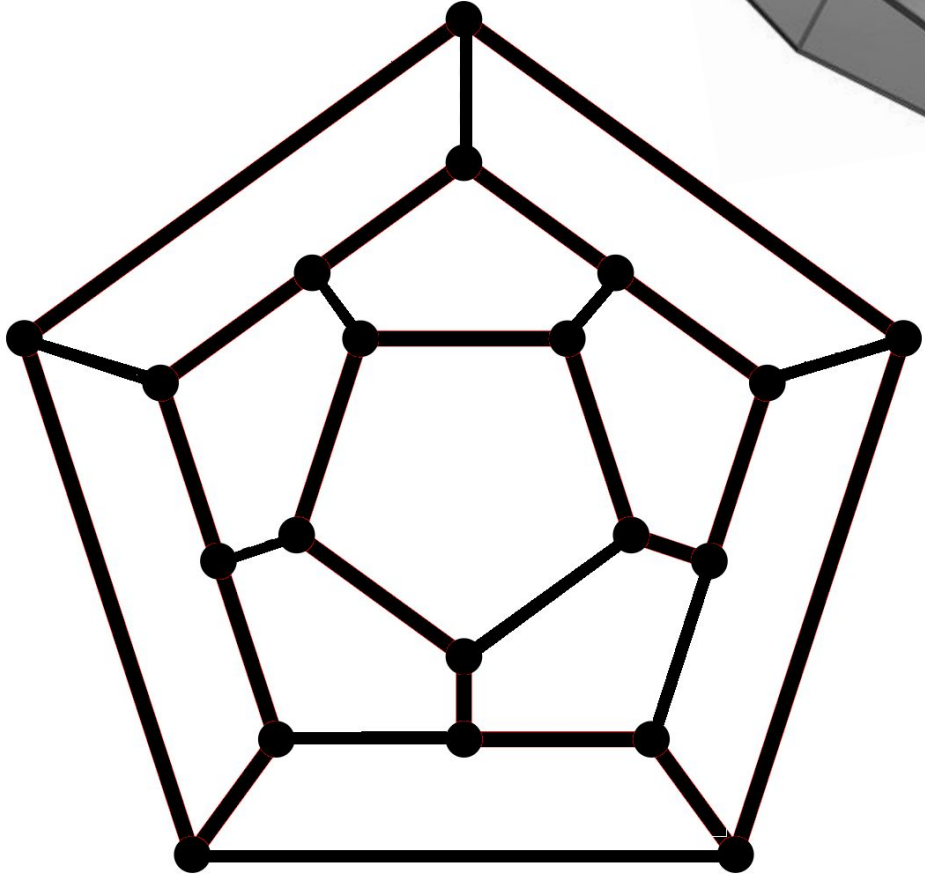


Сэр **Уильям Роуэн Гамильтон** (1805-1865) – самый известный ирландский математик, один из лучших математиков 19 века. Известен фундаментальными открытиями в математике , механике , физике (векторный анализ, вариационное исчисление, общий прин-цип наименьшего действия в механике, теория распространения света и др.)

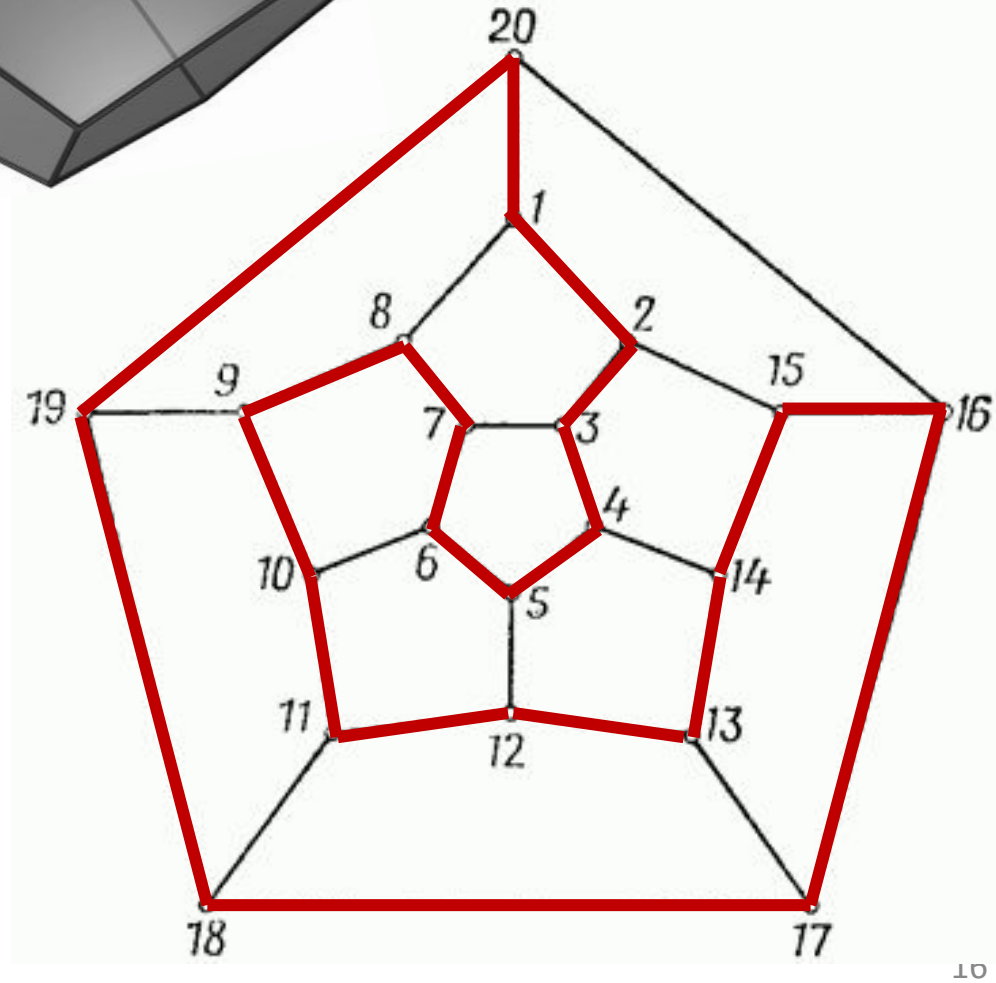
В 1859 г. Гамильтон изобрел головоломку обхода вершин додекаэдра



Додекаэдр:
12 граней,
20 вершин,
30 ребер



Граф Гамильтона



Гамильтонов цикл

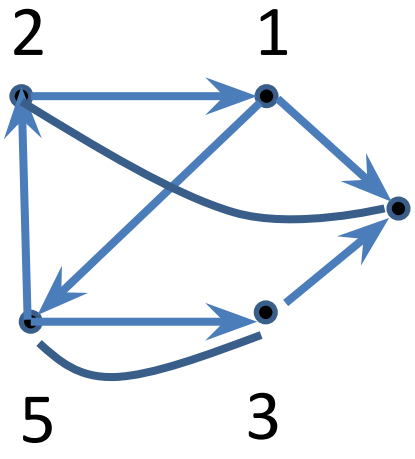
Понятия гамильтоновой цепи и цикла естественным образом обобщаются на случай ориентированных графов: двигаться в очередную вершину можно только по направлениям, указанным стрелками.

Пока неизвестен какой-либо достаточно простой критерий необходимости и достаточности существования гамильтоновой цепи (цикла) для произвольного графа G.

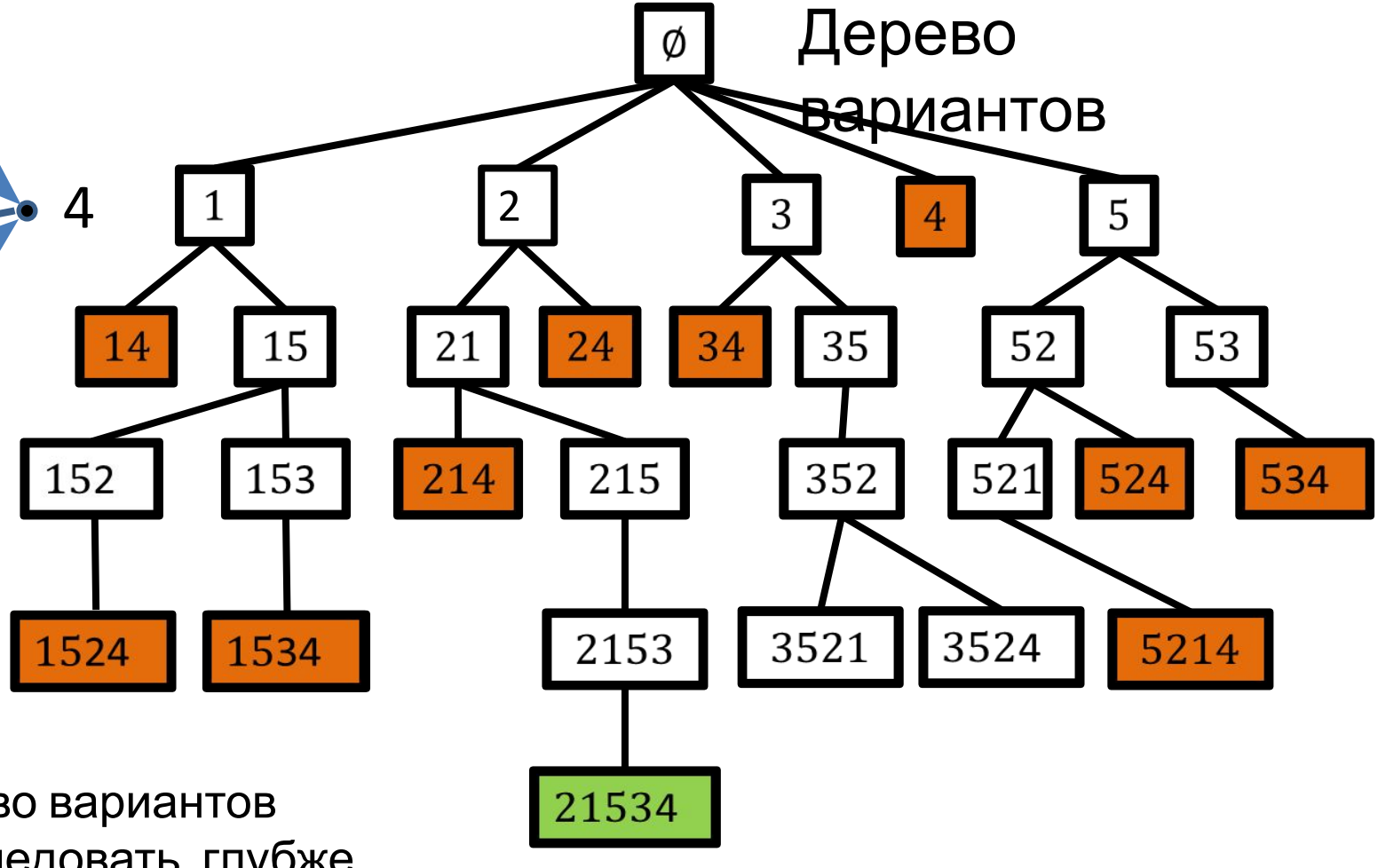
Неизвестен также алгоритм нахождения гамильтоновой цепи (цикла) полиномиальной сложности.

Мы рассмотрим два простейших переборных алгоритма поиска гамильтоновой цепи (цикла), пригодных для графов малой размерности: поиск в ширину и поиск в глубину.

Поиск в ширину



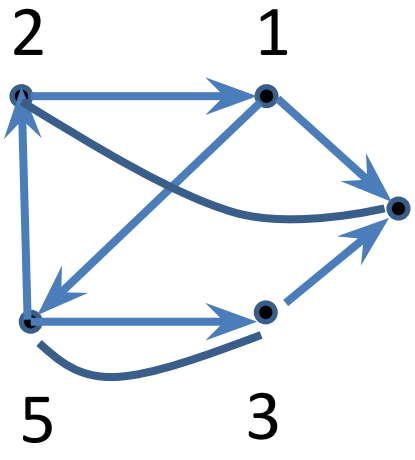
Дерево вариантов

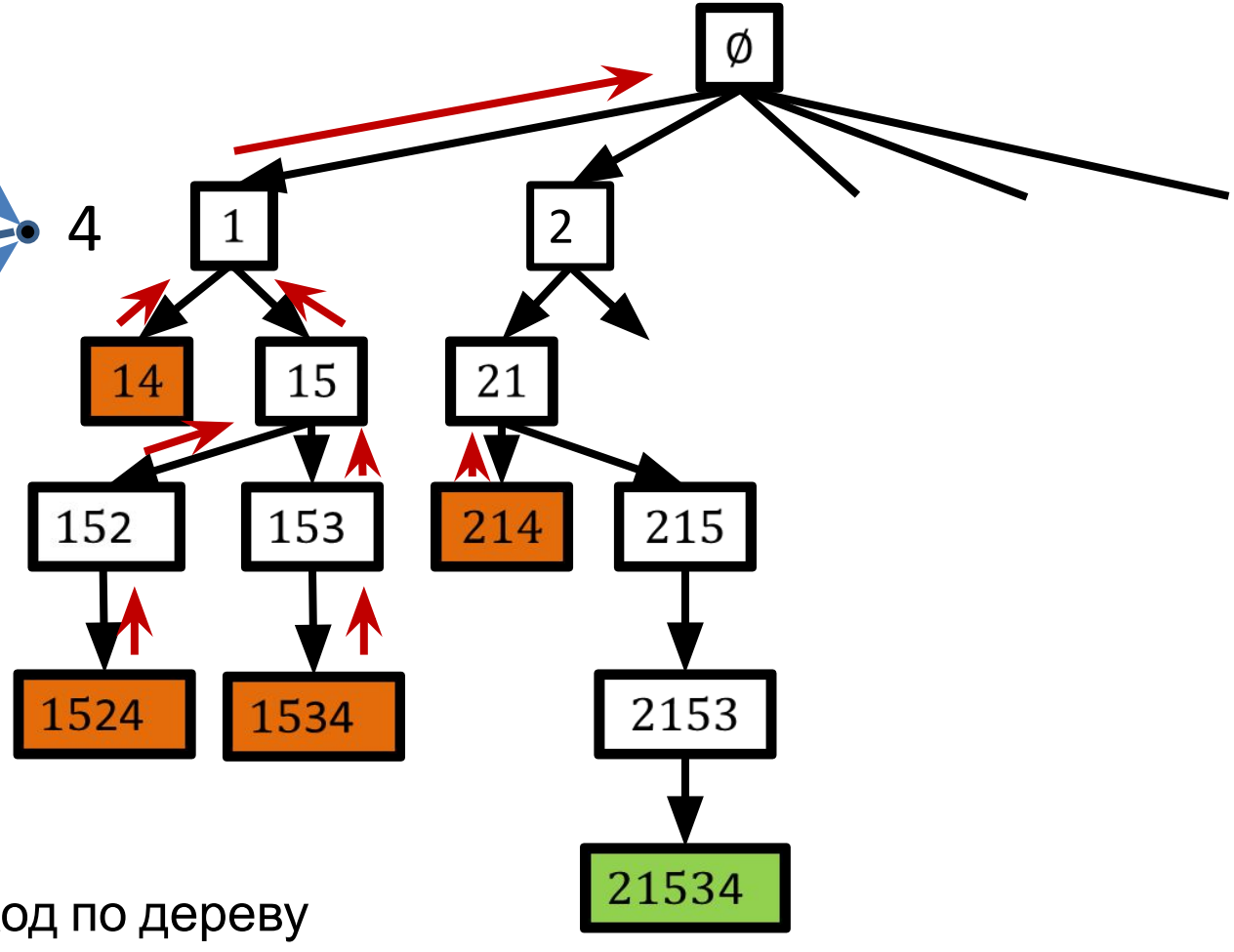


- множество вариантов стоит исследовать глубже

- бесперспективное (тупиковое) множество вариантов

Поиск в глубину





- прямой ход по дереву поиска

- обратный ход **(back tracking)**

Задача коммивояжера

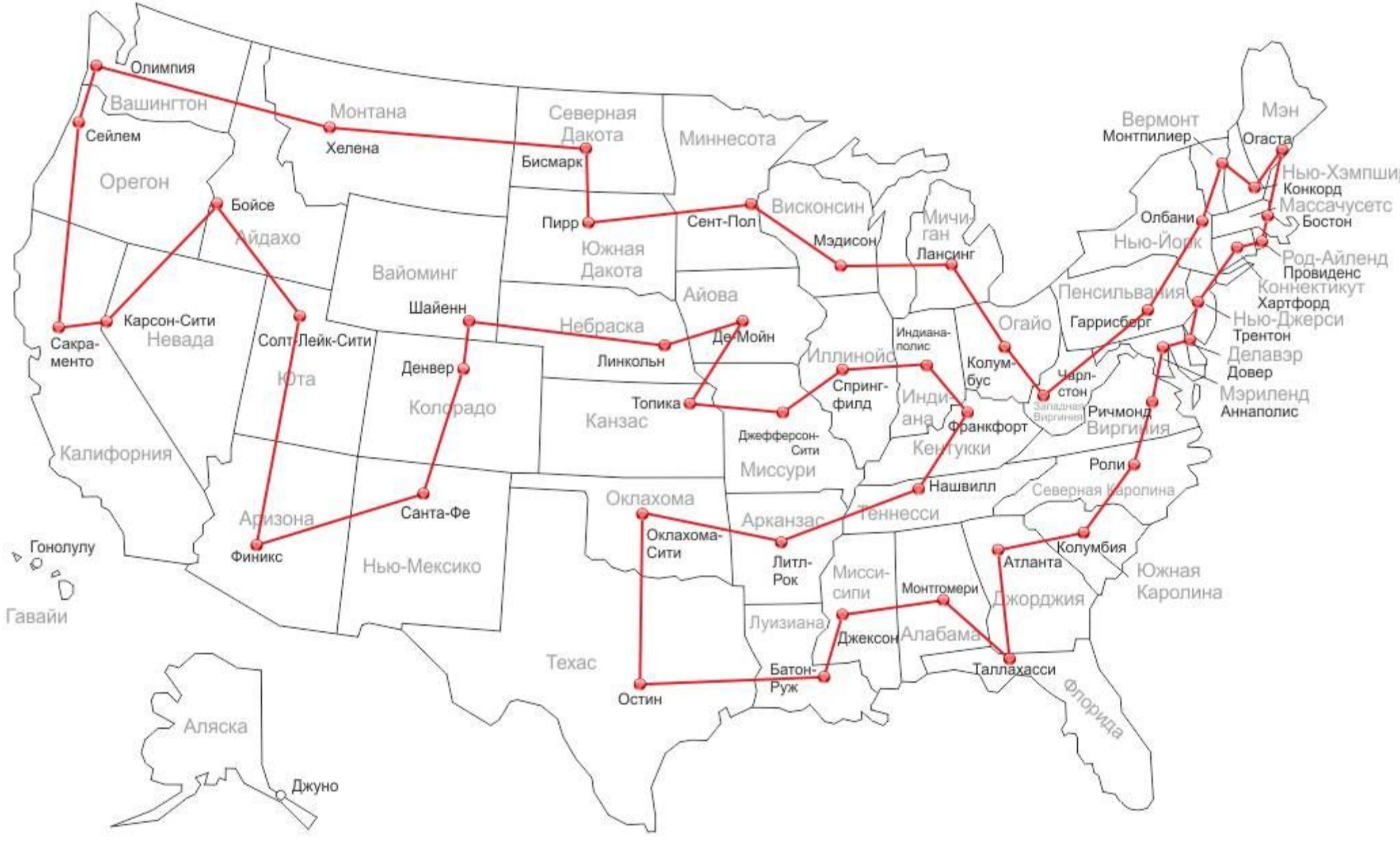
Задача коммивояжера (***travelling seller problem, TSP***) формулируется следующим образом: во взвешенном графе (обычно – полном) найти гамильтонову цепь (цикл) наименьшей длины (с наименьшим суммарным весом ребер).

Название задачи происходит от следующей формулировки: имеется *n* городов и известны расстояния между каждой парой городов; коммивояжер (бродячий торговец), выходящий из какого-либо города, должен посетить *n* − 1 других городов и вернуться в исходный. В каком порядке ему нужно посещать города, чтобы общее пройденное расстояние было минимальным?

Самый простой способ – перебрать все $(n-1)!$ гамильтоновых циклов (если граф полный), однако трудоемкость этого перебора имеет порядок n^n. Уже при $\mathrm{n} > 60$ перебор невозможен никакими теоретически мыслимыми компьютерами за время, меньшее нескольких миллиардов лет. Но это – единственный способ найти **точное** решение.

Существует множество алгоритмов нахождения **приближенных** решений. Задача коммивояжера из-за простоты постановки и наглядности является прекрасной моделью для разработки новых алгоритмов дискретной оптимизации. К ним относятся алгоритмы. реализующие **метод ветвей и границ, генетические алгоритмы** и др.

Пример. Столицы 48 штатов



Длина пути 16675 миль. Алгоритм LMatrix