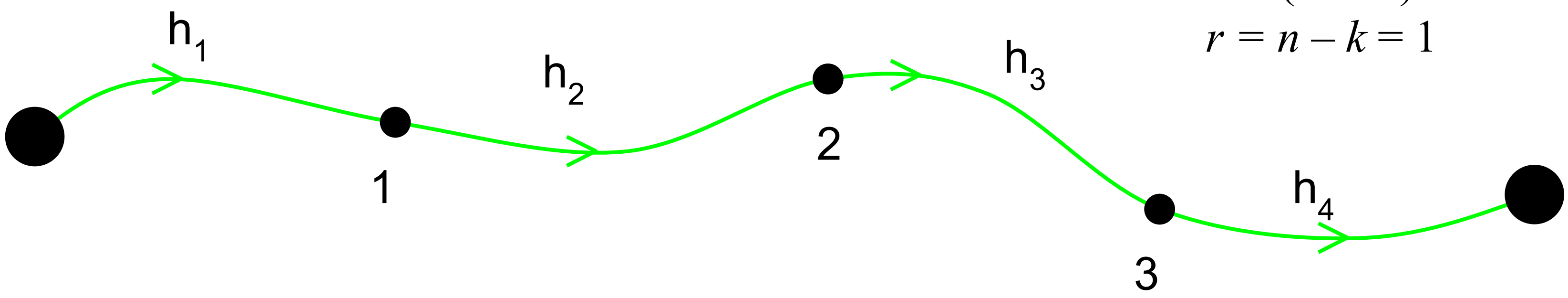
# 1. Общие положения уравнительных вычислений

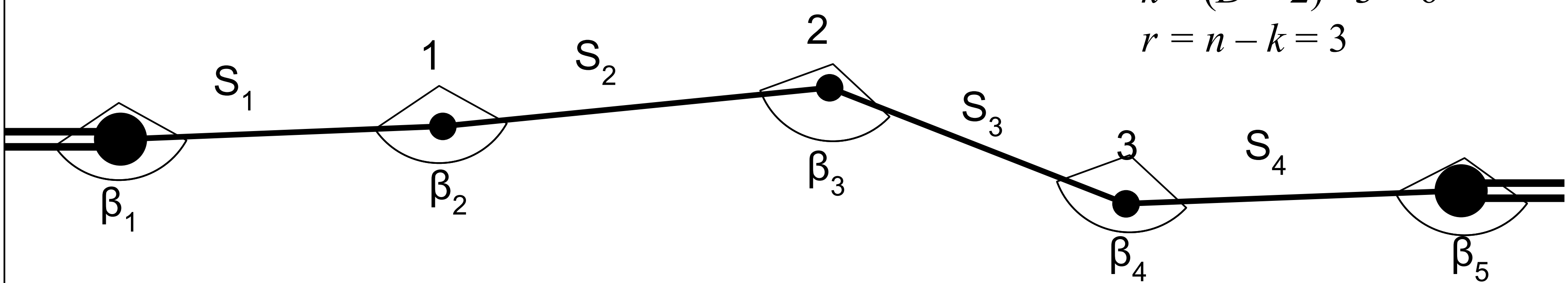
Многократно измеренная величина.

Измерения в структурах.

$n = 4$
$k = (D = 1) \cdot 3 = 3$
$r = n - k = 1$




$n = 4 + 5 = 9$
$k = (D = 2) \cdot 3 = 6$
$r = n - k = 3$



# 1. Общие положения уравнительных вычислений

Условия возникновения задачи обработки в структурах (геодезических построениях):

-Наличие избытка $r$;

-Погрешности измерений $\Delta$.

Наличие избытка – возникновение математических условий $r = n - k$.

Наличие избытка – неопределенность, оценка качества.

Избыток – погрешности – обработка.

Обработка: количество (уравнивание)

качество (оценка точности)

# 1. Общие положения уравнительных вычислений

Общая постановка задачи:

Измерено $n$ величин $y_i$ (их истинные значения $Y_i$). Необходимых измерений надо $k$ ($k < n$). Избыток $r = n - k$ – число строгих математических условий вида

$$f_1(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_r(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = 0$$

Уравнения независимы. Называются уравнениями математической связи.

# 1. Общие положения уравнительных вычислений

Замена $Y_i$ на $y_i$ дает

$$f_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) = W_1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_r(y_1, y_2, \ldots, y_n) = W_r$$

-$r$ невязок. Невязки не 0 т.к. измерения $y_i$ с погрешностями.

<u>Первое правило обработки – проверка качества измерений сравнением невязки с допуском</u>. Не лучший вариант (не 100 %!).

# 1. Общие положения уравнительных вычислений

Главная задача обработки – устранение невязки (и от неё неопределенности).

Выполнение – введение в измерения поправок $v_i$.

Исправленные измерения

$$\hat{y}_i = y_i + v_i \rightarrow Y_i$$

Тогда уравнения связи будут

$$f_1(y_1 + v_1, y_2 + v_2, \ldots, y_n + v_n) = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_r(y_1 + v_1, y_2 + v_2, \ldots, y_n + v_n) = 0$$

Повышение точности после обработки.

# 1. Общие положения уравнительных вычислений

Просто задача не решаема т.к. $r < n$ – недоопределенная система. Для решения привлекается дополнительная вероятностная информация:

Запишем вероятность появления вместе всех погрешностей $\Delta_i$ с НЗР вида

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta^2}{\sigma^2}\right)}$$

$$P(\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_1^2}{\sigma_1^2} + \ldots + \frac{\Delta_1^2}{\sigma_1^2}\right)} \cdot \frac{d\Delta_1}{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot \frac{d\Delta_n}{\sigma_n}$$

# 1. Общие положения уравнительных вычислений

Наиболее вероятна та совокупность погрешностей для которой $P = max$ – $\left[\frac{\Delta^2}{\sigma^2}\right] = \min$

Замена $\Delta$ на $v$ дает дополнительное условие

$$\left[\frac{\Delta^2}{\sigma^2}\right] \approx \left[\frac{v^2}{\sigma^2}\right] = \left[\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \cdot v^2\right] = \left[pv^2\right] = \hat{O} = \min$$

Условие позволяет получить наилучшую комбинацию поправок для уничтожения невязок.

Это есть принцип МНК.

Учитывать $v$ = - $\Delta$

# 1. Общие положения уравнительных вычислений

Очевидные достоинства МНК:

-ограничение крупных поправок;

-при равноточных измерениях поправки распределяются достаточно равномерно

-при неравноточных веса уменьшают поправки к более точным, увеличивают к менее точным.

Недостатки:

-зависимость от НЗР

-зависимость от нарушения т. Ляпунова

# 1. Общие положения уравнительных вычислений

Основные способы решения поставленной задачи обработки – сведение задачи оценивания к задаче поиска экстремума целевой функции Ф. Из методов поиска выделяют:

-метод безусловного поиска Эйлера;

-метод условного поиска Лагранжа.

- обобщённый способ

Эйлер – параметрический способ.

Лагранж – коррелатный способ.

# 1. Общие положения уравнительных вычислений

Постановка задачи при коррелатном способе оценивания:

$r$ уравнений связи после замены истинных величин измеренными и введением поправк для устранения невязок будут

$$f_1(y_1 + v_1, y_2 + v_2, \dots, y_n + v_n) = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f_r(y_1 + v_1, y_2 + v_2, \dots, y_n + v_n) = 0$$

Тогда сведение к минимизации будет такое

## 1. Общие положения уравнительных вычислений

$$\Phi = [pv^2] = min$$

НО - при выполнении *r* принятых выше условий.

Условный экстремум - на основе функции Лагранжа вида

$$\Phi(v_1, v_2, \ldots, y_n) = [pv^2] + \lambda_1 \cdot f_1 + \ldots + \lambda_\mathrm{k} \cdot f_r$$

Решение задачи минимизации производится обычными, известными способами.

Оценивание-минимизация-поправки в измерения.

## 1. Общие положения уравнительных вычислений

Постановка задачи оценивания в параметрическом способе:

Выбирают $k$ независимых параметров $T_i$ через которые однозначно и легко можно выразить все измерения $Y_i$:

$$Y_i = f_i(T_1, T_2, \ldots, T_k)$$

Замена истинных измерений на реальные дает

$$y_i + v_i = f_i(t_1, t_2, \ldots, t_k)$$

$t_i$ – уравненные (не истинные параметры)

# 1. Общие положения уравнительных вычислений

Теперь

$$v_i = f_i(t_1, t_2, \ldots, t_k) - y_i$$

и сведение к безусловному экстремуму

$$\Phi = \left[pv^2\right] = \left[p(f(t_1, \ldots, t_k) - x)^2\right] = \min$$

Находится достаточно просто.

В качестве параметров могут быть как измеренные так и другие величины, однозначно и просто позволяющие выразить измерения.

Прямой и косвенный подход.

Линейная, линеаризованная и нелинейная формы.

# 1. Общие положения уравнительных вычислений

При оценке качества (оценке точности) выделяют:

оценку точности измерений до уравнивания,

-оценку точности измерений после уравнивания,

- оценку точности параметров,
- оценку точности функций от уравненных величин.

Задача может решаться на основе формулы ковариационной матрицы

$K_x = MO((x - MO(x)) \cdot (x - MO(x))^{\mathrm{T}})$,

где x – величина для оценки точности, но чаще на основе ФТПП для функции F: $K_F = f\,K_Y f^{\mathrm{T}}$