Обыкновенные дифференциальные уравнения

Лекция 4

Уравнение первого порядка

Функциональное уравнение

$F(x,y,y') = 0$ или $y' = f(x,y)$, связывающее между собой независимую переменную, искомую функцию $y(x)$ и ее производную $y'(x)$, называется *дифференциальным уравнением первого порядка*.

Решение дифференциального уравнения

Решением уравнения первого порядка называется всякая функция $y=\phi(x)$, которая, будучи подставлена в уравнение вместе со своей производной $y'=\phi(x)$, обращает его в тождество относительно х.

Общее решение дифференциального уравнения 1-го порядка

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется такая функция y = ϕ(x,C), которая при любом значении параметра C является решением этого дифференциального уравнения.

Уравнение Ф(x,y,C) =0, определяющее общее решение как неявную функцию, называется *общим интегралом* дифференциального уравнения первого порядка.

ВГУЭС

Уравнение, разрешенное относительно производной

Если уравнение 1-го порядка разрешить относительно производной, то оно может быть представлено в виде

$$y' = f(x, y)$$

Его общее решение геометрически представляет собой семейство интегральных кривых, т. е. совокупность линий, соответствующих различным значениям постоянной *C*.

Постановка задачи Коши

Задача отыскания решения дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y) \qquad ,$$

удовлетворяющего начальному условию

$y = y_0$ при $x = x_0$, называется *задачей Коши для уравнения 1-го порядка.*

Геометрически это означает: найти интегральную кривую дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y)\quad ,$$

проходящую через данную точку

$$M_0(x_0, y_0)\quad .$$

Уравнение с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение

$$f(x)dx = g(y)dy$$

называется уравнением с *разделенными переменными.*

Дифференциальное уравнение 1-го порядка называется уравнением с *разделяющимися переменными*, если оно имеет вид:

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \quad .$$

Для решения уравнения делят обе его части на произведение функций

$$N_1(y)M_2(x) \quad ,$$

а затем интегрируют.

Пример

Разделим переменные в уравнении

$$(1+y^2)xdx+(1+x^2)dy=0$$

$$\frac{xdx}{1+x^2}=-\frac{dy}{1+y^2}$$

Интегрируем: $\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=-\int\frac{dy}{1+y^2}$

Имеем: $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)=-arctgy+C.$.

Понятие однородной функции

Функция z=f(x,y) называется *однородной порядка k*, если при умножении ее аргументов на t получаем:

$$f(tx,ty)=t^k f(x,y)$$

Если k=0, то имеем функцию *нулевого порядка*. Например, функция

$$f(x,y)=\frac{x+y}{x-y}$$

нулевого порядка.

Однородные уравнения

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *однородным*, если его можно привести к виду $y' = f(\frac{y}{x})$ или к виду $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ где $M(x,y)$ и $N(x,y)$ – однородные функции одного порядка .

Пример

Решить уравнение

$$xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y.$$

Линейные уравнения 1-го порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *линейным*, если оно содержит y и y' в первой степени, т.е. имеет вид

$$y' + P(x)y = Q(x) .$$

Решают такое уравнение с помощью подстановки y=uv, где u и v-вспомогательные неизвестные функции, которые находят, подставляя в уравнение вспомогательные функции и на одну из функций налагают определенные условия.

Уравнение Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение 1-го порядка, имеющее вид

$$y' + P(x)y = Q(x)y^m,$$

где $m \neq 0$ и $m \neq 1$

Его, как и линейное уравнение решают с помощью подстановки

$$y = uv$$

Пример

Решить уравнения

1) $y' - \frac{y}{x+1} = e^{x}(x+1)$

2) $y' = \frac{y}{x} + \frac{x^{2}}{y}$