ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

Задача Коши.

- Обыкновенными дифференциальными уравнениями называются такие уравнения, которые содержат одну или несколько производных от искомой функций $y = y(x)$.

- Их можно записать в виде

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

где x — независимая переменная.

- Наивысший порядок n входящей в уравнение (1) производной называется **порядком** дифференциального уравнения.

- **Решением** дифференциального уравнения (1) называется всякая n раз дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, которая после ее подстановки в уравнение превращает его в тождество.

- **Общее решение** обыкновенного дифференциального уравнения *n*-го порядка (1) содержит *n* произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

- **Частное решение** дифференциального уравнения получается из общего, если произвольным постоянным придать определенные значения.

- задача Коши (дополнительные условия задаются в одной точке)

- краевая задача (дополнительные условия задаются в более чем одной точке)

- Пример:

$$\frac{dx}{dt} = x^2 \cos t, \quad t > 0, \qquad x(0) = 1;$$

$$y'' = \frac{y'}{x} + x^2, \quad x > 1, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 0.$$

$$y'' + 2y' - y = \sin x, \ 0 \le x \le 1, \ y(0) = 1, \ y(1) = 0;$$

$$y''' = x + yy', \ 1 \le x \le 3, \ y(1) = 0, \ y'(1) = 1, \ y'(3) = 2.$$

- Решение задачи Коши.

- сущность **метода конечных разностей**. состоит в следующем:

- 1. область непрерывного изменения аргумента (например, отрезок) заменяется дискретным множеством точек - **узлами**. Эти узлы составляют **разностную сетку**.

- 2. Искомая функция непрерывного аргумента приближенно заменяется функцией дискретного аргумента на заданной сетке (**сеточной функцией**).

- 3. Исходное дифференциальное уравнение заменяется разностным уравнением относительно сеточной функции.

- Такая замена дифференциального уравнения разностным называется его **аппроксимацией на сетке** (или разностной аппроксимацией).

- Таким образом, решение дифференциального уравнения сводится к отысканию значений сеточной функции в узлах сетки.

- **Метод Эйлера.**
- Рассмотрим уравнение $y' = f(x, y)$

с начальным условием $y(x_0) = y_0$

для определенности будем считать, что решение нужно получить для значений $x > x_0$.

1. выбирается достаточно малый шаг h и строится

система равноотстоящих точек $x_k = x_0 + kh$

2. Вычисляются $y_k = y_{k-1} + hf(x_{k-1}, y_{k-1})$

- При этом искомая интегральная кривая $y = f(x)$ проходящая через точку $L_0(x_0, y_0)$ заменяется ломанной $L_0L_1L_2...$ с вершинами $L_k(x_k, y_k)$.

- Для оценки погрешности на практике пользуются двойным просчетом: с шагом h и шагом $h/2$.

- Погрешность более точного значения y_k^* (при шаге $h/2$) оценивают приближенно так:

$$\left|y(x_k) - y_k^*\right| \approx \left|y_k^* - y_k\right|$$

- где $y(x_k)$ - значение точного решения уравнения при $x = x_k$,
- y_k -приближенное значение полученное при вычислениях с шагом h .

- y_k^* - приближенное значение полученное с шагом $h/2$.

- Рассмотрим систему двух уравнений первого порядка

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, z) \\ z' = f_2(x, y, z) \end{cases}$$

- с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0, \;\; z(x_0) = z_0.$$

- Приближенные значения вычисляются для этой системы по формулам

$$y_k = y_{k-1} + hf_1(x_{k-1}, y_{k-1}, z_{k-1}),$$

$$z_k = z_{k-1} + hf_2(x_{k-1}, y_{k-1}, z_{k-1}), \quad k = 1, 2, ..., n.$$

- Модификации метода Эйлера.
- 1) Метод Эйлера-Коши

$$\tilde{y}_k = y_{k-1} + h f_{k-1}$$

$$\tilde{f}_k = f(x_k, \tilde{y}_k)$$

$$y_k = y_{k-1} + h \frac{f_{k-1} + \tilde{f}_k}{2}$$

- Оценка погрешности в точке x_k , полученная с помощью двойного пересчета, имеет вид:

$$\left|y(x_k) - y_k^*\right| \approx \frac{1}{3}\left|y_k^* - y_k\right|$$

- где $y(x_k)$- значение точного решения уравнения при

$x = x_k$,

- y_k -приближенное значение полученное при вычислениях с шагом h .

- y_k^* - приближенное значение полученное с шагом $h/2$.

- 2) другая модификация метода Эйлера заключается в итерационном уточнении значения y_k на каждом шаге.

- В качестве нулевого приближения берут

$$y_k^{(0)} = y_{k-1} + h f_{k-1}$$

- Далее строится итерационный процесс

$$y_k^{(i)} = y_{k-1} + \frac{h}{2}\left(f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f(x_k, y_k^{(i-1)}\right)$$

- Итерации продолжают до тех пор, пока для двух последовательных приближений не будет выполнено условие

$$\left| y_k^{(i)} - y_k^{(i-1)} \right| < \varepsilon$$

- Как правило, при достаточно малом h итерации быстро сходятся.

- Если после трех-четырех итераций не произошло совпадение нужного числа десятичных знаков, то следует уменьшить шаг расчета h.

- **Метод Рунге-Кутта.**

- Рассмотрим уравнение $y' = f(x, y)$

  с начальным условием $y(x_0) = y_0$

- Если известно значение y_{k-1} в точке x_{k-1}, то вычисление приближенного значения y_k в следующей точке $x_k = x_{k-1} + h$ производится по формулам:

$$K_1^{(k)} = f(x_{k-1}, y_{k-1}),$$

$$K_2^{(k)} = f(x_{k-1} + \frac{h}{2}, y_{k-1} + \frac{K_1^{(k)}}{2}),$$

$$K_3^{(k)} = f(x_{k-1} + \frac{h}{2}, y_{k-1} + \frac{K_2^{(k)}}{2}),$$

$$K_4^{(k)} = f(x_{k-1} + h, y_{k-1} + K_3^{(k)}),$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\left(K_1^{(k)} + K_2^{(k)} + K_3^{(k)} + K_4^{(k)}\right).$$

- Оценку погрешности метода можно получить с помощью двойного просчета по формуле

$$\left| y(x_k) - y_k^* \right| \approx \frac{1}{15} \left| y_k^* - y_k \right|$$