

# ОБЪЕМ ФИГУР В ПРОСТРАНСТВЕ

**Объем** – величина, аналогичная площади и сопоставляющая фигурам в пространстве неотрицательные действительные числа.

Для объемов пространственных фигур справедливы свойства, аналогичные свойствам площадей плоских фигур, а именно:

1. Равные фигуры имеют равные объемы.

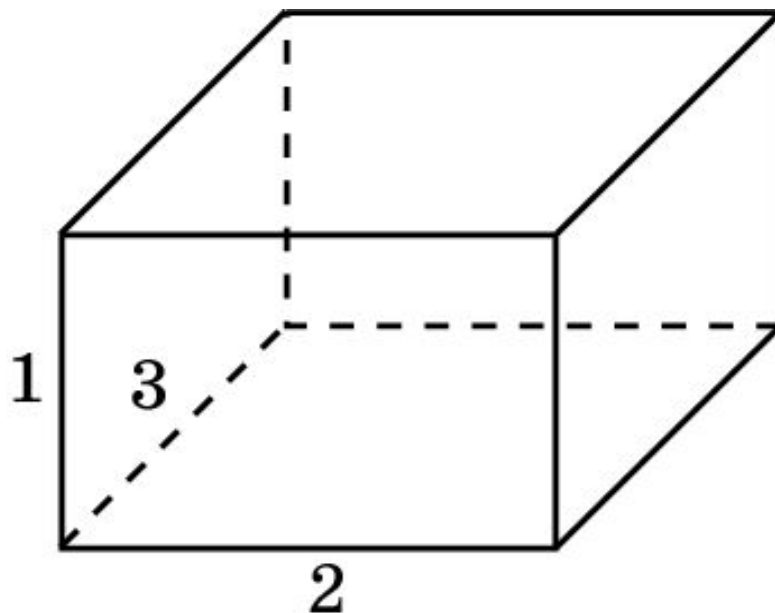
2. Если фигура  $\Phi$  составлена из двух неперекрывающихся фигур  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , то объем фигуры  $\Phi$  равен сумме объемов фигур  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , т.е.  $V(\Phi) = V(\Phi_1) + V(\Phi_2)$ .

3. Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений, т. е. имеет место формула  $V = a \cdot b \cdot c$ , где  $a, b, c$  – ребра параллелепипеда.

Две фигуры, имеющие равные объемы, называются **равновеликими**.

## Упражнение 1

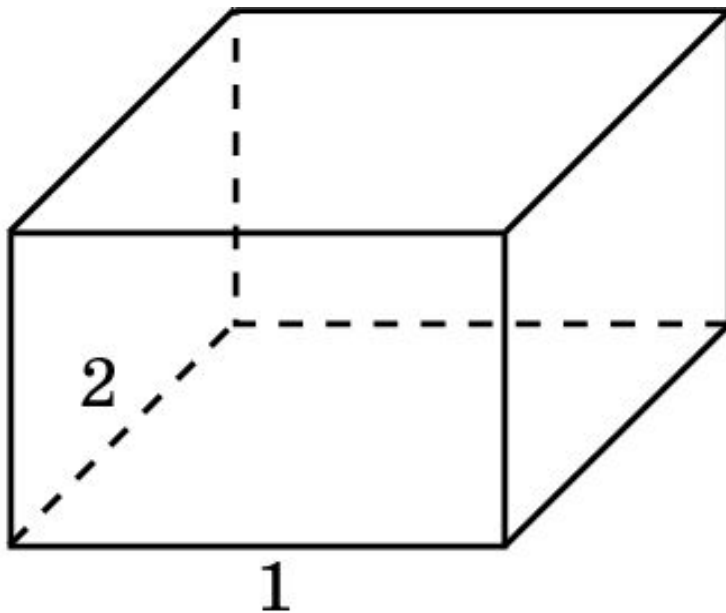
Ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2, 3. Найдите объем параллелепипеда.



Ответ: 6.

## Упражнение 2

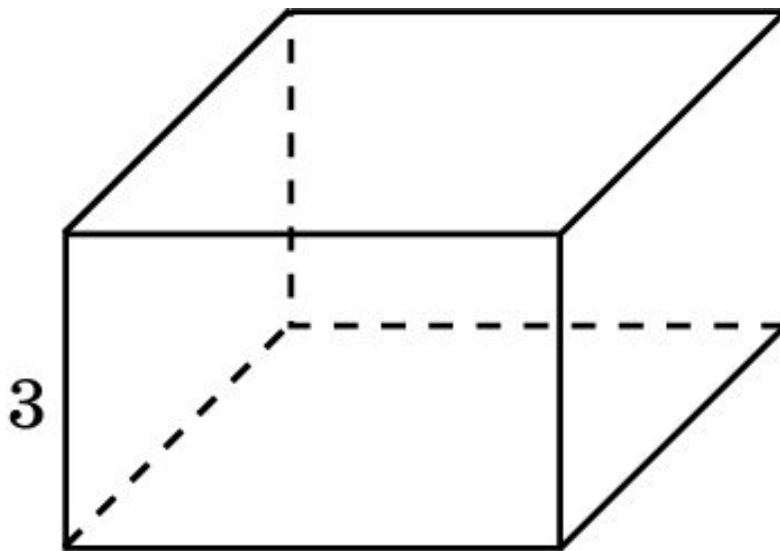
Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2. Объем параллелепипеда равен 3. Найдите третье ребро параллелепипеда, выходящее из той же вершины.



Ответ:  $\frac{3}{2}$ .

### Упражнение 3

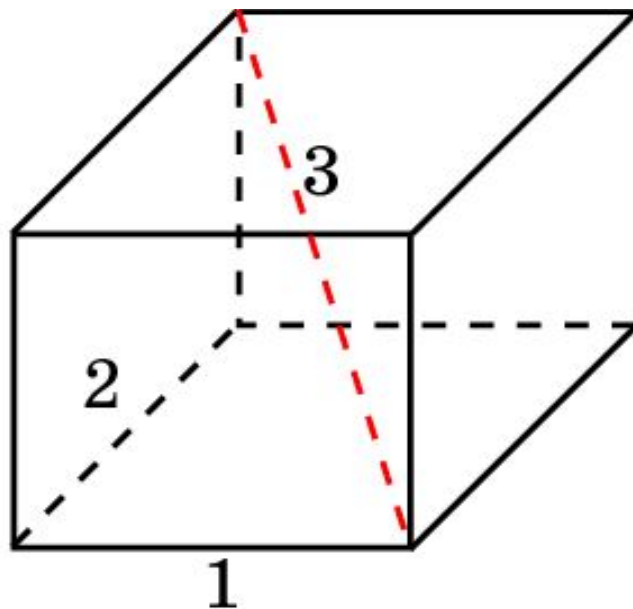
Площадь грани прямоугольного параллелепипеда равна 2.  
Ребро, перпендикулярное этой грани, равно 3. Найдите объем параллелепипеда.



Ответ: 6.

## Упражнение 4

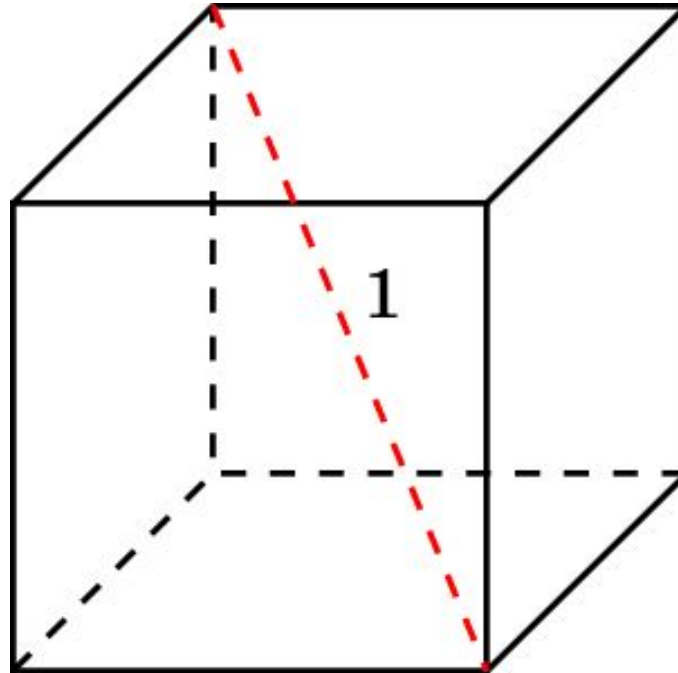
Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2. Диагональ параллелепипеда равна 3. Найдите объем параллелепипеда.



Ответ: 4.

## Упражнение 5

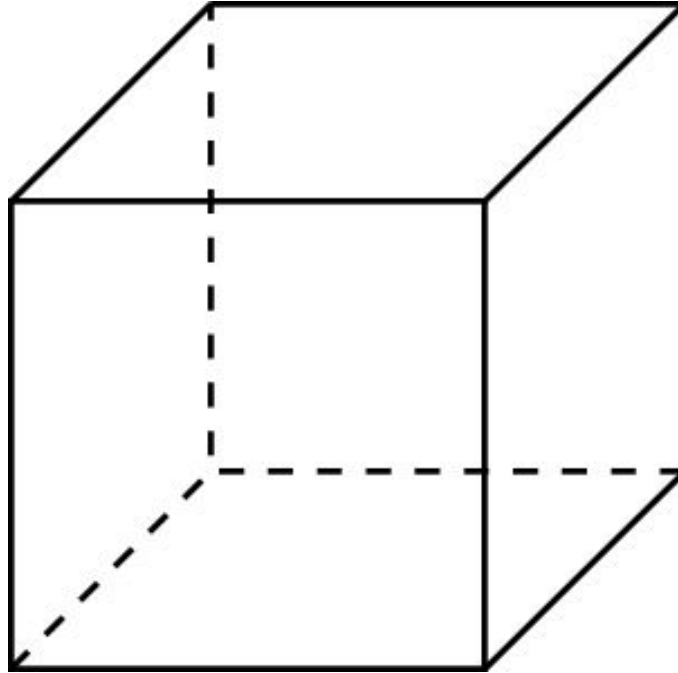
Диагональ куба равна 1. Найдите его объем.



Ответ:  $\frac{\sqrt{3}}{9}$ .

## Упражнение 6

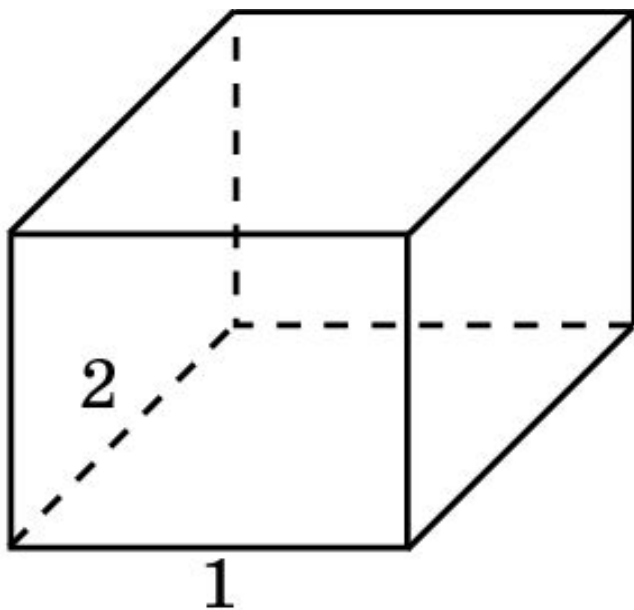
Площадь поверхности куба равна 1. Найдите его объем.



Ответ:  $\frac{\sqrt{6}}{36}$ .

## Упражнение 7

Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2. Площадь поверхности параллелепипеда равна 10. Найдите объем параллелепипеда.



**Решение.** Пусть третье ребро параллелепипеда равно  $x$ . Тогда площадь поверхности будет равна  $4 + 6x$ . Следовательно,  $x = 1$ .

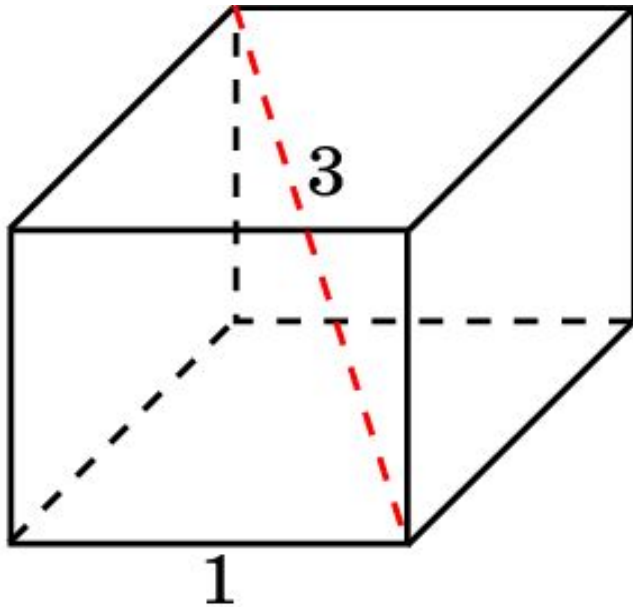
Объем параллелепипеда будет равен 2.

**Ответ: 2.**



## Упражнение 8

Ребро прямоугольного параллелепипеда равно 1. Диагональ равна 3. Площадь поверхности параллелепипеда равна 16. Найдите объем параллелепипеда.



Ответ: 4.

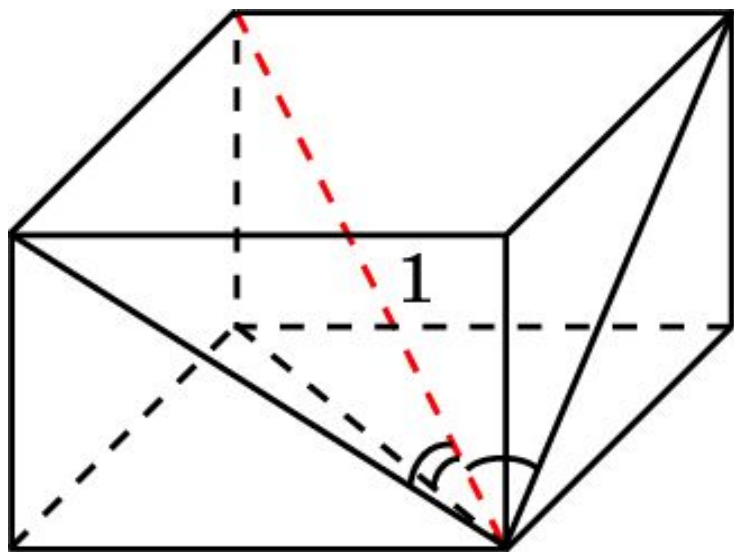
**Решение.** Пусть второе ребро параллелепипеда равно  $x$ . Тогда третье ребро будет равно  $\sqrt{8 - x^2}$ . Площадь поверхности будет равна

$$2x + 2\sqrt{8 - x^2} + 2x\sqrt{8 - x^2}.$$

Приравнивая это выражение к 16, получим  $x = 2$ . Третье ребро будет равно 2 и, следовательно, искомый объем равен 4.

## Упражнение 9

Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 1 и образует углы  $30^\circ$ ,  $30^\circ$  и  $45^\circ$  с плоскостями граней параллелепипеда. Найдите объем параллелепипеда.

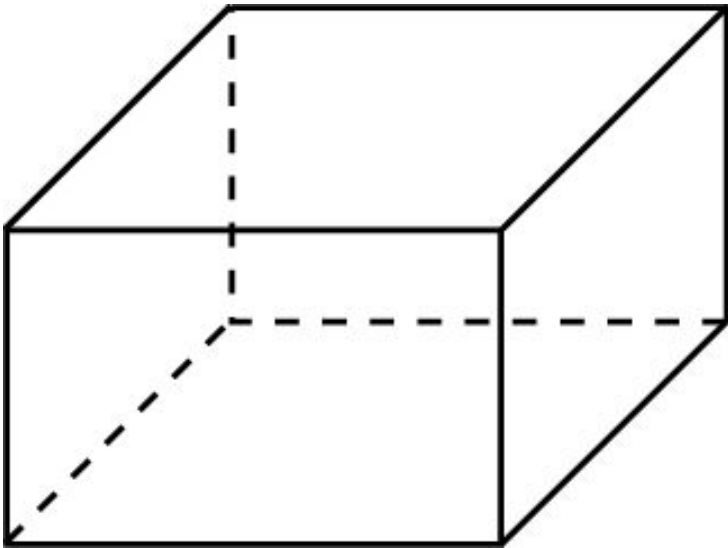


**Решение.** Ребра параллелепипеда равны  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Следовательно, объем равен  $\frac{\sqrt{2}}{8}$ .

**Ответ:**  $\frac{\sqrt{6}}{8}$ .

## Упражнение 10

Площади трех граней параллелепипеда равны 1, 2, 3. Найдите объем параллелепипеда.



**Решение.** Пусть ребра параллелепипеда равны  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Тогда  $xy = 1$ ,  $xz = 2$ ,  $yz = 3$ . Решая эти уравнения, находим

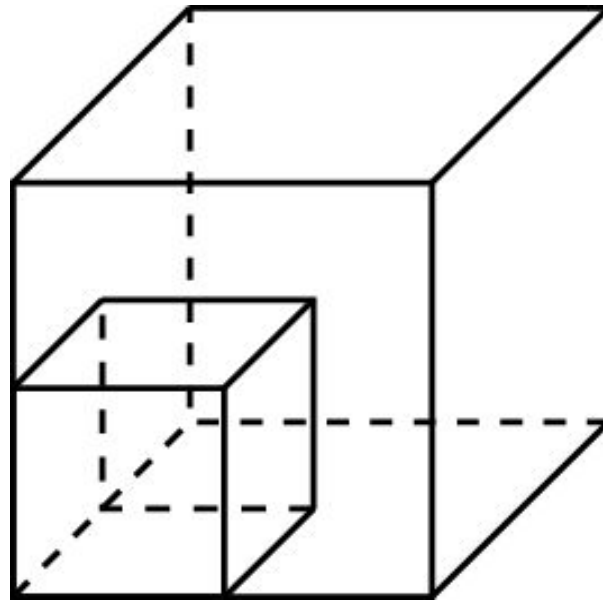
$$x = \frac{\sqrt{6}}{3}, y = \frac{\sqrt{6}}{2}, z = \sqrt{6}.$$

Объем параллелепипеда равен  $\sqrt{6}$ .

**Ответ:**  $\sqrt{6}$ .

## Упражнение 11

Как относятся объемы двух кубов: данного и его модели, уменьшенной в масштабе: а)  $1 : 2$ ; б)  $1 : 3$ ; в)  $1 : n$ ?



**Ответ:** а)  $1 : 8$ ; б)  $1 : 27$ ; в)  $1 : n^3$ .

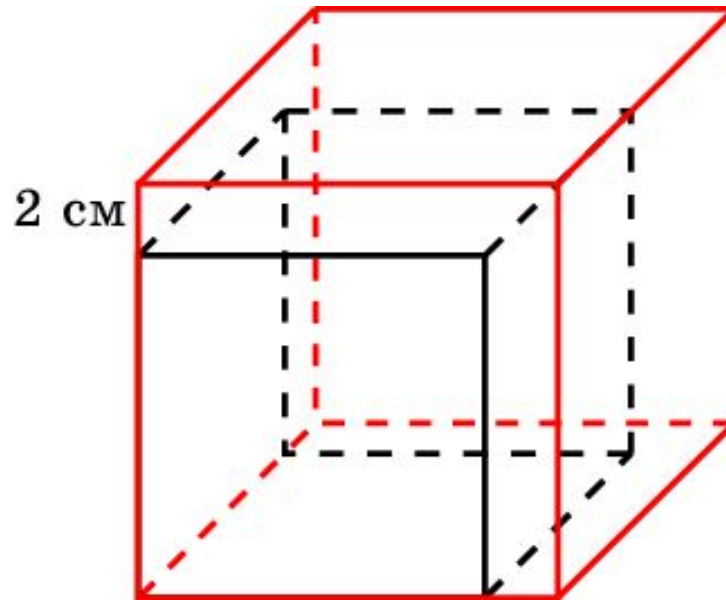
## Упражнение 12

Как изменится объем прямого параллелепипеда, если: а) одно из его измерений увеличить в 2 раза, в 3 раза, в  $n$  раз; б) если два его измерения увеличить, причем каждое из них в 2, 3,  $n$  раз; в) если все три его измерения увеличить в 2, 3,  $n$  раз?

**Ответ:** а) Увеличится в 2 раза, в 3 раза, в  $n$  раз;  
б) увеличится в 4 раза, в 9 раза, в  $n^2$  раз;  
в) увеличится в 8 раз, в 27 раз, в  $n^3$  раз.

## Упражнение 13

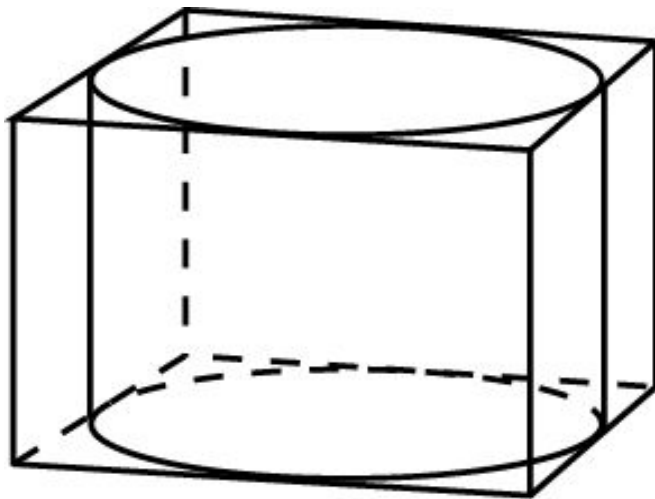
Если каждое ребро куба увеличить на 2 см, то его объем увеличится на  $98 \text{ см}^3$ . Определите ребро куба.



**Ответ:** 3 см.

## Упражнение 14

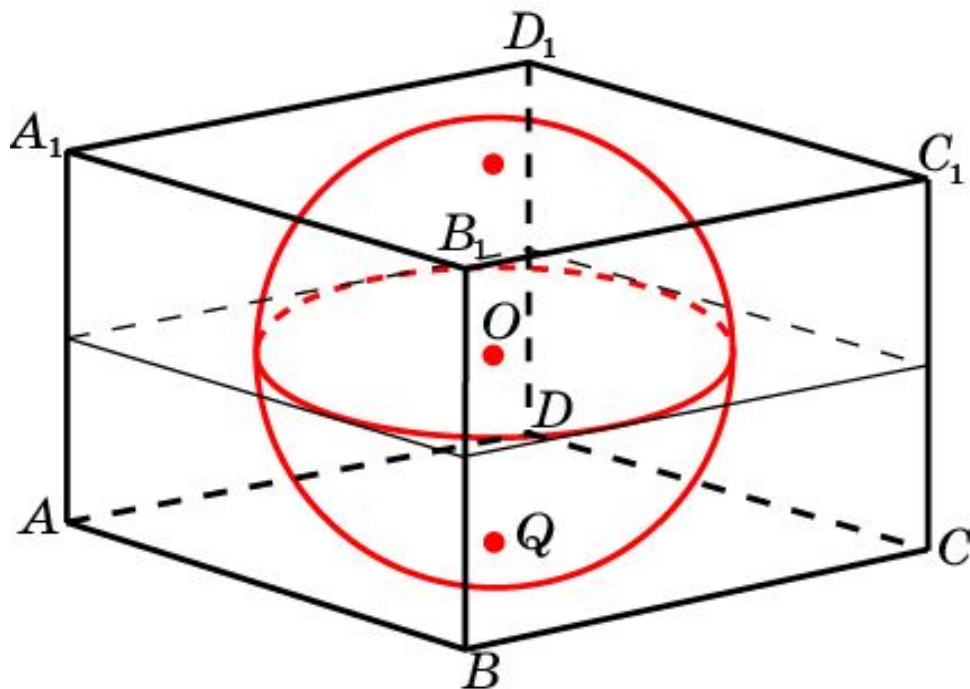
Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1. Найдите объем параллелепипеда.



**Решение:** Ребра параллелепипеда равны 2, 2 и 1. Его объем равен 4.

## Упражнение 15

Параллелепипед описан около единичной сферы. Найдите его объем.

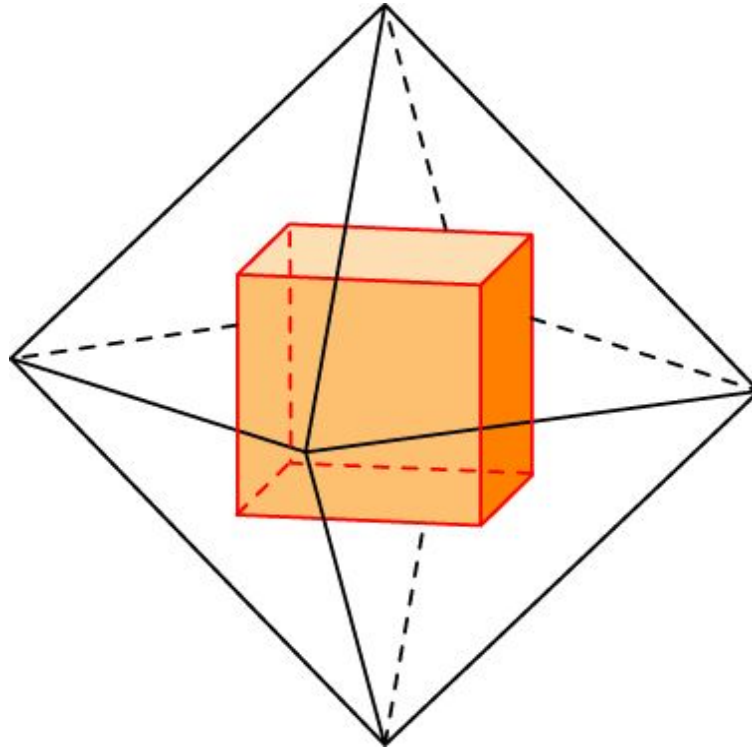


**Решение:** Ребра параллелепипеда равны 2. Его объем равен 8.



## Упражнение 16

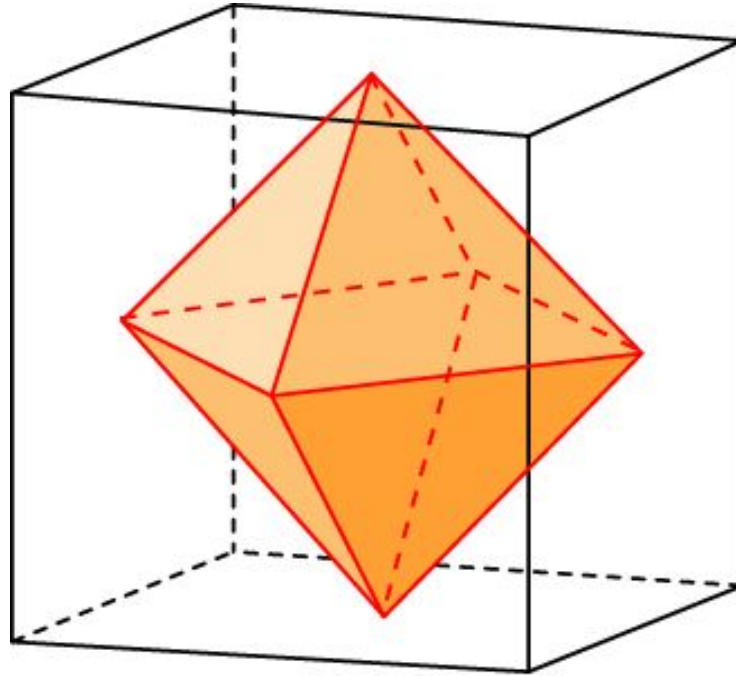
Найдите объем куба, вписанного в единичный октаэдр.



**Решение:** Ребро куба равно  $\frac{\sqrt{2}}{3}$ . Объем куба равен  $\frac{2\sqrt{2}}{27}$ .

## Упражнение 17

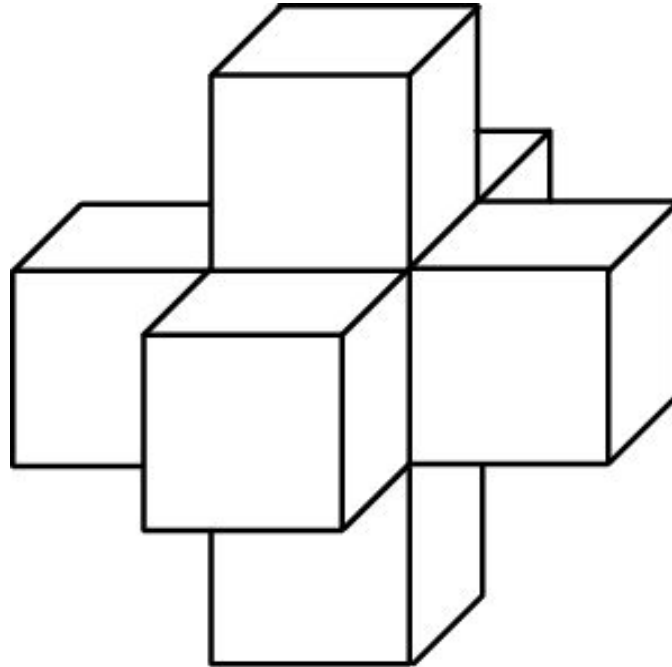
Найдите объем куба, описанного около единичного октаэдра.



**Решение:** Ребро куба равно  $\sqrt{2}$ . Объем куба равен  $2\sqrt{2}$ .

## Упражнение 18

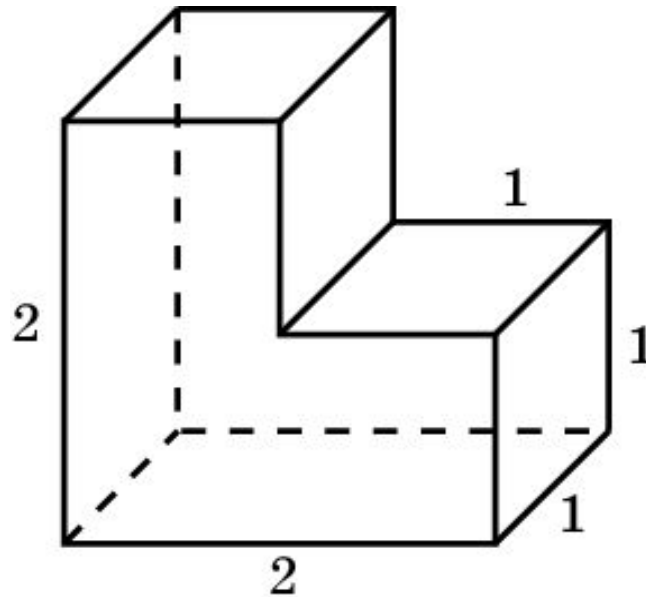
Чему равен объем пространственного креста, если ребра образующих его кубов равны единице?



Ответ: 7.

## Упражнение 19

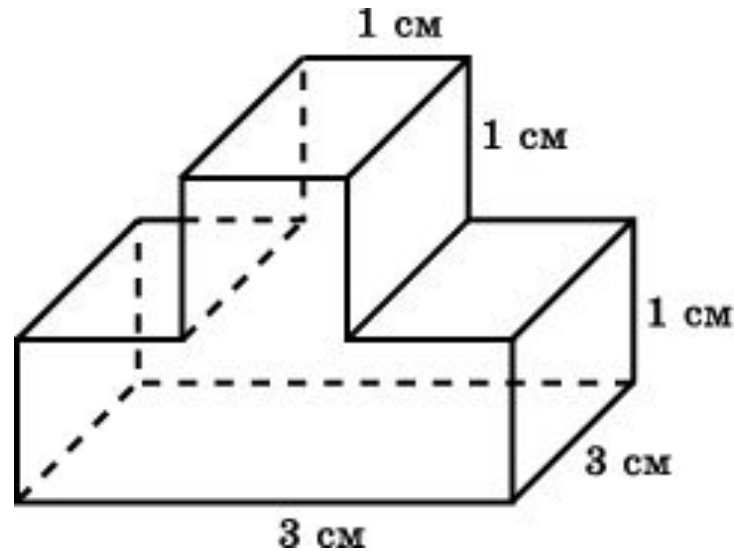
Чему равен объем фигуры, изображенной на рисунке?



Ответ: 3.

## Упражнение 20

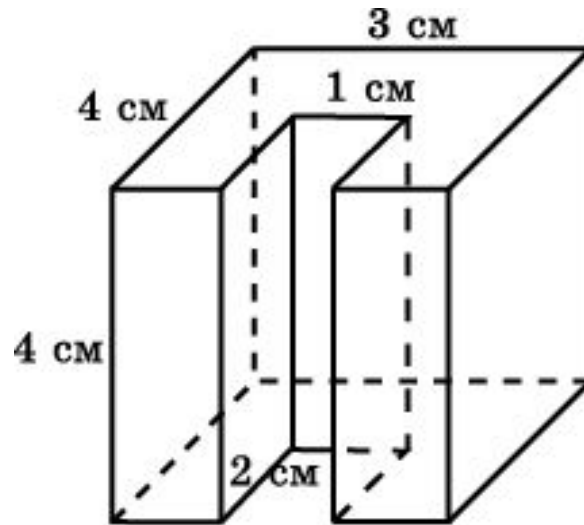
Найдите объем детали, изображенной на рисунке (все углы – прямые).



Ответ:  $12 \text{ см}^3$ .

## Упражнение 21

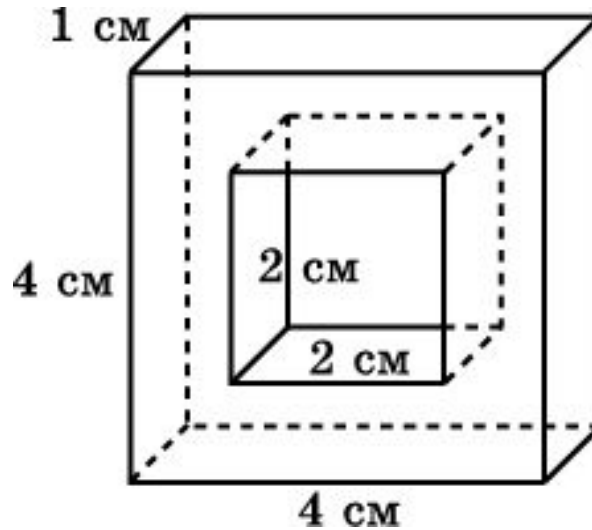
Найдите объем детали, изображенной на рисунке (все углы – прямые).



Ответ:  $40 \text{ см}^3$ .

## Упражнение 22

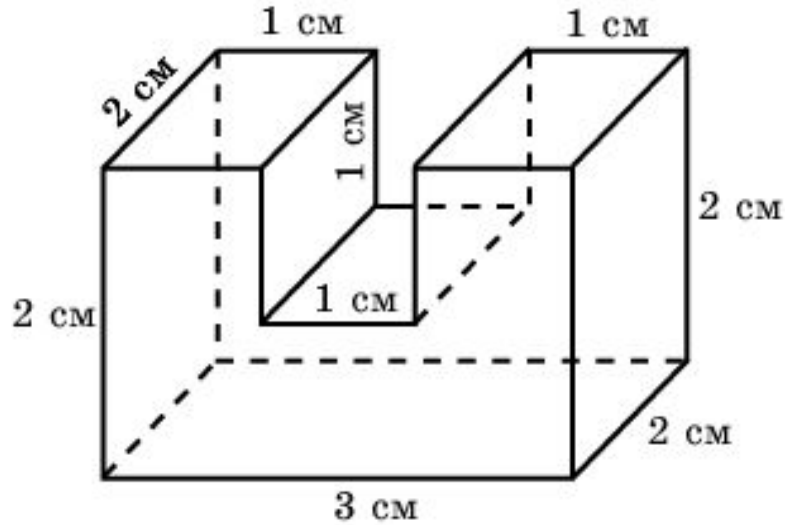
Найдите объем детали, изображенной на рисунке (все углы – прямые).



Ответ:  $12 \text{ см}^3$ .

## Упражнение 23

Найдите объем детали, изображенной на рисунке (все углы – прямые).

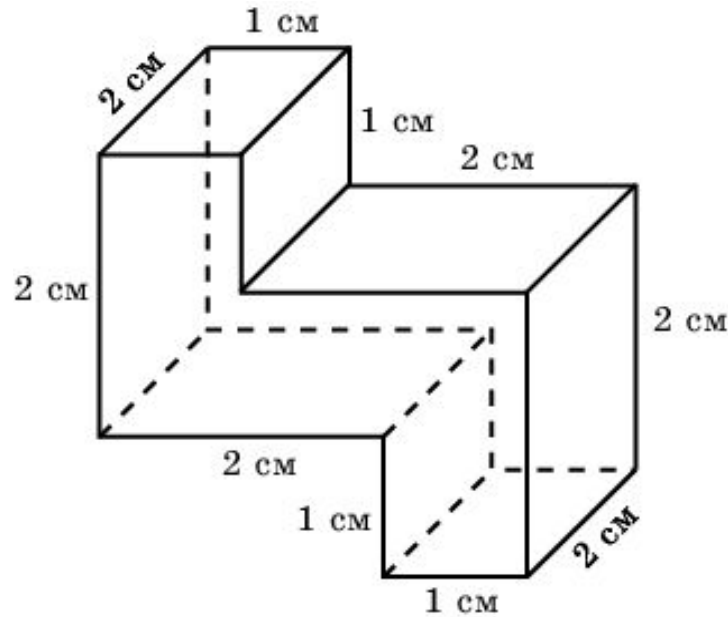


Ответ:  $10 \text{ см}^3$ .



## Упражнение 24

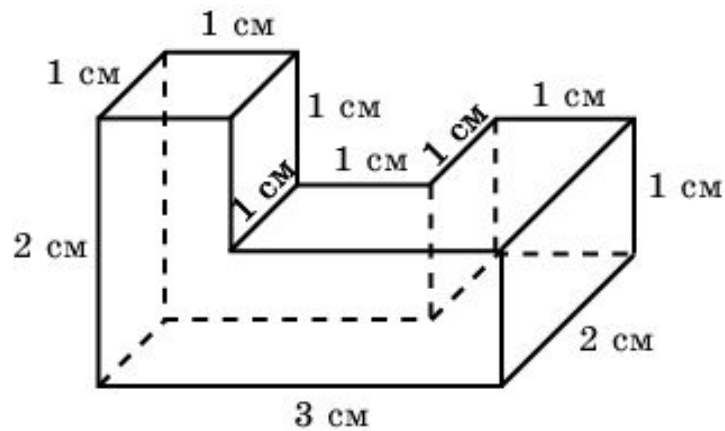
Найдите объем детали, изображенной на рисунке (все углы – прямые).



**Ответ:**  $10 \text{ см}^3$ .

## Упражнение 25

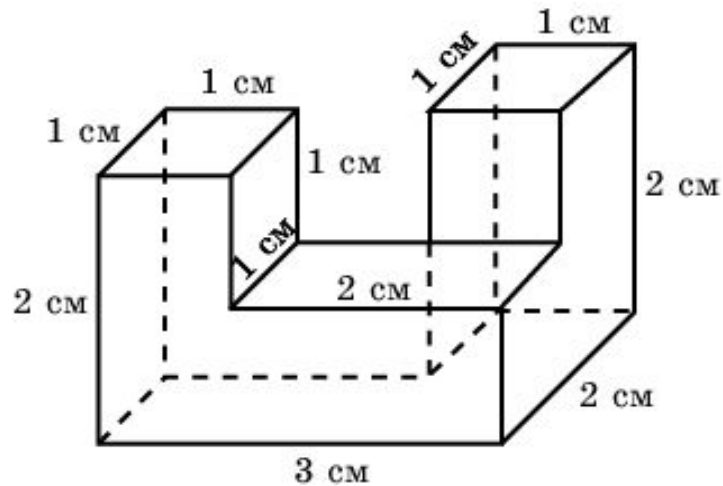
Найдите объем детали, изображенной на рисунке (все углы – прямые).



Ответ:  $5 \text{ см}^3$ .

## Упражнение 26

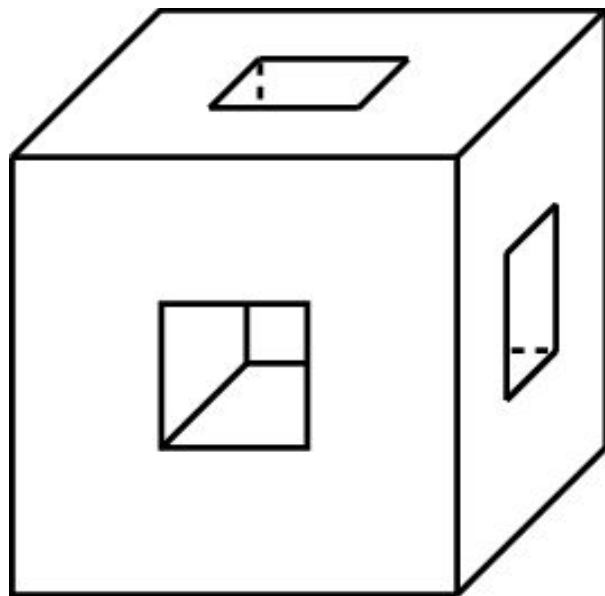
Найдите объем детали, изображенной на рисунке (все углы – прямые).



Ответ:  $6 \text{ см}^3$ .

## Упражнение 27

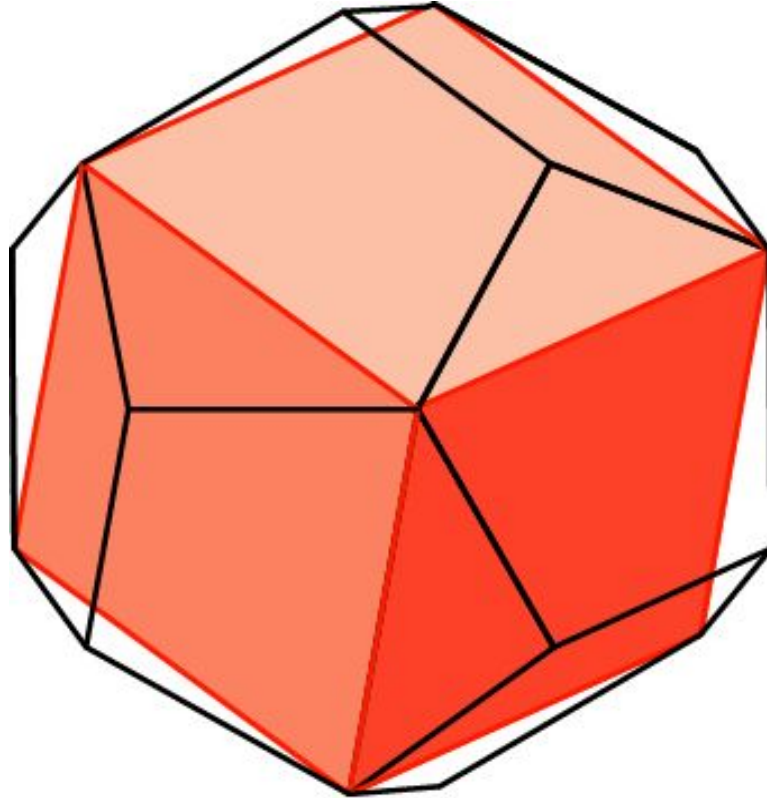
Дан куб с ребром 3 см. В каждой грани проделано сквозное квадратное отверстие со стороной 1 см. Найдите объем оставшейся части.



Ответ:  $20 \text{ см}^3$ .

## Упражнение 28

Найдите объем куба, вписанного в единичный додекаэдр.



**Решение:** Ребро куба равно  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Объем куба равен  $\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$ .

## Упражнение 29\*

Какой наибольший объем может иметь прямоугольный параллелепипед, сумма длин ребер которого, выходящих из одной вершины, равна 1?

**Решение.** Обозначим длины ребер, выходящих из одной вершины параллелепипеда  $a, b, c$ . Воспользуемся тем, что среднее геометрическое трех положительных чисел не превосходит их среднего арифметического, т.е.  $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$ .

Из этого неравенства следует, что наибольший объем равен  $\frac{1}{27}$  в случае, если параллелепипед – куб со стороной  $\frac{1}{3}$ .

**Ответ:**  $\frac{1}{27}$ .

## Упражнение 30\*

Какую наименьшую площадь поверхности может иметь прямоугольный параллелепипед, объем которого равен 1?

**Решение.** Обозначим длины ребер, выходящих из одной вершины параллелепипеда  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Площадь поверхности будет равна  $2ab + 2ac + 2bc$ . Воспользуемся тем, что среднее арифметическое трех положительных чисел больше или равно их среднего геометрического.

Имеем  $\frac{ab + ac + bc}{3} \geq \sqrt[3]{abacbc} = 1$ . Из этого неравенства

следует, что наименьшая площадь поверхности равна 6 в случае, если прямоугольный параллелепипед – куб со стороной 1.

**Ответ: 6.**