

ОБЪЕМ ФИГУР В ПРОСТРАНСТВЕ

Объем – величина, аналогичная площади и сопоставляющая фигурам в пространстве неотрицательные действительные числа.

Для объемов пространственных фигур справедливы свойства, аналогичные свойствам площадей плоских фигур, а именно:

1. Равные фигуры имеют равные объемы.

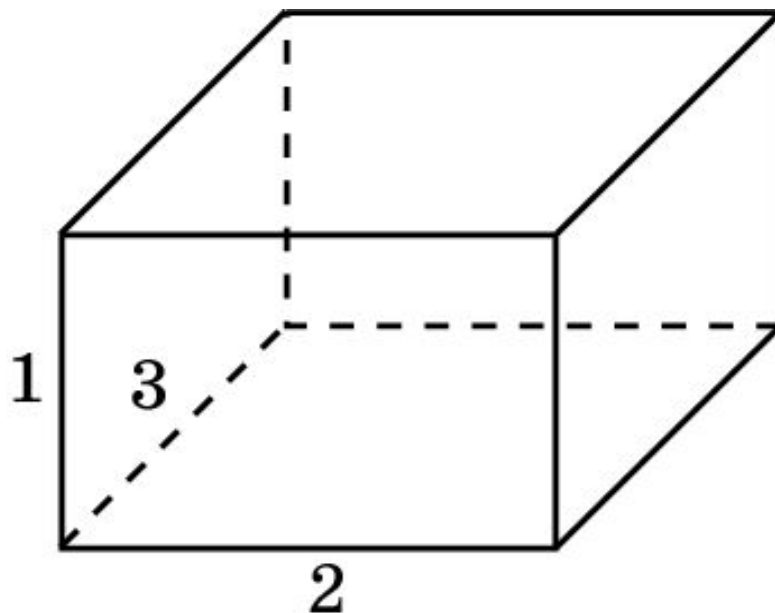
2. Если фигура Φ составлена из двух неперекрывающихся фигур Φ_1 и Φ_2 , то объем фигуры Φ равен сумме объемов фигур Φ_1 и Φ_2 , т.е. $V(\Phi) = V(\Phi_1) + V(\Phi_2)$.

3. Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений, т. е. имеет место формула $V = a \cdot b \cdot c$, где a, b, c – ребра параллелепипеда.

Две фигуры, имеющие равные объемы, называются **равновеликими**.

Упражнение 1

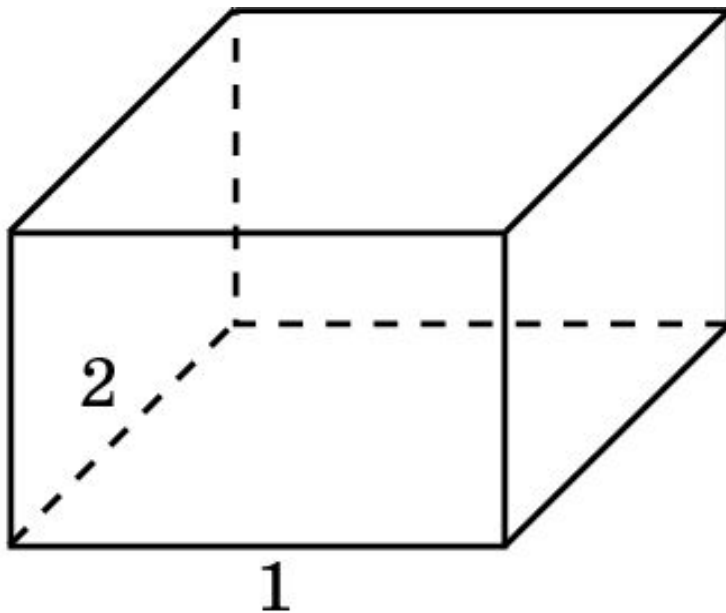
Ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2, 3. Найдите объем параллелепипеда.



Ответ: 6.

Упражнение 2

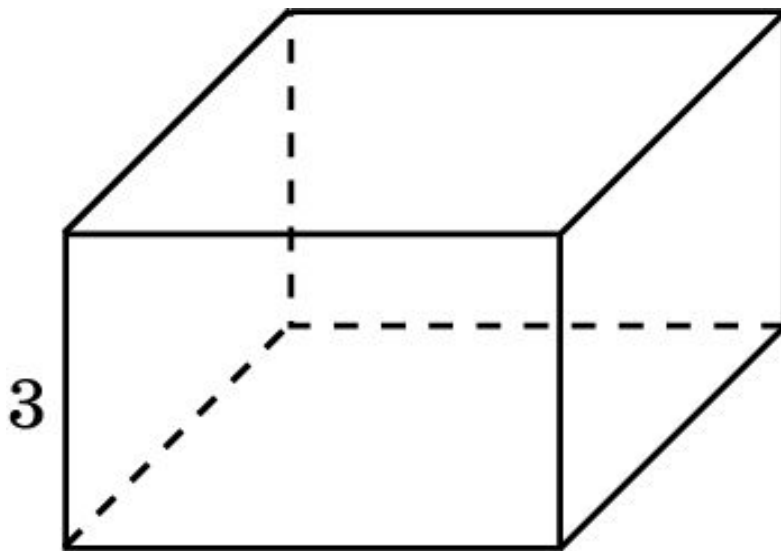
Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2. Объем параллелепипеда равен 3. Найдите третье ребро параллелепипеда, выходящее из той же вершины.



Ответ: $\frac{3}{2}$.

Упражнение 3

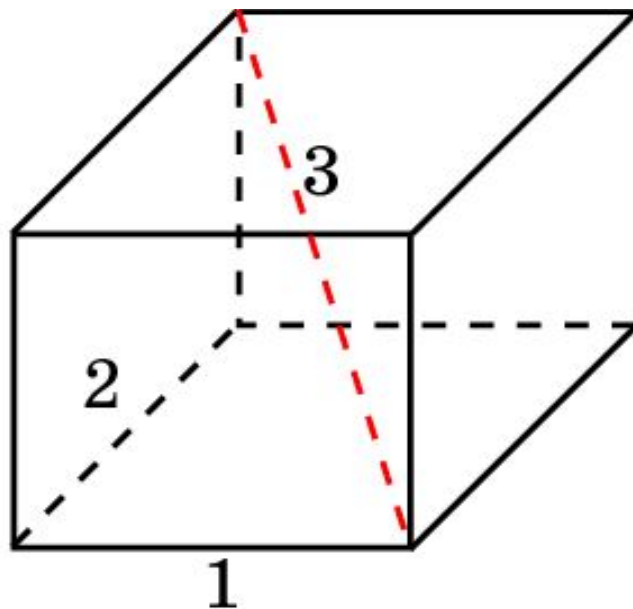
Площадь грани прямоугольного параллелепипеда равна 2.
Ребро, перпендикулярное этой грани, равно 3. Найдите объем параллелепипеда.



Ответ: 6.

Упражнение 4

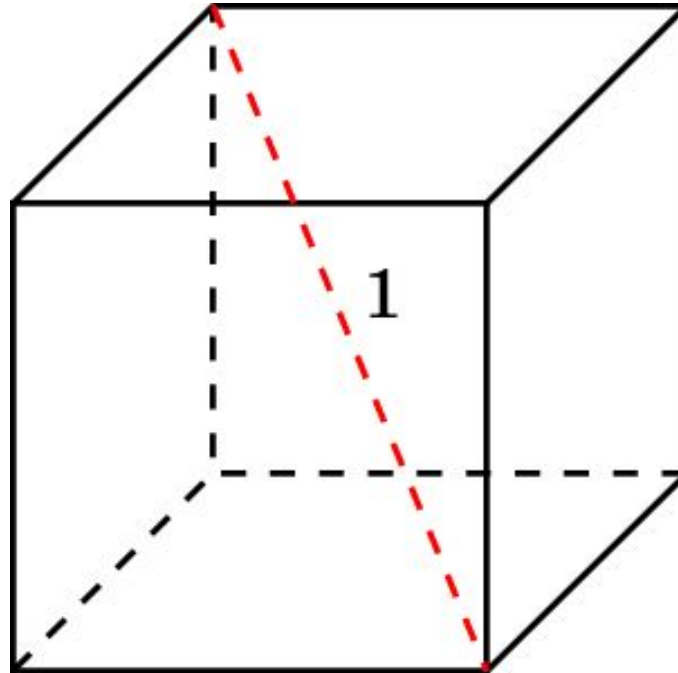
Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2. Диагональ параллелепипеда равна 3. Найдите объем параллелепипеда.



Ответ: 4.

Упражнение 5

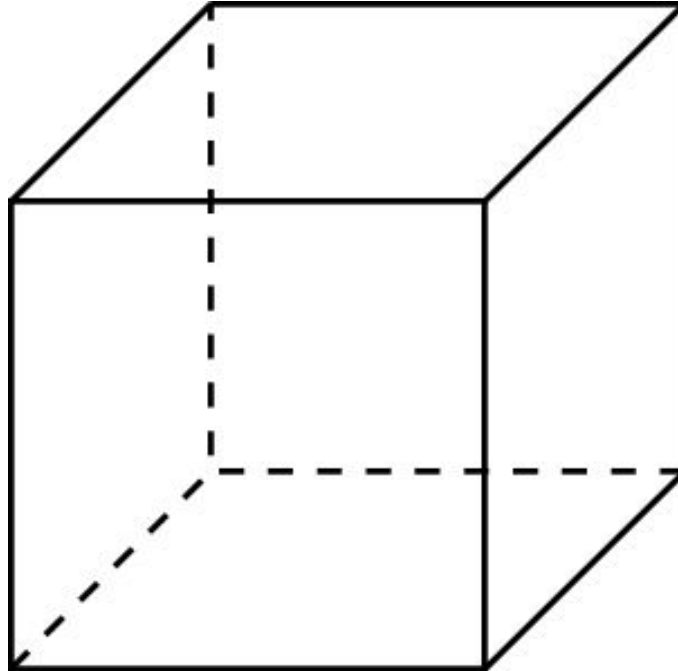
Диагональ куба равна 1. Найдите его объем.



Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{9}$.

Упражнение 6

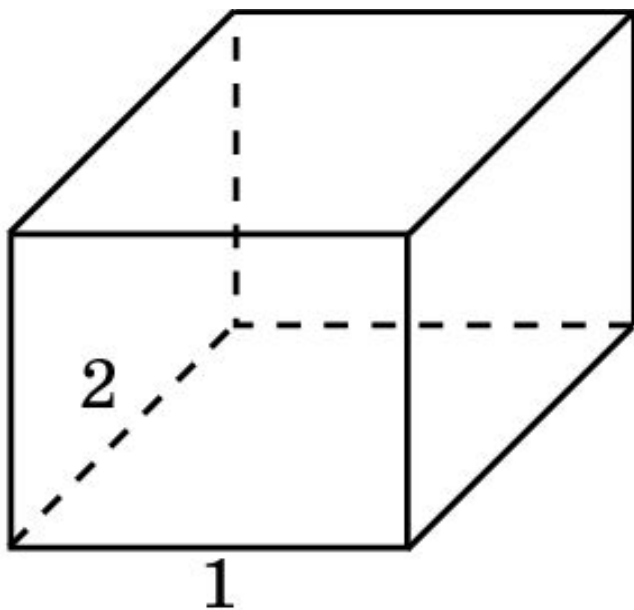
Площадь поверхности куба равна 1. Найдите его объем.



Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{36}$.

Упражнение 7

Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2. Площадь поверхности параллелепипеда равна 10. Найдите объем параллелепипеда.



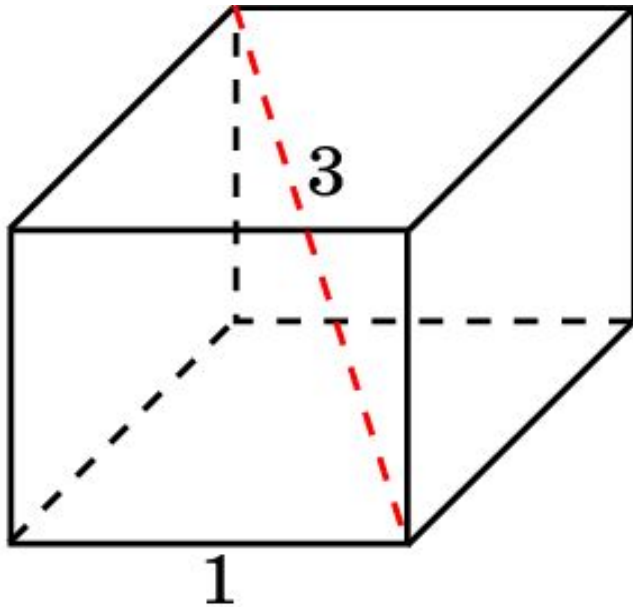
Решение. Пусть третье ребро параллелепипеда равно x . Тогда площадь поверхности будет равна $4 + 6x$. Следовательно, $x = 1$.

Объем параллелепипеда будет равен 2.

Ответ: 2.

Упражнение 8

Ребро прямоугольного параллелепипеда равно 1. Диагональ равна 3. Площадь поверхности параллелепипеда равна 16. Найдите объем параллелепипеда.



Решение. Пусть второе ребро параллелепипеда равно x . Тогда третье ребро будет равно $\sqrt{8 - x^2}$. Площадь поверхности будет равна

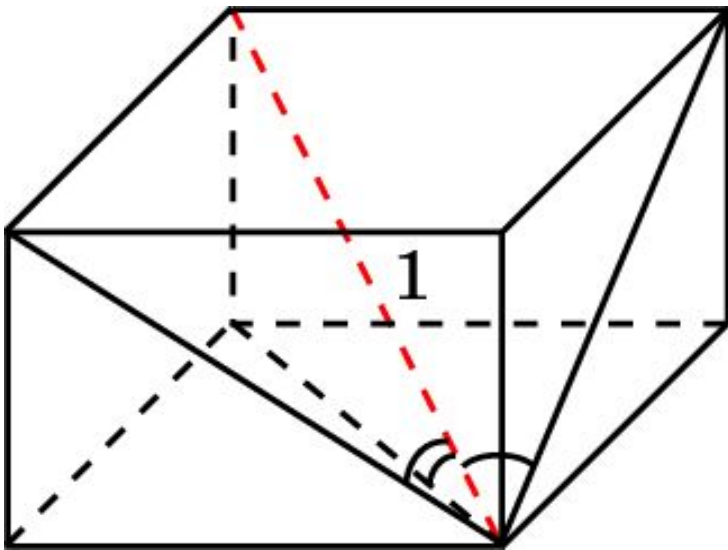
$$2x + 2\sqrt{8 - x^2} + 2x\sqrt{8 - x^2}.$$

Приравнивая это выражение к 16, получим $x = 2$. Третье ребро будет равно 2 и, следовательно, искомый объем равен 4.

Ответ: 4.

Упражнение 9

Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 1 и образует углы 30° , 30° и 45° с плоскостями граней параллелепипеда. Найдите объем параллелепипеда.

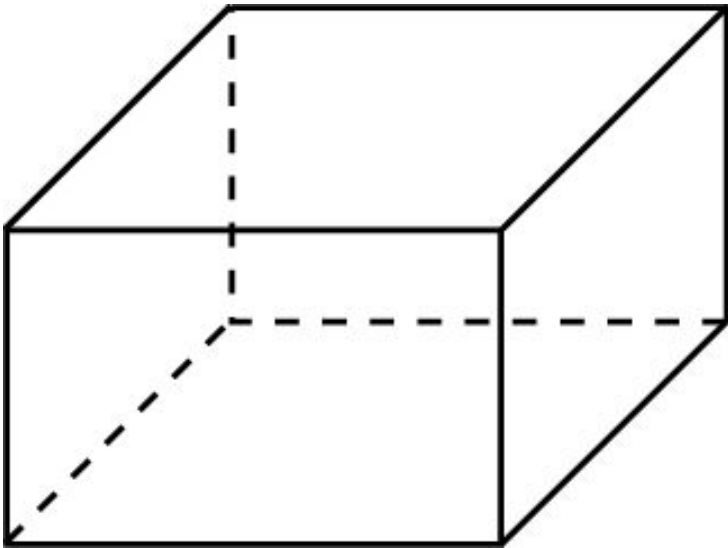


Решение. Ребра параллелепипеда равны $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, объем равен $\frac{\sqrt{2}}{8}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{8}$.

Упражнение 10

Площади трех граней параллелепипеда равны 1, 2, 3. Найдите объем параллелепипеда.



Решение. Пусть ребра параллелепипеда равны x , y , z . Тогда $xy = 1$, $xz = 2$, $yz = 3$. Решая эти уравнения, находим

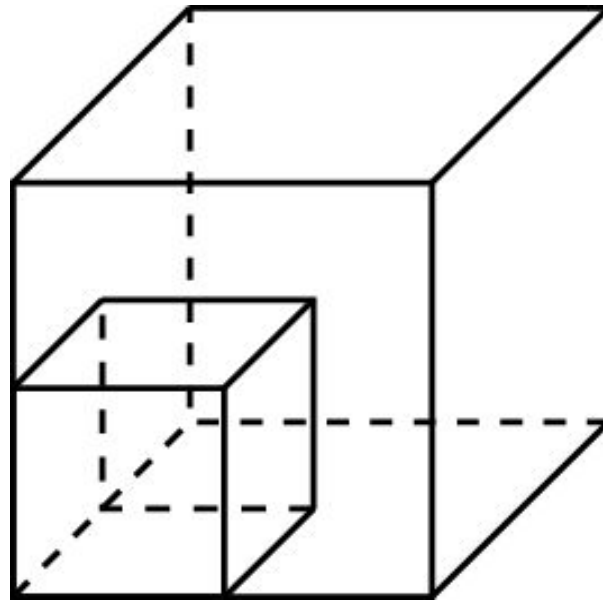
$$x = \frac{\sqrt{6}}{3}, y = \frac{\sqrt{6}}{2}, z = \sqrt{6}.$$

Объем параллелепипеда равен $\sqrt{6}$.

Ответ: $\sqrt{6}$.

Упражнение 11

Как относятся объемы двух кубов: данного и его модели, уменьшенной в масштабе: а) $1 : 2$; б) $1 : 3$; в) $1 : n$?



Ответ: а) $1 : 8$; б) $1 : 27$; в) $1 : n^3$.

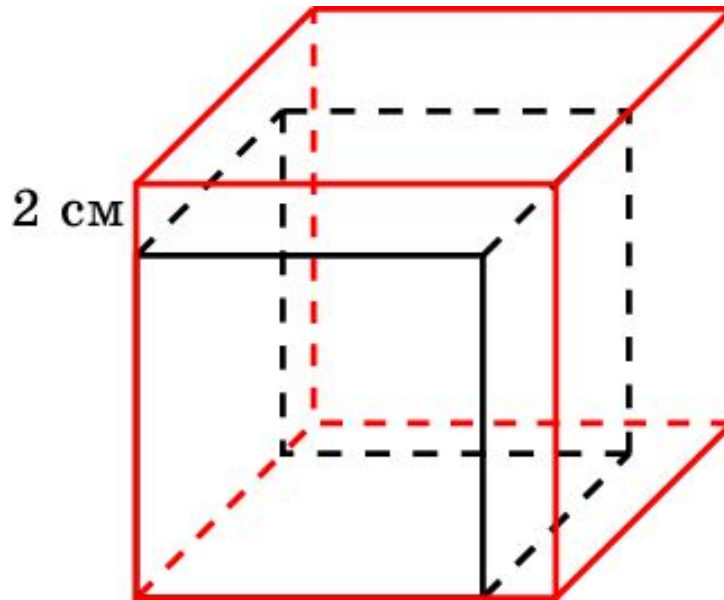
Упражнение 12

Как изменится объем прямого параллелепипеда, если: а) одно из его измерений увеличить в 2 раза, в 3 раза, в n раз; б) если два его измерения увеличить, причем каждое из них в 2, 3, n раз; в) если все три его измерения увеличить в 2, 3, n раз?

Ответ: а) Увеличится в 2 раза, в 3 раза, в n раз;
б) увеличится в 4 раза, в 9 раза, в n^2 раз;
в) увеличится в 8 раз, в 27 раз, в n^3 раз.

Упражнение 13

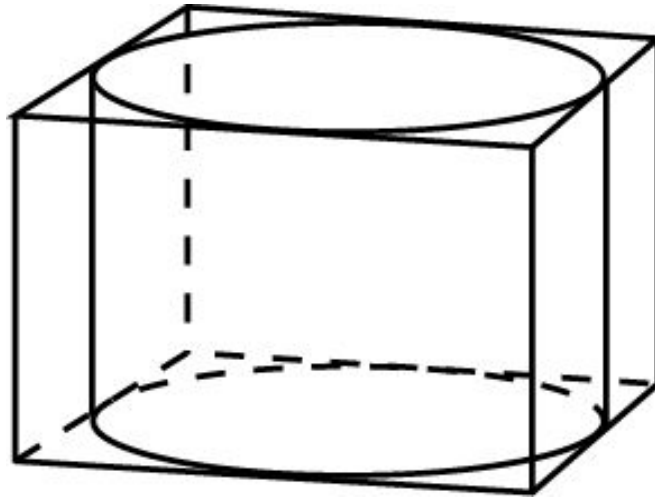
Если каждое ребро куба увеличить на 2 см, то его объем увеличится на 98 см^3 . Определите ребро куба.



Ответ: 3 см.

Упражнение 14

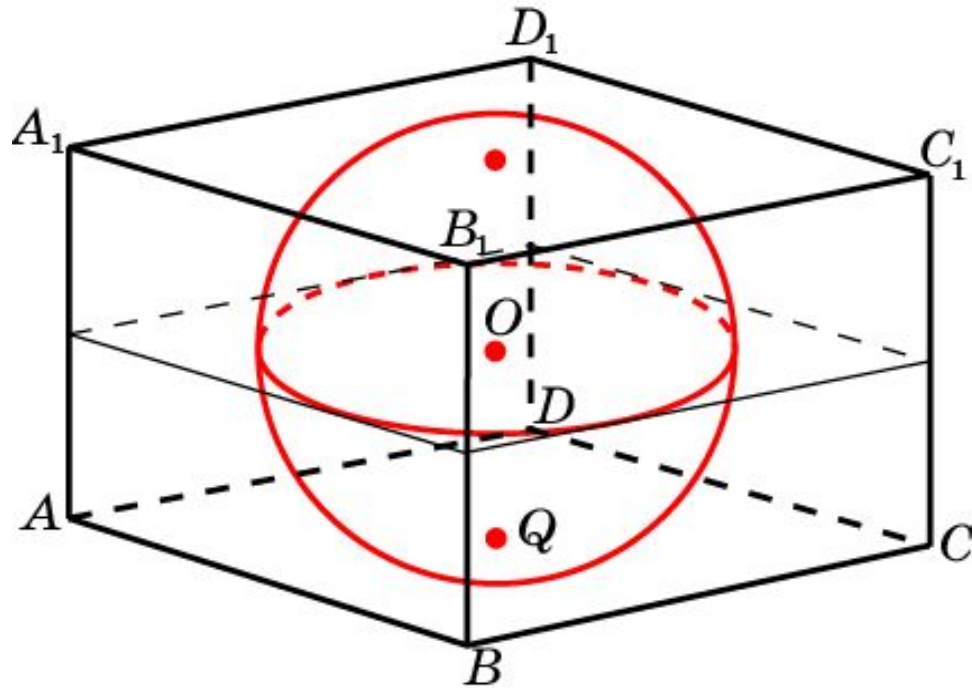
Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1. Найдите объем параллелепипеда.



Решение: Ребра параллелепипеда равны 2, 2 и 1. Его объем равен 4.

Упражнение 15

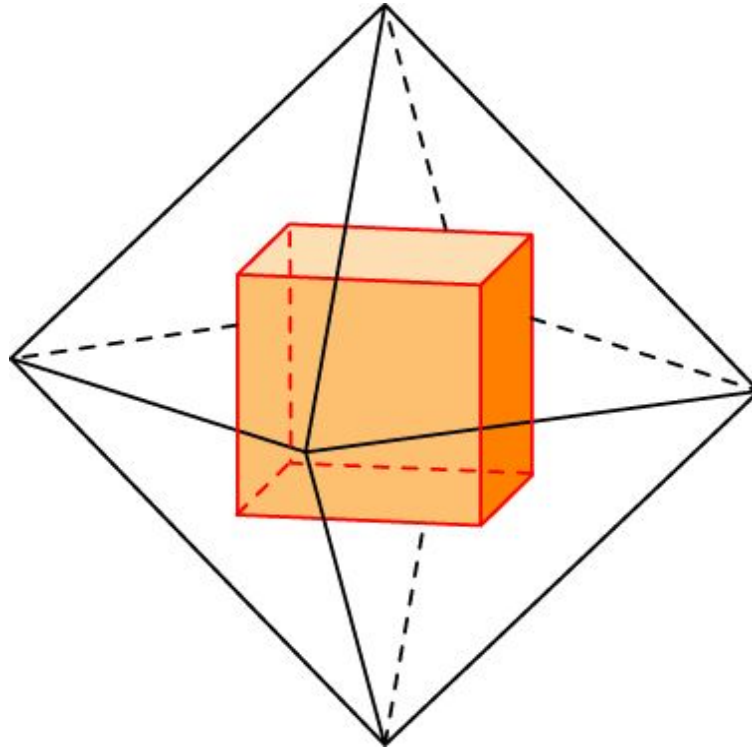
Параллелепипед описан около единичной сферы. Найдите его объем.



Решение: Ребра параллелепипеда равны 2. Его объем равен 8.

Упражнение 16

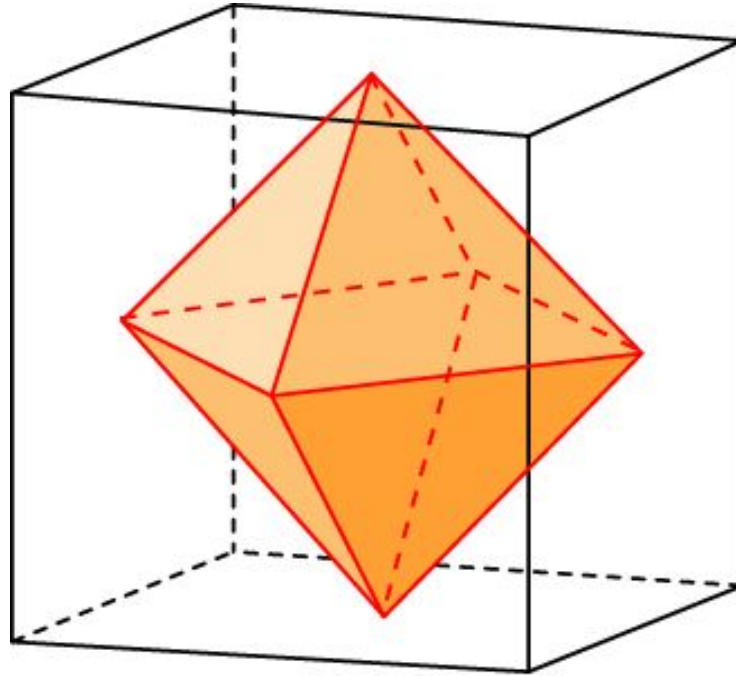
Найдите объем куба, вписанного в единичный октаэдр.



Решение: Ребро куба равно $\frac{\sqrt{2}}{3}$. Объем куба равен $\frac{2\sqrt{2}}{27}$.

Упражнение 17

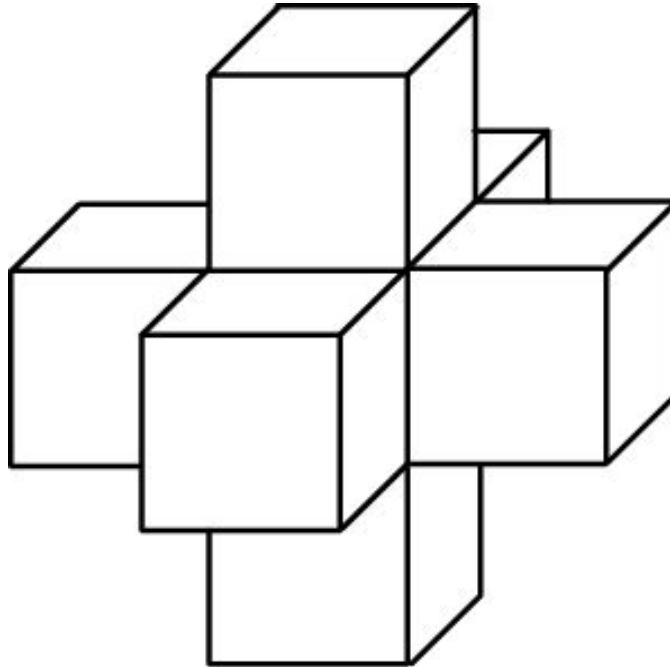
Найдите объем куба, описанного около единичного октаэдра.



Решение: Ребро куба равно $\sqrt{2}$. Объем куба равен $2\sqrt{2}$.

Упражнение 18

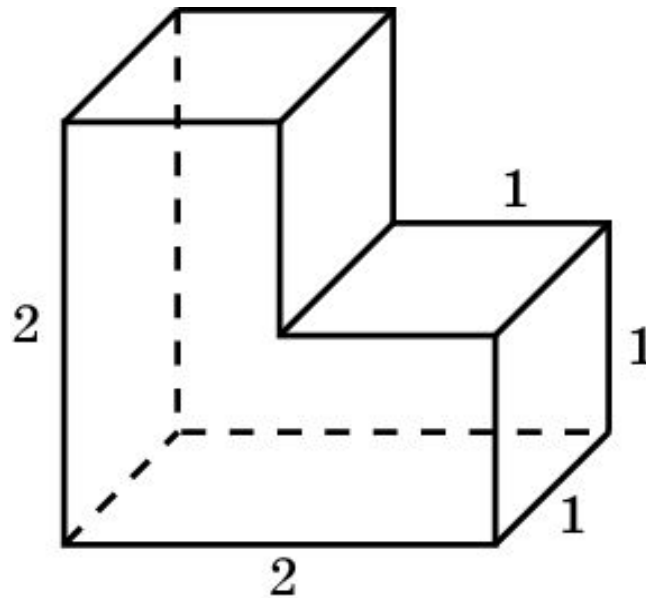
Чему равен объем пространственного креста, если ребра образующих его кубов равны единице?



Ответ: 7.

Упражнение 19

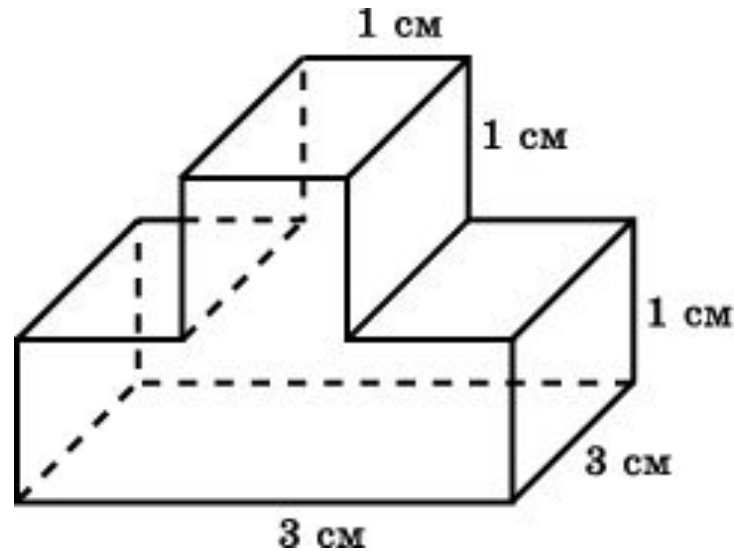
Чему равен объем фигуры, изображенной на рисунке?



Ответ: 3.

Упражнение 20

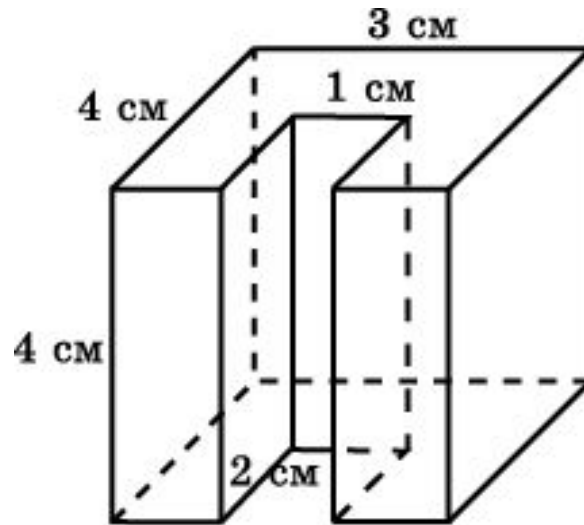
Найдите объем детали, изображенной на рисунке (все углы – прямые).



Ответ: 12 см^3 .

Упражнение 21

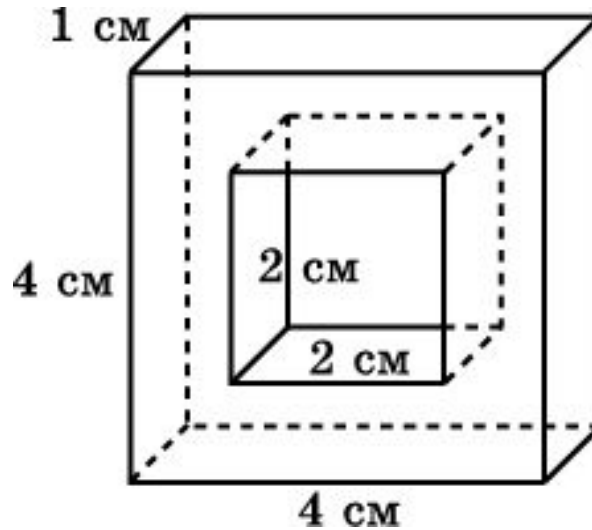
Найдите объем детали, изображенной на рисунке (все углы – прямые).



Ответ: 40 см^3 .

Упражнение 22

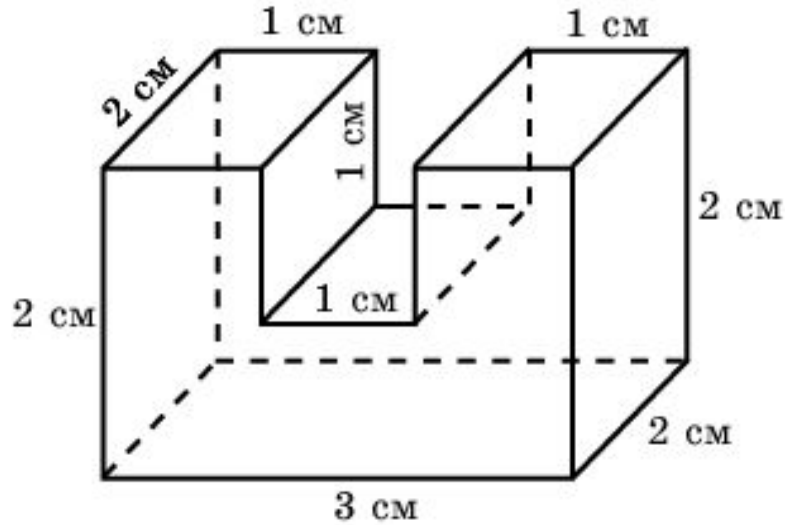
Найдите объем детали, изображенной на рисунке (все углы – прямые).



Ответ: 12 см^3 .

Упражнение 23

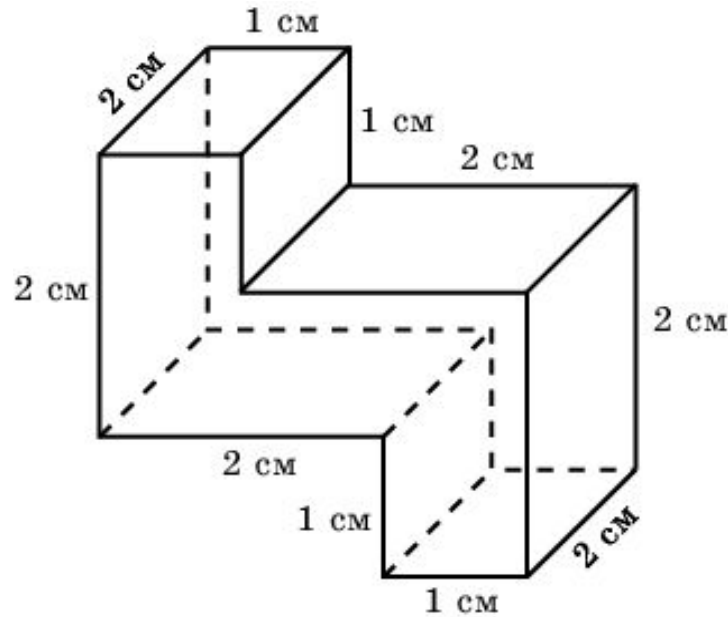
Найдите объем детали, изображенной на рисунке (все углы – прямые).



Ответ: 10 см^3 .

Упражнение 24

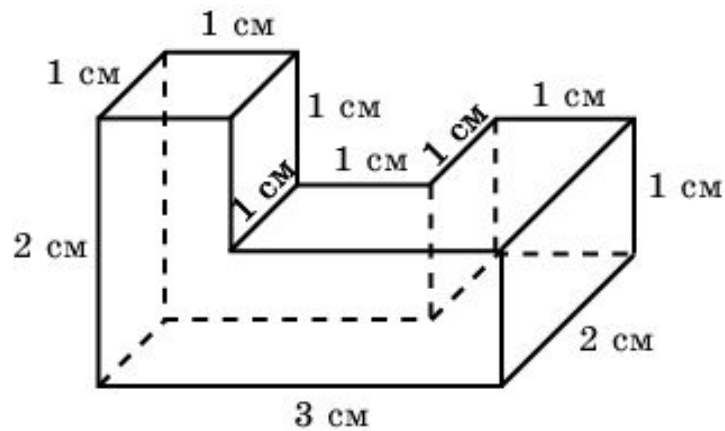
Найдите объем детали, изображенной на рисунке (все углы – прямые).



Ответ: 10 см^3 .

Упражнение 25

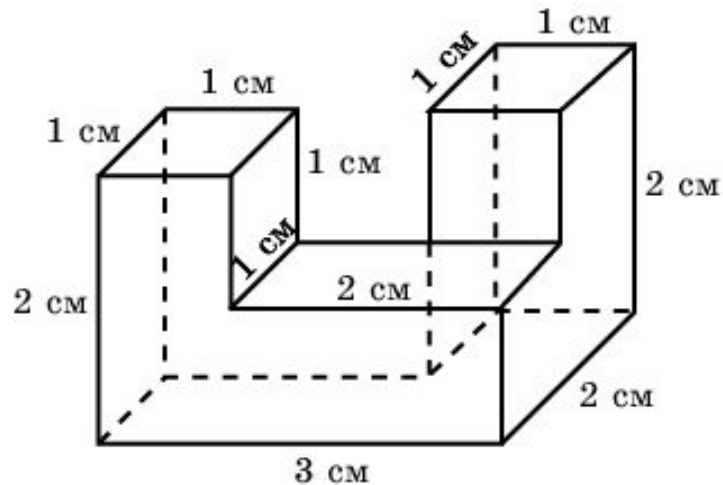
Найдите объем детали, изображенной на рисунке (все углы – прямые).



Ответ: 5 см^3 .

Упражнение 26

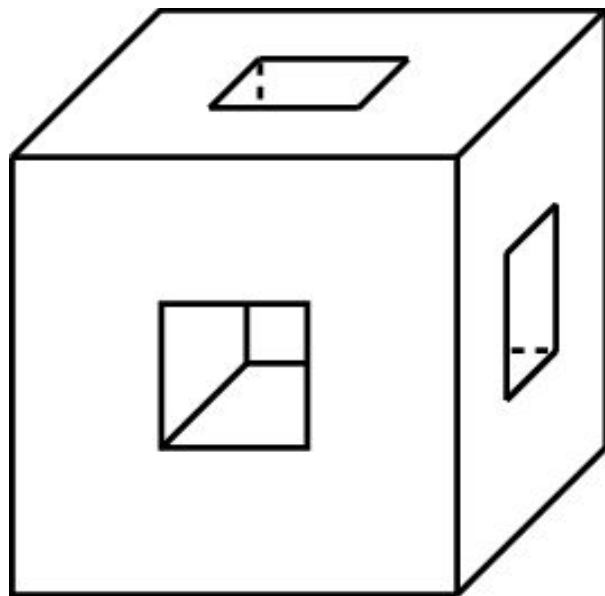
Найдите объем детали, изображенной на рисунке (все углы – прямые).



Ответ: 6 см^3 .

Упражнение 27

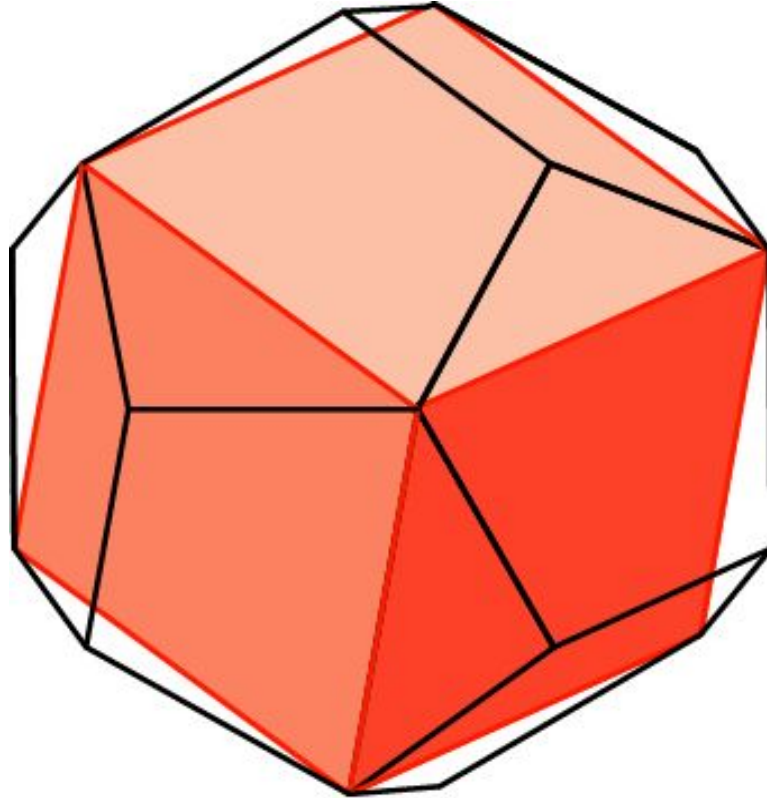
Дан куб с ребром 3 см. В каждой грани проделано сквозное квадратное отверстие со стороной 1 см. Найдите объем оставшейся части.



Ответ: 20 см^3 .

Упражнение 28

Найдите объем куба, вписанного в единичный додекаэдр.



Решение: Ребро куба равно $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Объем куба равен $\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$.

Упражнение 29*

Какой наибольший объем может иметь прямоугольный параллелепипед, сумма длин ребер которого, выходящих из одной вершины, равна 1?

Решение. Обозначим длины ребер, выходящих из одной вершины параллелепипеда a, b, c . Воспользуемся тем, что среднее геометрическое трех положительных чисел не превосходит их среднего арифметического, т.е. $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$.

Из этого неравенства следует, что наибольший объем равен $\frac{1}{27}$ в случае, если параллелепипед – куб со стороной $\frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{27}$.

Упражнение 30*

Какую наименьшую площадь поверхности может иметь прямоугольный параллелепипед, объем которого равен 1?

Решение. Обозначим длины ребер, выходящих из одной вершины параллелепипеда a , b , c . Площадь поверхности будет равна $2ab + 2ac + 2bc$. Воспользуемся тем, что среднее арифметическое трех положительных чисел больше или равно их среднего геометрического.

Имеем $\frac{ab + ac + bc}{3} \geq \sqrt[3]{abacbc} = 1$. Из этого неравенства

следует, что наименьшая площадь поверхности равна 6 в случае, если прямоугольный параллелепипед – куб со стороной 1.

Ответ: 6.