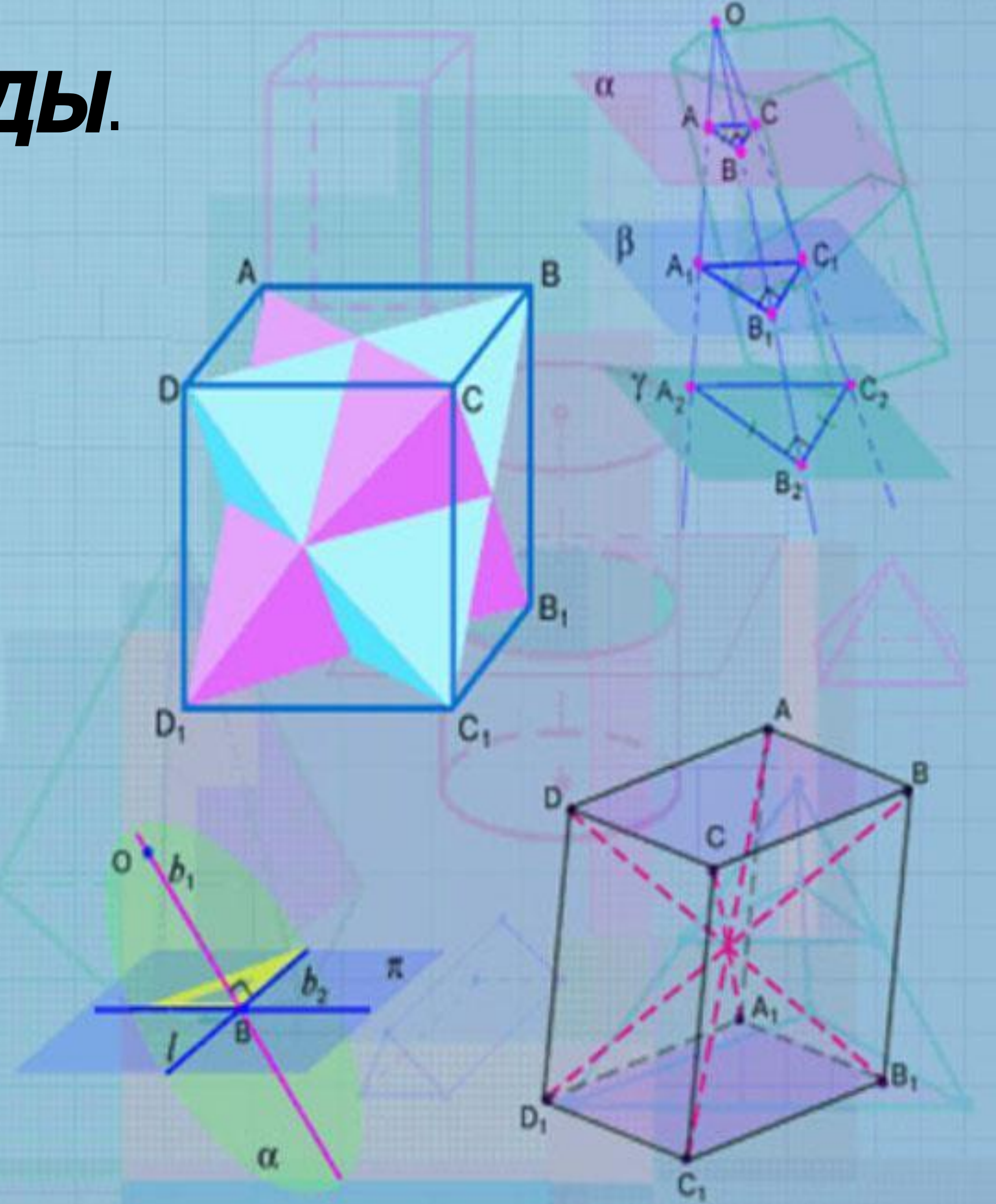
Объём пирамиды.

$$V_{\text{ïèðàìèäû}} = \frac{1}{3} S_{\text{îñí.}} \cdot H$$



Геометрия,
11 класс.

Воробьев Леонид Альбертович, г.Минск

Рассмотрим произвольную треугольную пирамиду SABC с высотой SO=*H*.

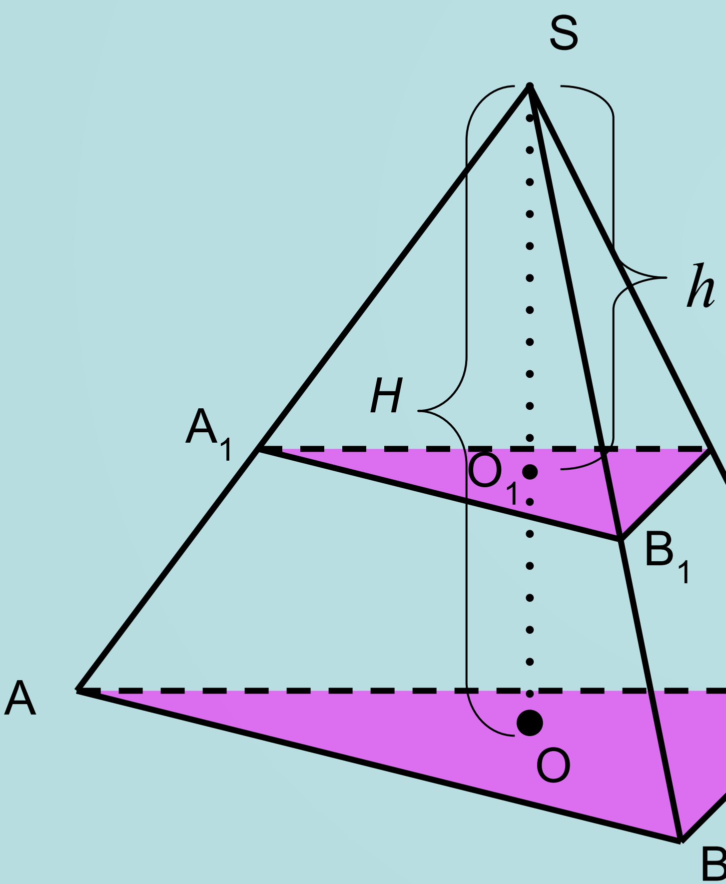
Построим сечение пирамиды, параллельное плоскости основания и находящееся на расстоянии h от её вершины.

Т.к. ΔABC□□$A_1B_1C_1$, то по свойству площадей подобных фигур :

$$\frac{S_{\text{î ńí .}}}{S_{\text{ńĺ÷.}}}=\frac{H^2}{h^2}$$

$$\Downarrow$$

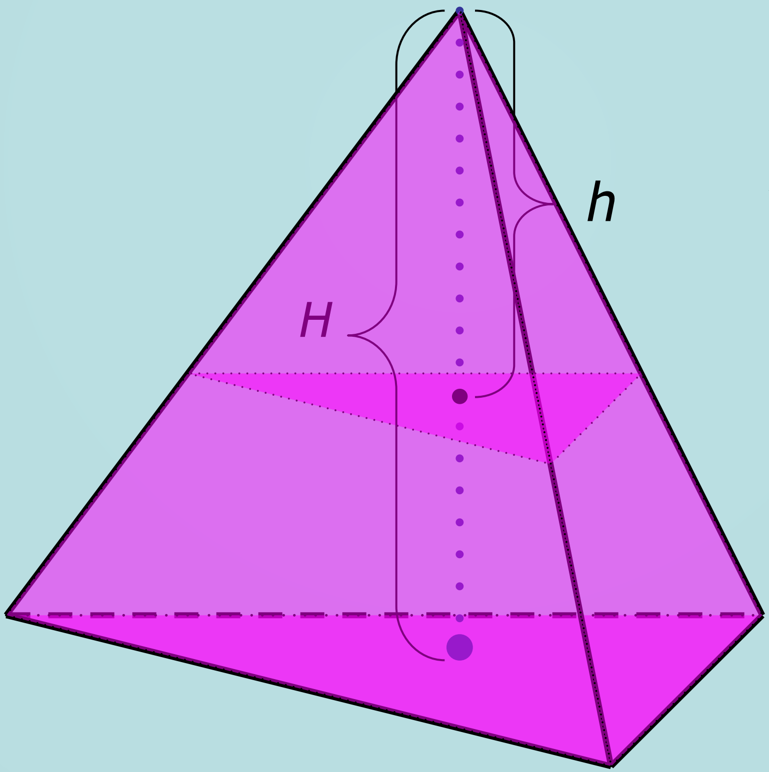
$$S_{\text{ńĺ÷.}}=\frac{S_{\text{î ńí .}}\cdot h^2}{H^2}$$



$h \in [0;\ H\ ]$

Т.к. *h* – изменяющаяся величина, то площадь сечения можно рассматривать как функцию от переменной *h*, *где h* – расстояние от вершины пирамиды до плоскости основания.

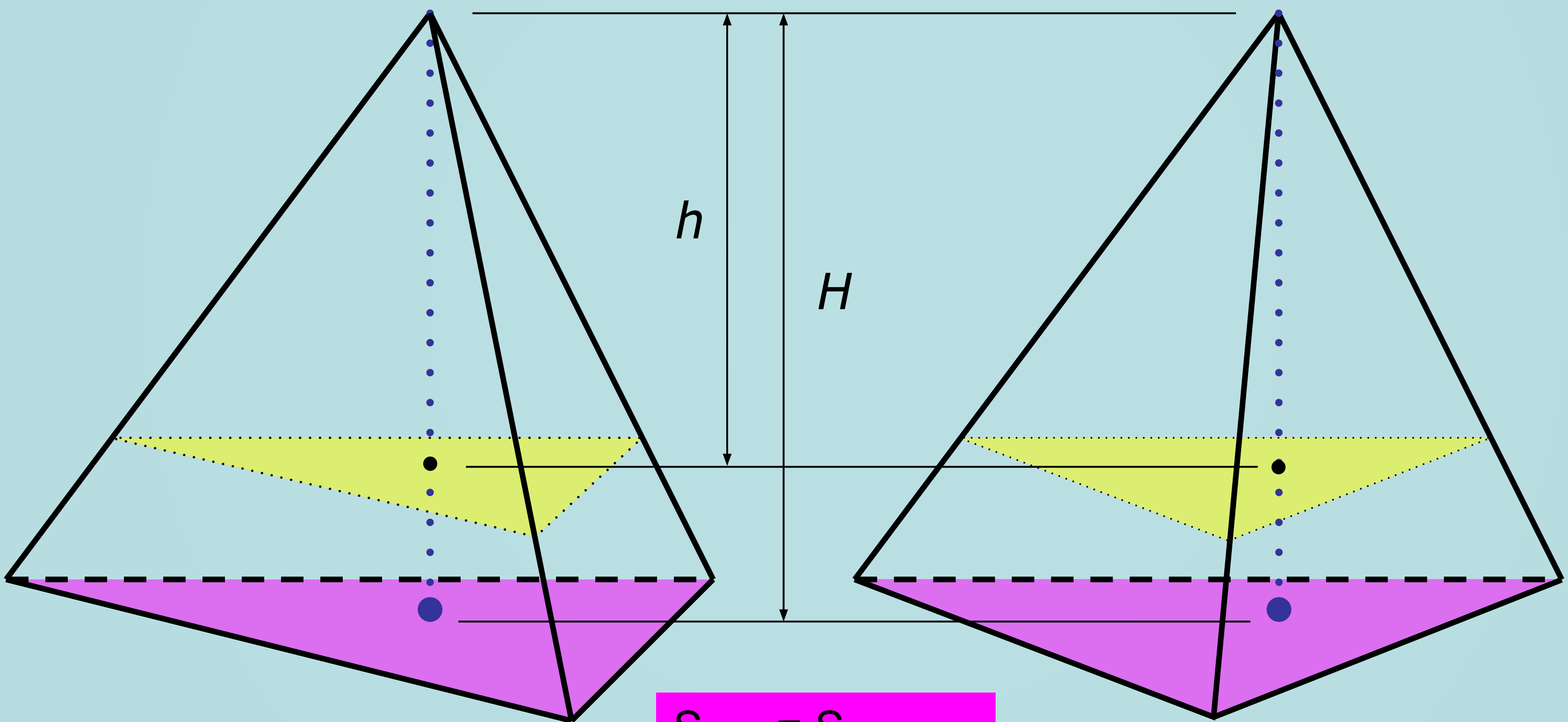
Используя понятие бесконечной интегральной суммы, объем данной пирамиды можно получить как бесконечную сумму площадей таких сечений, построенных вдоль высоты.



$h \in [0; H]$

На основании предыдущих рассуждений можно сделать вывод о том, что пирамиды с равными площадями оснований и равными высотами, имеют равные объемы.

$$V_1 = V_2$$



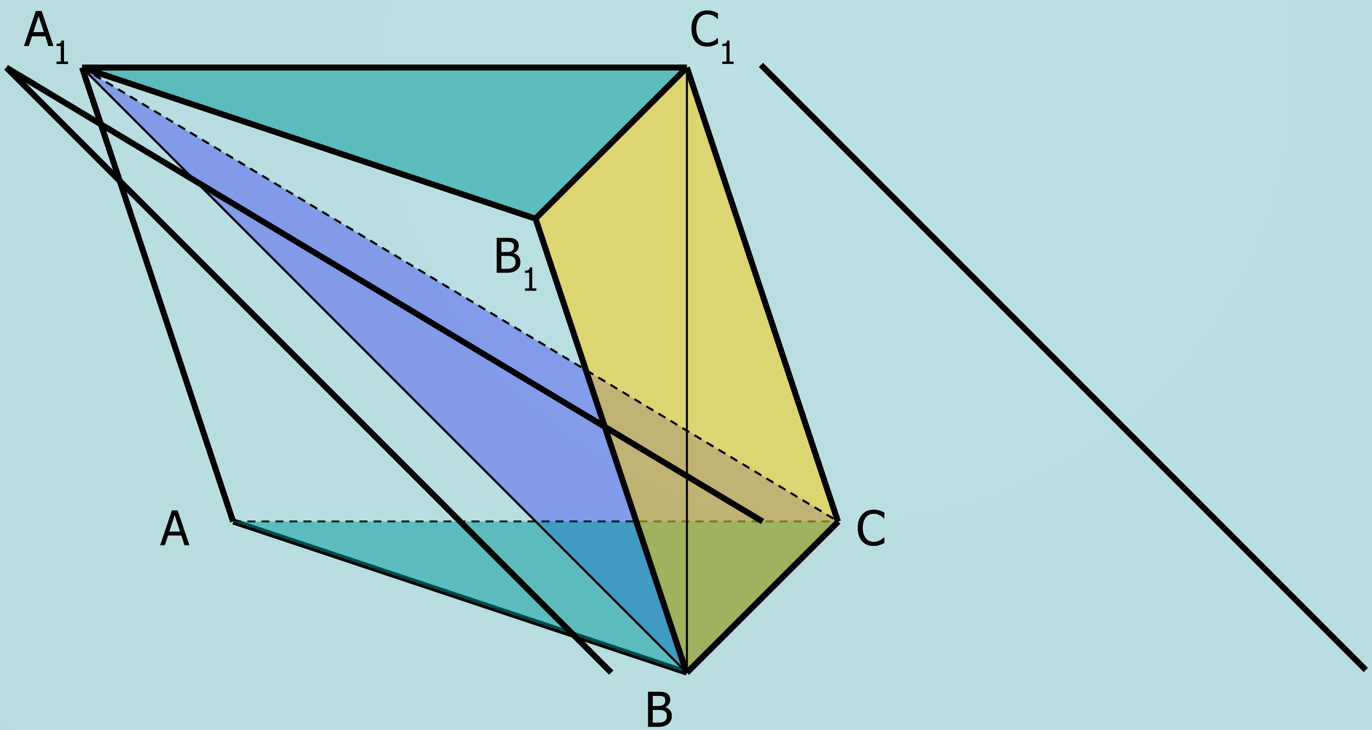
$S_{осн.1} = S_{осн.2}$

$S_{сеч.1} = S_{сеч.2}$

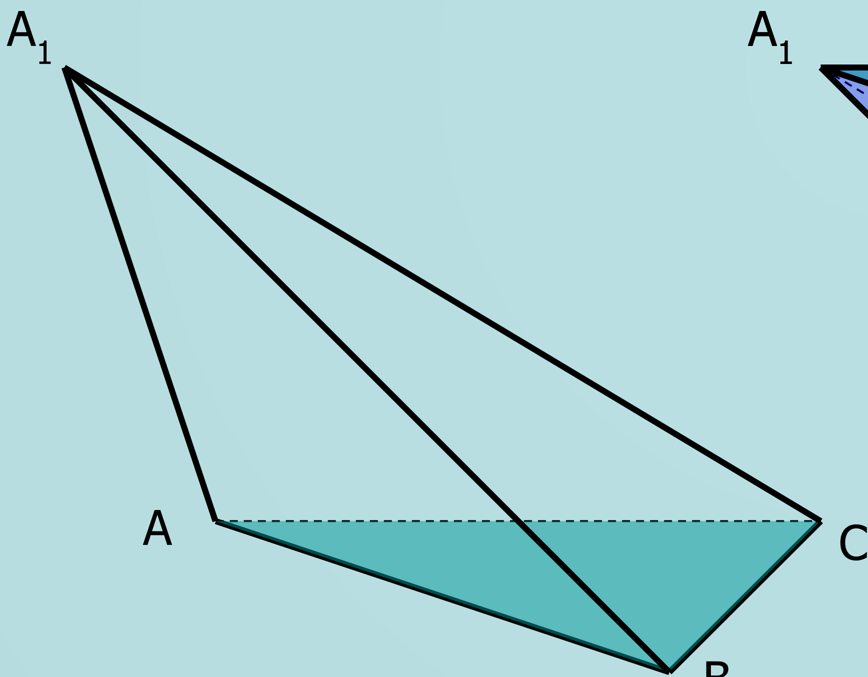
Рассмотрим произвольную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$.

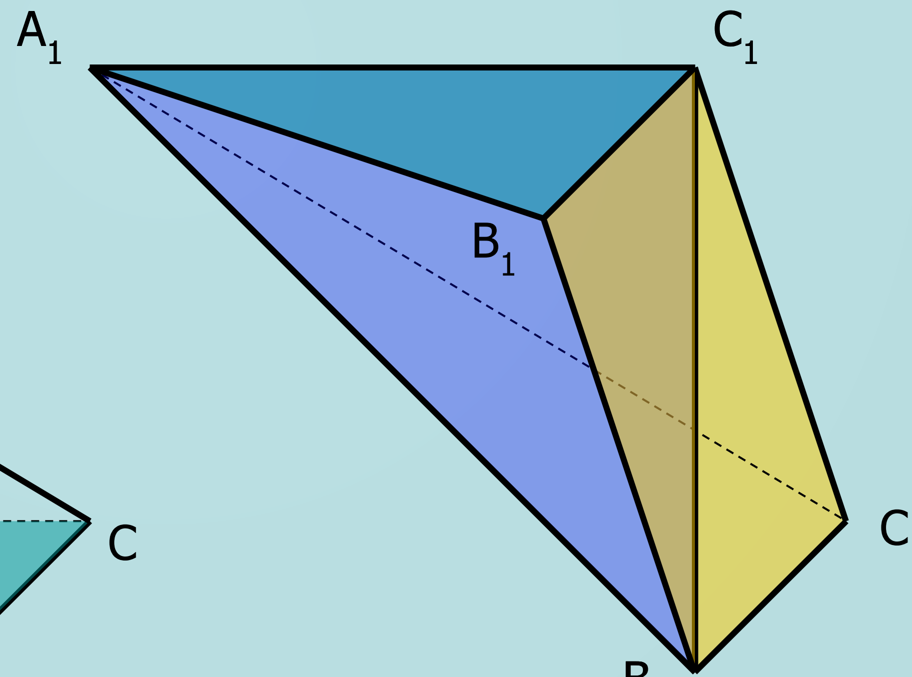
1) Разобьем её на две части секущей плоскостью (A_1BC).

2) Получились две пространственные фигуры: треугольная пирамида A_1ABC и четырехугольная пирамида $A_1BCC_1B_1$ (обе пирамиды с вершиной A_1).



Теперь разобьём четырёхугольную пирамиду $A_1BCC_1B_1$ секущей плоскостью (A_1C_1B) на две треугольные пирамиды: $A_1BB_1C_1$ и A_1BCC_1 (обе пирамиды с вершиной A_1).

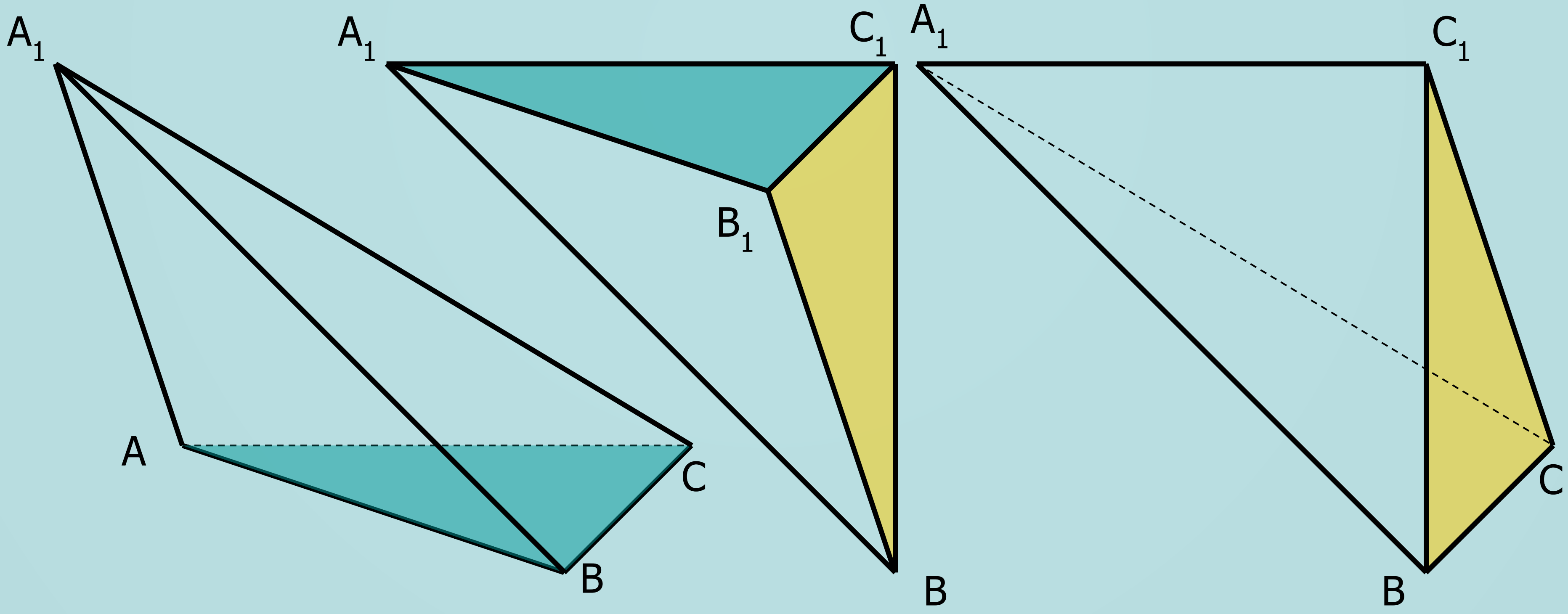




У треугольных пирамид A_1ABC и $BA_1B_1C_1$ основания равны (как противоположные основания призмы) и их высотами является высота призмы. Значит, их объемы также равны.

У треугольных пирамид $A_1BB_1C_1$ и A_1BCC_1 основания равны (объясните самостоятельно) и у них общая высота, проведенная из вершины A_1. Значит, их объемы также равны.

$$V_{A_1ABC} = V_{BA_1B_1C_1} \qquad V_{A_1BB_1C_1} = V_{A_1BCC_1}$$

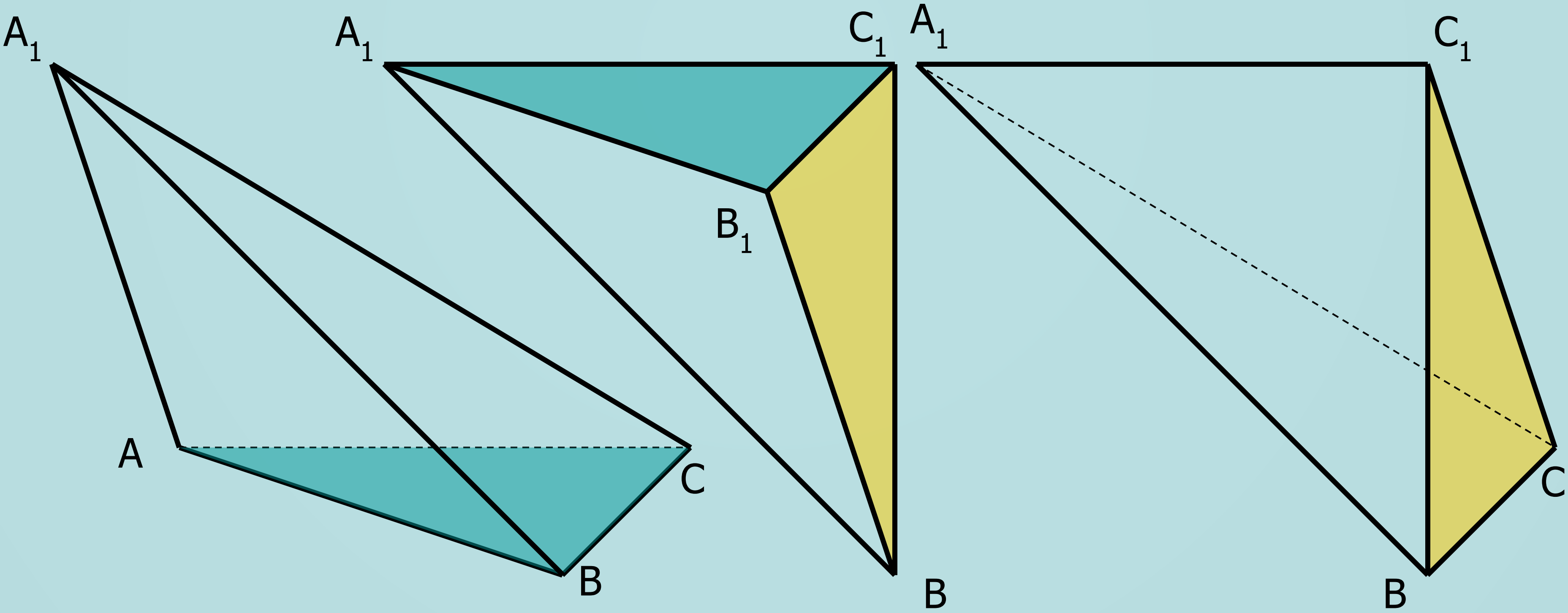


Тогда, по свойству транзитивности, объемы всех трех пирамид равны:

$$V_{A_1ABC} = V_{BA_1B_1C_1} = V_{A_1BCC_1}$$

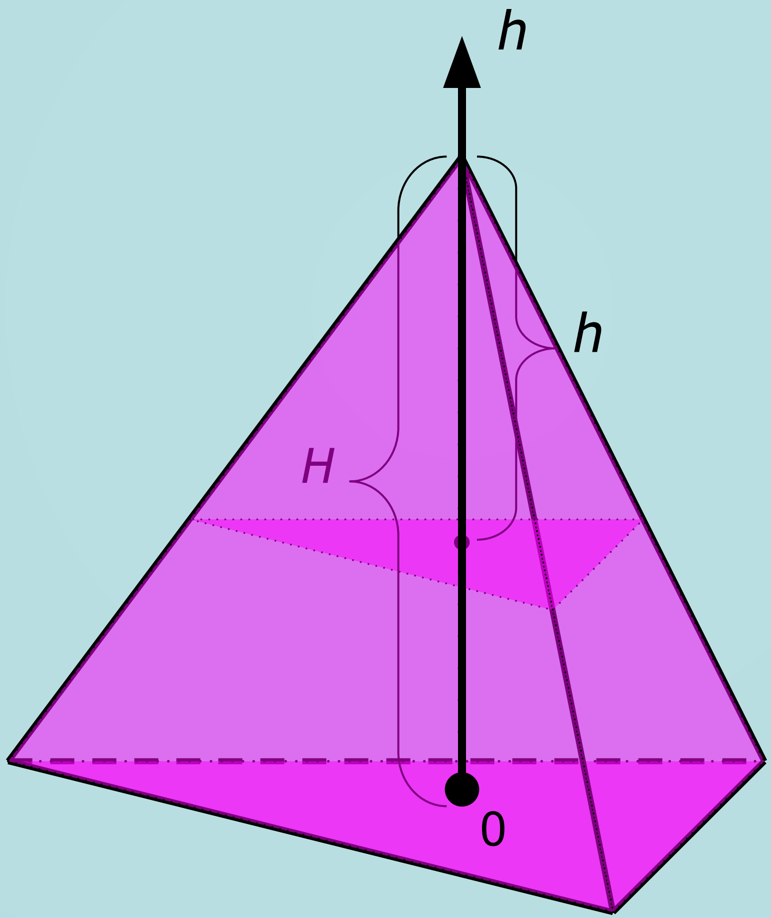
Значит, объем пирамиды в три раза меньше объема призмы с такими же основанием и высотой, т.е.

$$V = \frac{1}{3} S_{\hat{\imath}\,\acute{n}\acute{\imath}\,.} \cdot H$$



Эту же формулу можно было получить непосредственным интегрированием площади сечения, как функции, зависящей от расстояния h:

$$V=\int_0^H S_{\text{сеч.}}\,dh=\int_0^H \frac{S_{\text{осн.}}\cdot h^2}{H^2}\,dh=\frac{S_{\text{осн.}}}{H^2}\int_0^H h^2\,dh=\frac{S_{\text{осн.}}}{H^2}\frac{h^3}{3}\Bigg|_0^H=\boxed{\frac{1}{3}S_{\text{осн.}}\cdot H}$$

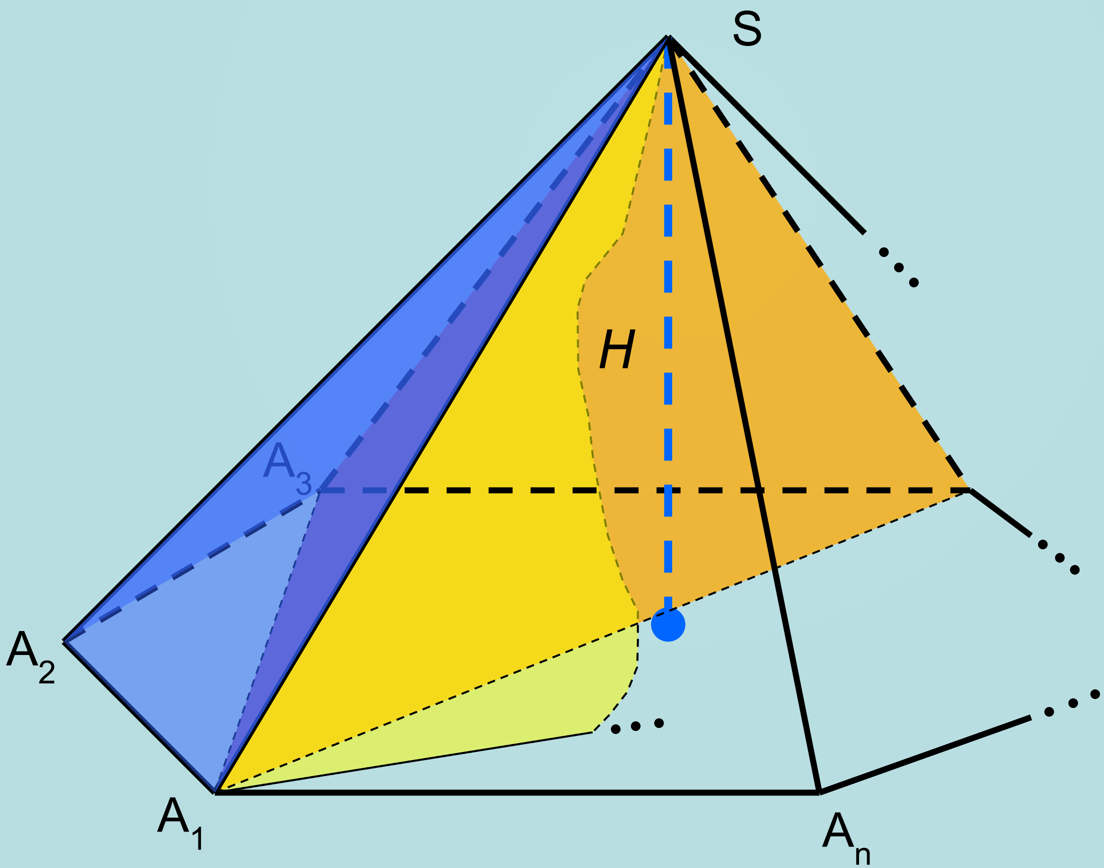


$h\in[0;\ H]$

Рассматривая произвольную n-угольную пирамиду $SA_1A_2\ldots A_n$ как сумму треугольных пирамид с общей вершиной и высотой, получим формулу для нахождения объема любой пирамиды:

$$V_{dčďrěčäú}=V_{SA_1A_2A_3}+V_{SA_1A_3A_4}+\ldots+V_{SA_1A_{n-1}A_n}=\frac{1}{3}S_{\Delta A_1A_2A_3}\cdot H+\frac{1}{3}S_{\Delta A_1A_3A_4}\cdot H+\ldots+\frac{1}{3}S_{\Delta A_1A_{n-1}A_n}\cdot H=$$

$$=\frac{1}{3}H\cdot\left(S_{\Delta A_1A_2A_3}+S_{\Delta A_1A_3A_4}+\ldots+S_{\Delta A_1A_{n-1}A_n}\right)=\frac{1}{3}S_{A_1A_2\ldots A_n}\cdot H=\boxed{\frac{1}{3}S\cdot H}$$



Итак, для любой n-угольной пирамиды:

$$V_{\text{ďčđŕěčäű}} = \frac{1}{3} S_{\text{îńí.}} \cdot H$$

,где $S_{\text{осн.}}$ – площадь основания пирамиды, H – высота пирамиды.