Современные проблемы прикладной математики и информатики

Лекция. Примеры решения математических задач при помощи MathCad

Обзор экономико-математических методов.

Экономико-математические методы.

- **Системный анализ -** *позволяет рассматривать любую рыночную ситуацию как некий объект для изучения с большим диапазоном внутренних и внешних причинно-следственных связей.*
- **Программно-целевое планирование –** *широко используется при выработке и реализации стратегии и тактики маркетинга.*
- **Методы теории массового обслуживания -***применяются при решении проблем выбора очередности обслуживания заказчиков, составления графиков поставок товаров и др. аналогичных задач. Они дают возможность, во-первых, изучить складывающиеся закономерности, связанные с наличием потока заявок на обслуживание и, во-вторых, соблюсти необходимую очередность их выполнения.*

Обзор экономико-математических методов.

- **Линейное программирование (ЗЛП)** – *математический метод для выбора альтернативных решений наиболее благоприятного (с минимальными расходами, максимальной прибылью, наименьшими затратами времени или усилий) применяется при решении ряда проблем маркетинга.*

Например, разработка более выгодного ассортимента при ограниченных ресурсах, расчет ***оптимальной*** величины товарных запасов, планирование маршрутов движения сбытовых агентов.

Обзор экономико-математических методов.

Обзор экономико-математических методов.

- **Теория связи**
- **Методы теории вероятностей**
- **Метод сетевого планирования**
- **Метод деловых игр –** *метод помогает разрешению реальных маркетинговых ситуаций. Упрощенные модели поведения конкурентов, стратегии выхода на новые рынки могут проигрываться для нахождения оптимальных решений*

Обзор экономико-математических методов.

- Метод функционально-стоимостного анализа – *Используется для комплексного решения задач, связанных с повышением качества продукции и одновременной экономии материальных и трудовых затрат.*
- Эконометрические модели – *эти модели дают возможность с учетом действующих факторов внешней и внутренней среды оценить, например, перспективы развития емкости рынка, определить наиболее рациональные стратегии маркетинга и возможные шаги конкурентов, оценить оптимальные затраты на маркетинг для получения необходимого размера прибыли.*
- Методы экспертных оценок – *методы позволяют достаточно быстро получить ответ о возможных процессах развития того или иного события на рынке, выявить сильные и слабые стороны предприятия.*

Системы линейных уравнений

Одной из центральных проблем вычислительной линейной алгебры является решение систем линейных уравнений, а также различные матричные разложения.

Задачу систем алгебраических уравнений (СЛАУ), т.е. систем N уравнений вида

$$a_{i1} * x_1 + a_{i2} * x_2 + \ldots + a_{in} = b_i$$

Можно записать в эквивалентной матричной форме:

$$\mathbf{A * x = b,}$$

*где A – матрица коэффициентов СЛАУ размерности N*N, x- вектор неизвестных; b – вектор правых частей уравнений.*

СЛАУ имеет единственное решение, если матрица является ***невырожденной (несингулярной),*** т.е. ее определитель не равен нулю.

Векторные и матричные функции MathCad

Имя функции	Описание
Rows(A)	Возвращает число строк в массиве A (⊗)
cols(A)	Возвращает число столбцов в массиве A (⊗)
length(v)	Возвращает число элементов в векторе v (⊗)
last(v)	Возвращает индекс последнего элемента в векторе v (⊗)
max(A)	Возвращает наибольший элемент .в массиве A
min(A)	Возвращает наименьший элемент в массиве A
lsolve(M,v)	Возвращает вектор решения x (Mx=v)

Самый простой способ решения почти всякой несингулярной системы – использование алгоритма Гаусса, реализованного встроенной функцией *lsolve*.

Системы линейных уравнений

Для решения СЛАУ необходимо выписать коэффициенты при неизвестных в виде матрицы. Введите матрицу (3*3) коэффициентов и матрицу свободных членов (3*1):

$$m := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \quad v := \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Затем вычислим обратную матрицу $\boxed{x^{-1}}$

$$(m)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.292 & 0.25 & -0.083 \\ 0.167 & 0 & -0.333 \\ 0.187 & -0.125 & -0.125 \end{pmatrix} \quad m^{-1} \cdot v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Затем вычислим обратную матрицу и произведение обратной матрицы m-1 на v

Результат – решение СЛАУ.

Линейная регрессия

В различных аспектах человеческой деятельности, явлениях природы мы сталкиваемся с динамическим временными рядами (например, количество произведенного мяса, молока, динамика заболеваемости и т.д.).

Например, в таблице 1 приведена динамика урожайности картофеля с 1 га в некотором хозяйстве.

Векторные и матричные функции MathCad

Имя функции	Описание
Rows(A)	Возвращает число строк в массиве А (⊗)
cols(A)	Возвращает число столбцов в массиве А (⊗)
length(v)	Возвращает число элементов в векторе v (⊗)
last(v)	Возвращает индекс последнего элемента в векторе v (⊗)
max(A)	Возвращает наибольший элемент .в массиве А
min(A)	Возвращает наименьший элемент в массиве А
lsolve(M,v)	Возвращает вектор решения x (Mx=v)

Линейная регрессия

Основным объектом исследования будет выборка экспериментальных данных, которые чаще всего, представляются в виде массива, состоящего из пар чисел (x_i, y_i).

В связи с этим возникает задача аппроксимации дискретной зависимости непрерывной функцией. Функция в зависимости от специфики задачи, может отвечать различным требованиям:

- ***F(x)*** должна проходить через точки ***(x_i,y_i)***, т.е. В этом случае говорят об ***интерполяции*** данных функцией ***F(x)*** во внутренних точках между x_i или ***экстраполяции*** за пределами интервала, содержащими все ***x_i***
- ***F(x)*** должна некоторым образом приближать точки ***y(x_i), не обязательно проходя через точки (x_i,y_i)***
- Такова постановка задач ***регрессии***, или ***сглаживание данных***

Линейная регрессия

Го-ды	2086	2087	2088	2089	2090	2091	2092	20 93	20 94	2095	2096
Уро-жай	149	145	168	146	177	176	190	18 6	17 6	211	170

Линейная регрессия

Сравнивая урожайность в разные годы, мы видим, что имеется тенденция к повышению урожайности, хотя в отдельные годы наблюдается колебания от среднего значения в силу различных метеорологических причин.

Найдем уравнение линии, описывающее данную тенденцию.

Решение экономических задач

Данная тенденция носит линейный характер, поэтому уравнение (данное уравнение называется **трендом**) будем искать в виде **y=bx+a.**

Зная коэффициенты a и b можно спрогнозировать показатель на 2097 год (x=97, а урожай Y вычисляется).

Линейная регрессия

Самый простой и наиболее часто используемый вид регрессии – линейная.

Введем вариацию ряда **VX** (годы), **VY**(урожайность) в виде ***матриц*** размерностью 11 х 1 (см. рис. 1)

Линейная регрессия

Вычислите коэффициенты **a** и **b**. Постройте график исходных данных (кружки) и линию тренда (f(x)). Вычислите прогноз на 2097 год.

- **Шаг 3.** Найдем коэффициент корреляции **corr(VX,VY)=** (Показывает тесноту связи факторов **VX** и **VY**. Чем ближе к 1, тем теснение зависимость).

Линейная регрессия

$$VX := \begin{pmatrix} 86 \\ 87 \\ 88 \\ 89 \\ 90 \\ 91 \\ 92 \\ 93 \\ 94 \\ 95 \\ 96 \end{pmatrix} \qquad VY := \begin{pmatrix} 149 \\ 145 \\ 168 \\ 146 \\ 177 \\ 176 \\ 190 \\ 186 \\ 176 \\ 211 \\ 170 \end{pmatrix}$$

$a := \mathrm{intercept}(VX, VY)$

$b := \mathrm{slope}(VX, VY)$

$a = -229.873 \quad b = 4.418$

Линейная регрессия

- Эти функции возвращают наклон и смещение линии, которая наилучшим образом приближает данные в смысле наименьших квадратов. Если поместить значения x в вектор vx и соответствующие значения y в vy, то линия определяется в виде

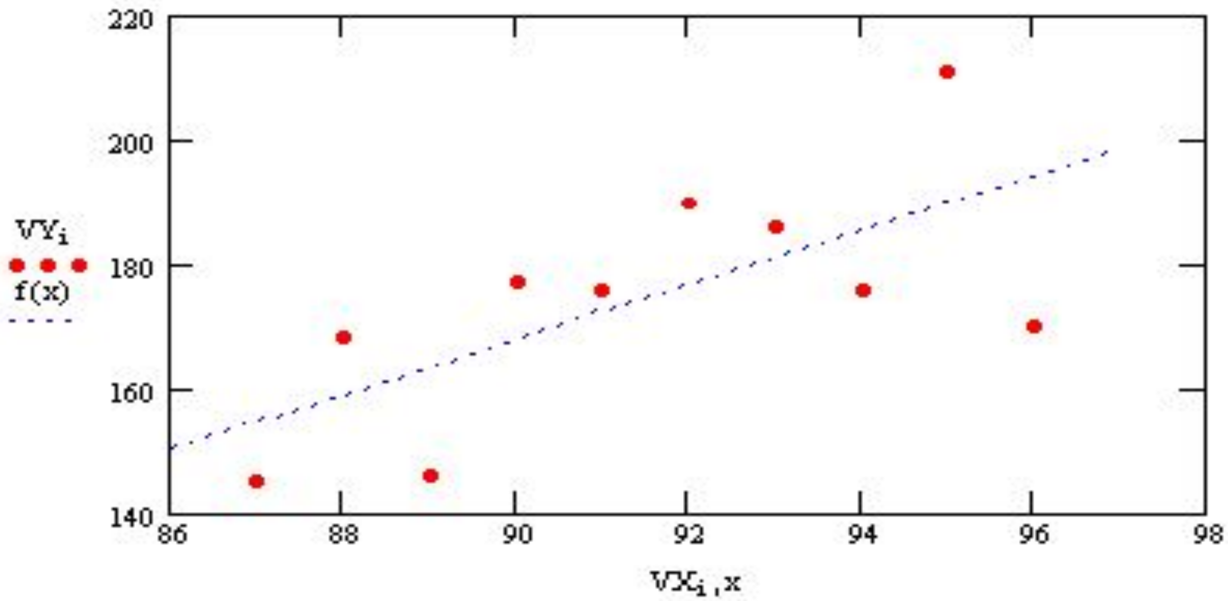
  y = slope(vx, vy)f21.gif (824 bytes)x + intercept(vx, vy)
- **slope(vx, vy)** Возвращает скаляр: наклон линии регрессии в смысле наименьших квадратов для данных из vx и vy.
- **intercept(vx, vy)** Возвращает скаляр: смещение по оси ординат линии регрессии в смысле наименьших квадратов для данных из vx и vy.

Линейная регрессия

$i := 1 .. 11$

$x := 86, 87 .. 97$

$f(x) := b \cdot x + a$



$x := 97$ $f(x) = 198.691$

Многомерная регрессия

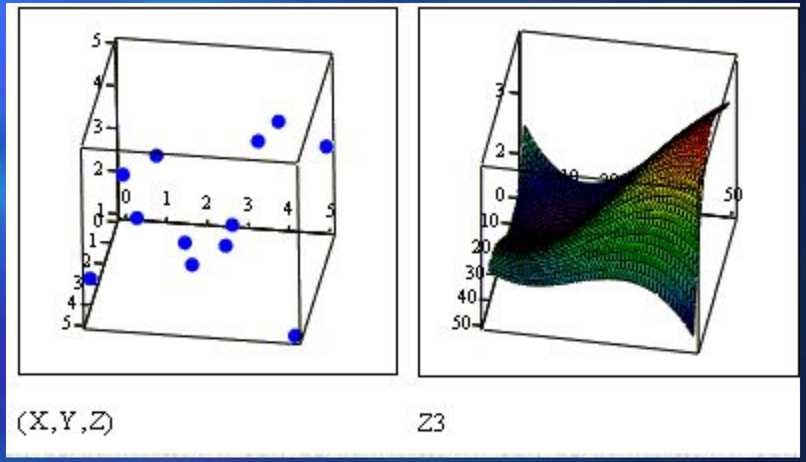
$$Mxy := \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 4 & 1 \\ 4 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 5 \\ 5 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \qquad VZ := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad VS := \mathrm{regress}(Mxy, VZ, 3)$$

$$i := 0..50 \qquad j := 0..50$$

$$x_i := \frac{i}{10} \qquad y_j := \frac{j}{10}$$

$$Z3_{i,j} := \mathrm{interp}\left[VS, Mxy, VZ, \begin{pmatrix} x_i \\ y_j \end{pmatrix}\right]$$

$$X := Mxy^{\langle 0 \rangle} \qquad Y := Mxy^{\langle 1 \rangle} \qquad Z := VZ$$



Многомерная регрессия

- **Regress (Mxy, Vz, n)** — возвращает вектор, запрашиваемый функцией interp (VS,Mxy,Vz,V) для вычисления многочлена n-й степени, который наилучшим образом приближает точки множества Mxy и Vz. Mxy — матрица mx2, содержащая координаты x и y.
- **Vz** — m-мерный вектор, содержащий z-координат, соответствующих m точкам, указанным в Mxy;
- **interp (VS,Mxy,Vz,V)** — возвращает значение z по заданным векторам VS (создается функциями regress или loess) и Mxy, Vz и V (вектор координат x и y заданной точки, для которой находится z).

Транспортная задача

Транспортная задача является одной из наиболее распространенных задач линейного программирования и находит широкое практическое применение.

Постановка транспортной задачи.

Некоторый однородный продукт, сосредоточенный у m поставщиков Ai в количестве ai (i=1,…,m) единиц, необходимо доставить n потребителям Bj в количестве bj (j=1,…,n) единиц. Известна стоимость cij перевозки единицы груза о поставщика i к потребителю j.

Составить план перевозок, позволяющий с минимальными затратами удовлетворить потребителей.

Транспортная задача

$$a := \begin{pmatrix} 145 \\ 210 \\ 160 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 237 \\ 278 \end{pmatrix}$$

$$\sum a = 515 \qquad \sum b = 515$$

$M := \mathrm{rows}(a)$ $\qquad$ $N := \mathrm{rows}(b)$

$M = 3$ $\qquad$ $N = 2$

$$c := \begin{pmatrix} 11.5 & 7 & 12 \\ 6.2 & 10 & 5.0 \end{pmatrix}$$

$$f(x) := \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} c_{i,j} \cdot x_{i,j}$$

$x_{N-1,M-1} := 0$

Given

$x_{0,0} + x_{0,1} + x_{0,2} = b_0 \qquad x_{0,0} + x_{1,0} = a_0 \qquad x_{0,0} \ge 0 \qquad x_{1,0} \ge 0$

$x_{1,0} + x_{1,1} + x_{1,2} = b_1 \qquad x_{0,1} + x_{1,1} = a_1 \qquad x_{0,1} \ge 0 \qquad x_{1,1} \ge 0$

$x_{0,2} + x_{1,2} = a_2 \qquad x_{0,2} \ge 0 \qquad x_{1,2} \ge 0$

$sol := \mathrm{Minimize}(f, x)$

$$sol = \begin{pmatrix} 0 & 210 & 27 \\ 145 & 0 & 133 \end{pmatrix} \qquad f(sol) = 3.89 \times 10^3$$

Экономико-математическая модель задачи

Исходные данные транспортной задачи приведены схематически: внутри прямоугольника заданы удельные транспортные затраты на перевозку единицы груза c_{ij} , слева указаны мощности поставщиков a_i , а сверху - мощности потребителей b_j .

Д/З: Найти оптимальный план закрепления поставщиков за потребителями x_{ij}. (см. л/р “Транспортная задача”)