Научно-исследовательская работа по математике

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СЕМЕЙСТВА ЛИНИЙ

Автор: Гуркин Александр Александрович,
МОУ СОШ №21 г.Подольск, Московская область

Научный руководитель: Буянова Анна Матвеевна,
Учитель математики МОУ СОШ №21 г.Подольск

Найти все точки плоскости XoY,через которые:

(а) проходит только одна парабола;

(б) не проходит ни одна парабола;

(в) проходит более одной параболы семейства

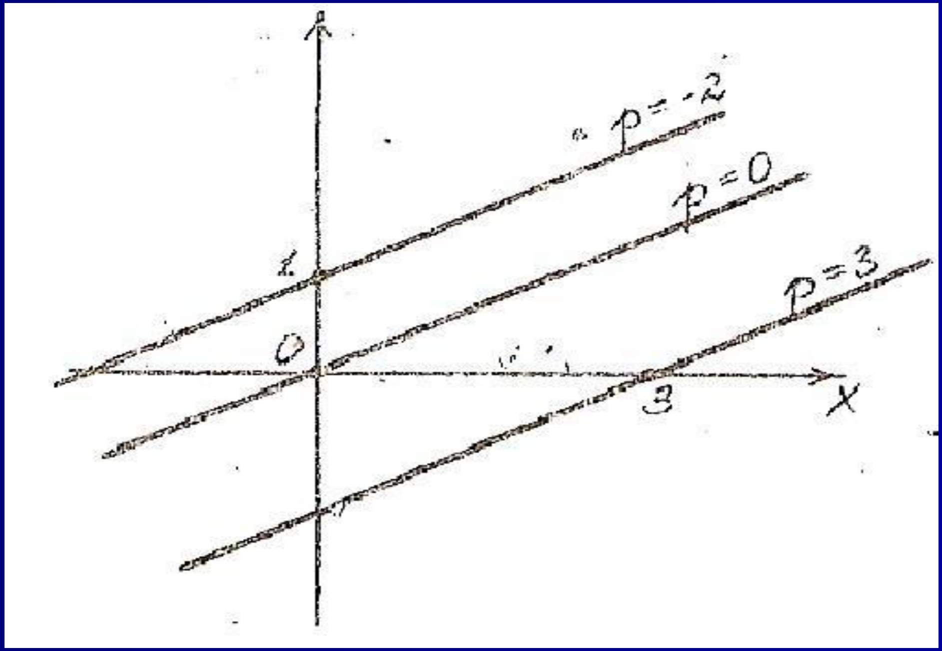
$$y=x^2+(4p+2)x+2p^2$$

ax+by=p

Например, уравнение

$x-2y=p$

задает семейство прямых с угловым коэффициентом $k=1/2$ и пересекающих ось oX в точке $(0; - p/2)$

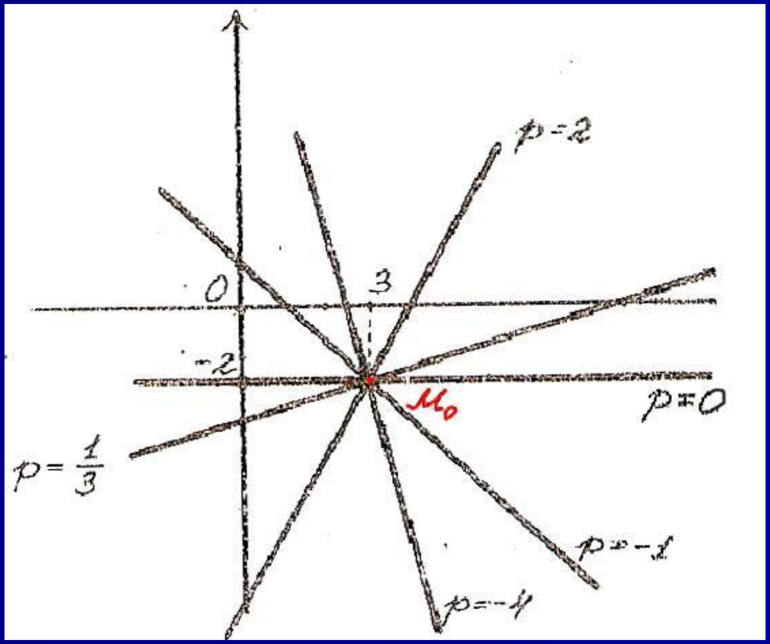


$y-b=p(x-a)$

Например, уравнение

$y+2=p(x-3)$

задает семейство прямых, проходящих через точку $M_0(3;-2)$



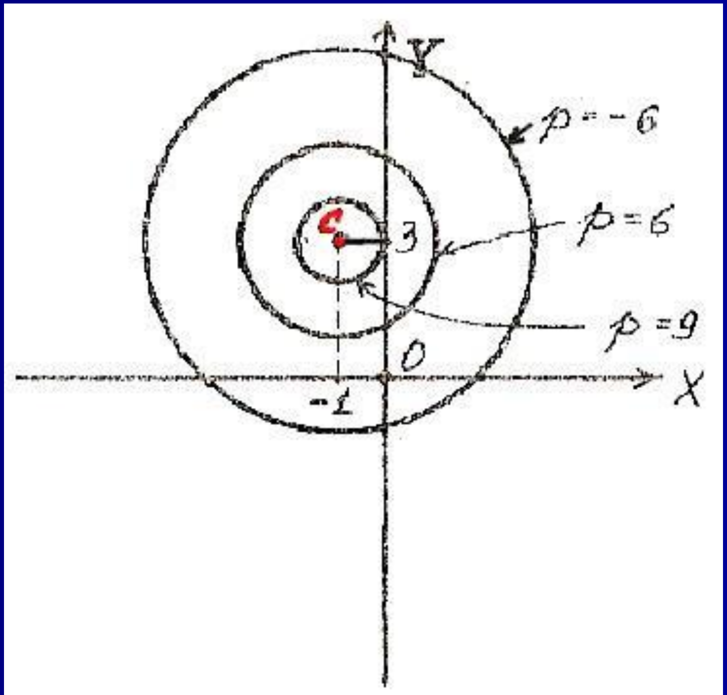
$(x\text{-}a)^2+(y\text{-}b)^2=p$

Например, уравнение

$x^2+2x+y^2-6y+p=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-3)^2=10-p$

задает *(при $p<10$)* семейство окружностей радиуса $R=\sqrt{10-p}$ с

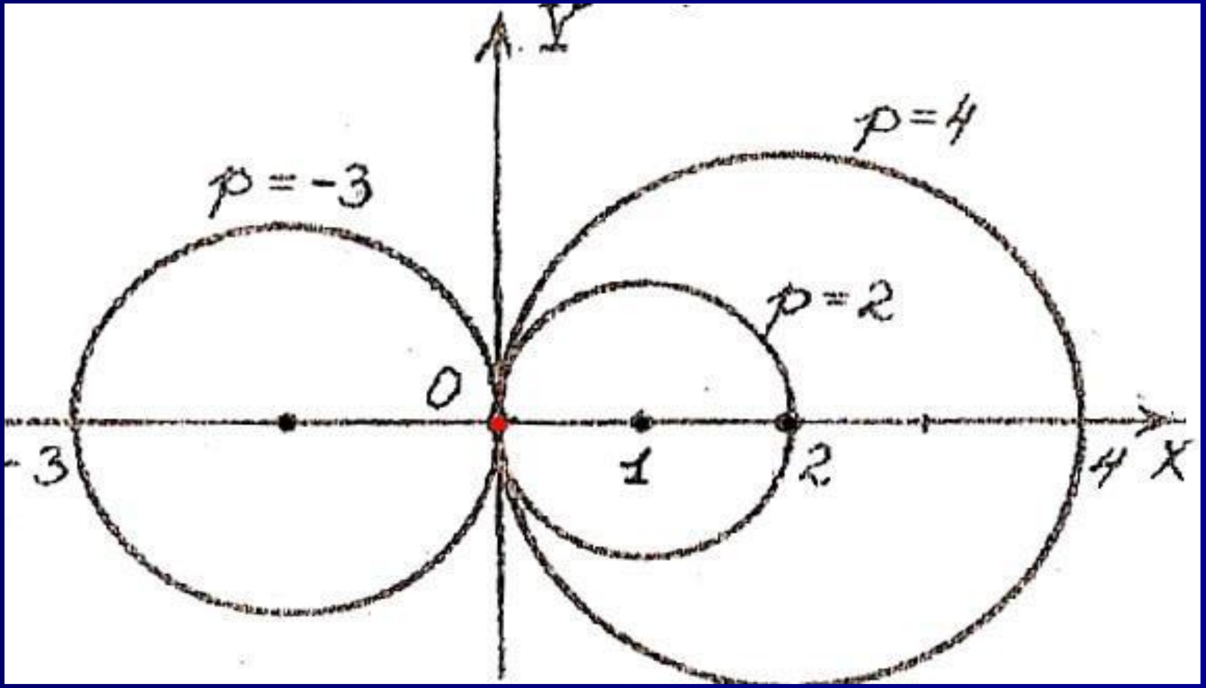
центром в точке *C:(-1;- 3)*



$x^2+y^2=px$

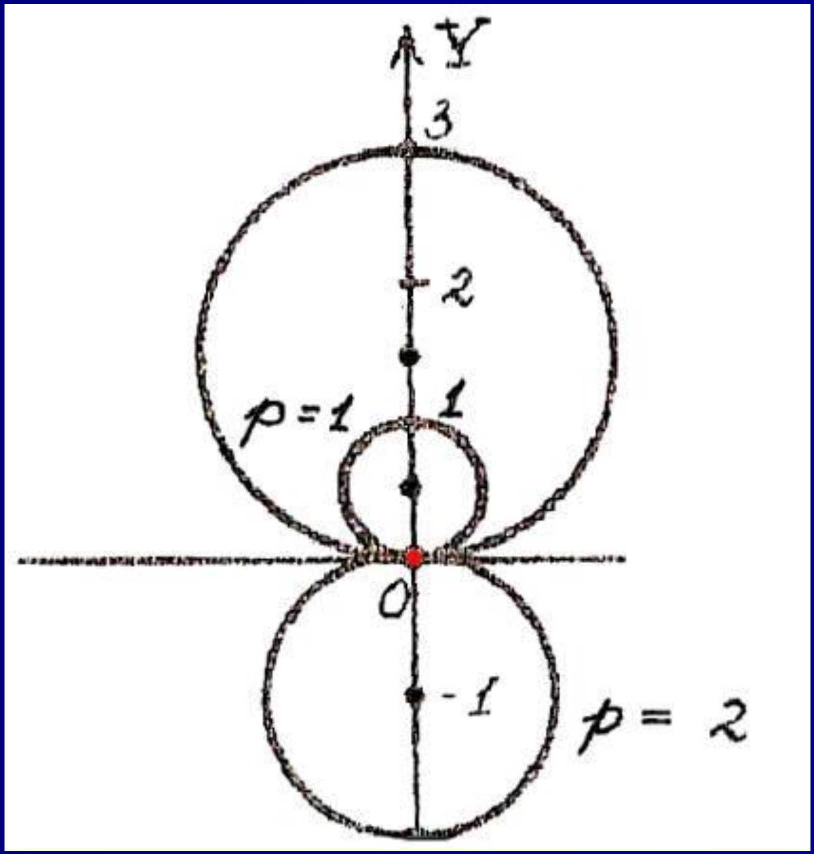
Семейство окружностей радиуса $1/2|p|$ с центром на оси *oX* в точке *(p /2;0)*. Все они проходят через начало координат.

Действительно, $x^2+y^2=px \Leftrightarrow (x-p/2)^2+y^2=p^2/2$



$x^2+y^2=py$

Семейство окружностей радиуса *1/2|p|* с центром на оси *оУ* в точке *(0; p /2)*; все они также проходят через начало координат.



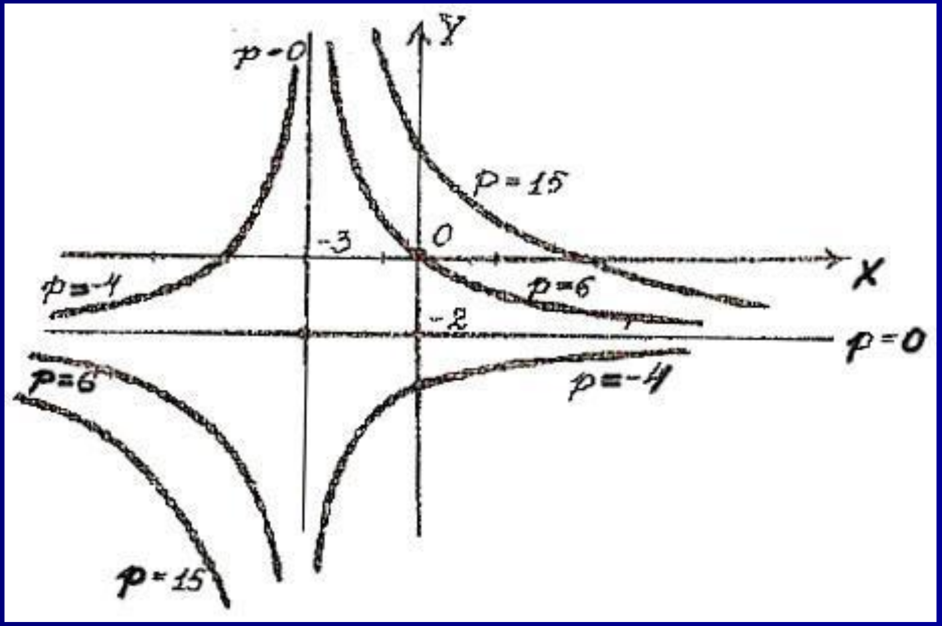
$(x-a)(y-b)=p$

При $p=0$ уравнение задает пару пересекающихся прямых: $x=b$ и $y=p$. При $p\neq0$ это две ветви гиперболы-$y=b(p/x-a)$

Ее асимптотами являются вышеуказанные прямые $x=a$ и $y=b$ точка пересечения которых является их центром симметрии. При $p>0$ гипербола занимает первую и третью четверти (относительно асимптот),

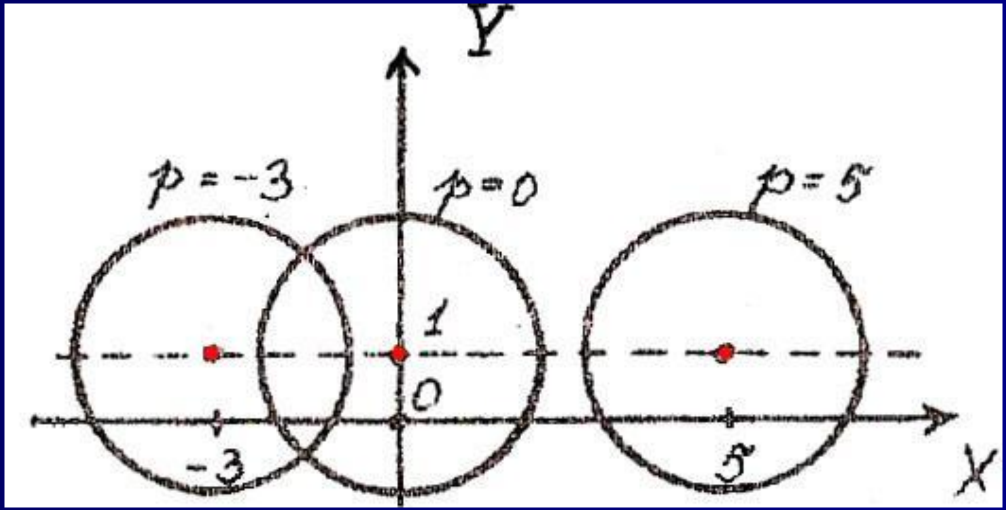
а при $p<0$ - вторую и четвертую на рисунке представлены линии

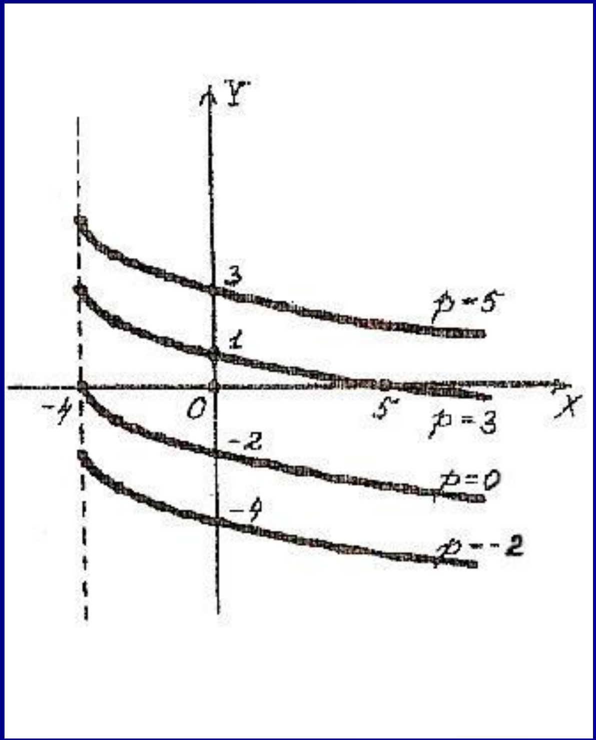
семейства $(x+3)(y+2)=p$ для значений $p=0$, $p= -4$, $p=6$, $p=15$.



$y=f(x-p)$ $y-p=f(x)$

Например, $(x-p)^2+(y-1)^2=4$ задает семейство окружностей радиуса $R=2$ с центром в точке $C\ (p;1)$.



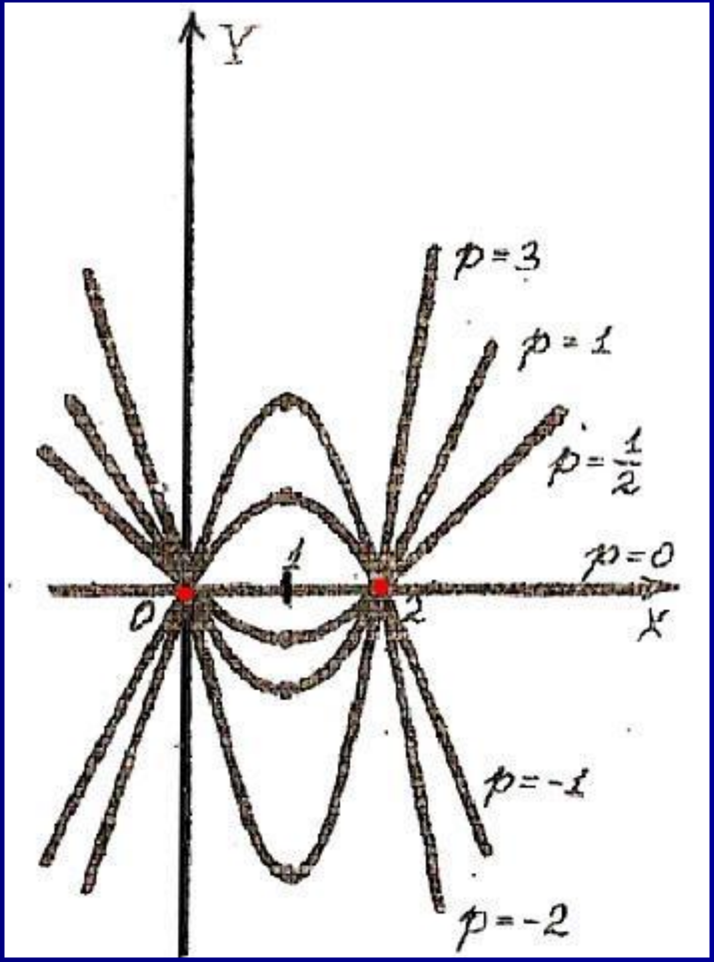


А уравнение $y = p-\sqrt{x+4}$ семейство «полупарабол», получающихся из графика $y= -\sqrt{x+4}$ сдвигом по вертикали на p.

$y=f(x/p)$ $y/p=f(x)$

На рисунке представлено семейство парабол $y=p(x^2-2x)$ для значений $p=1, p=3, p=1/2, p=-1, p=-2$ и $p=0$ (это прямая $y=0$).

Все параболы этого семейства пересекают ось *oX* при $x=0$ и $x = 2$.

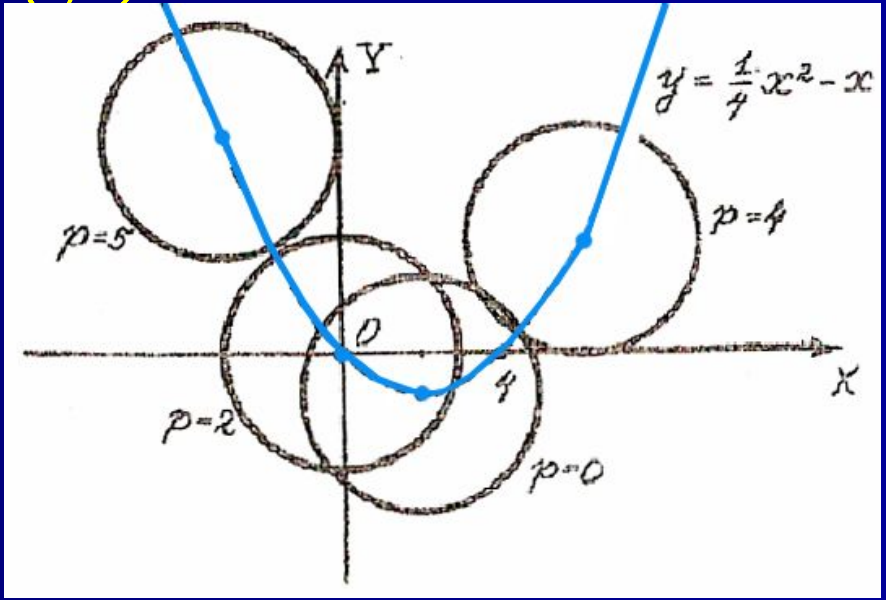


Определить вид семейства линий, заданных данными уравнениями, и нарисовать несколько типичных линий семейства, отвечающих конкретным значениям *p*

$$(x+p-2)^2+(y-p^2/4+1)^2=9$$

Данное уравнение представляет собой окружность радиуса $R=3$ с центром в точке C с координатами $x=-p+2$ $y=p^2/4-1$. Исключив из этой системы параметр p, получим уравнение $y=1/4(x-2)^2-1$. Значит, все центры этих окружностей лежат на параболе $y=(1/4)x^2-x$

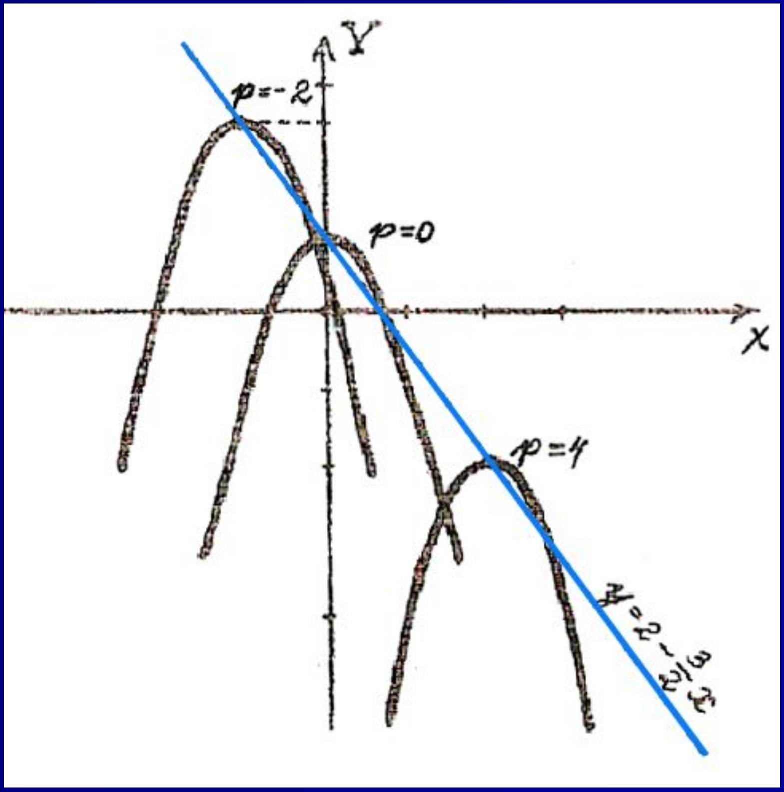
$p=0$ (с центром $C(2; -1)$),
$p=2$ (с центром $C(0;0)$),
$p=4$(с центром $C(6;3)$),
$p=5$ (с центром $C(-3;5\ ¼)$).



$y = -x^2 + 4px + 2 - 3p - 4p^2$

Ясно, что это параболы с ветвями, направленными вниз: $y = -(x-2p)^2 + 2 - 3p$ вершина которых V имеет координаты $x = 2p$ $y = 2 - 3p$ исключив параметр p из предыдущей системы, получим $y = 2 - 3/2x$

Т. е. все вершины парабол лежат на Прямой $y = 2 - 3/2\,x$. Поскольку коэффициент при x^2 постоянен (равен -1), то все параболы имеют одинаковую форму, т.е. получаются друг из ,друга параллельным переносом.



Здесь представлены параболы семейства при
$p=0$, $p=4$ и $p=-2$.

$y=x^2+(4p+2)x+2p^2$

$Д=8(x^2-2x+y)$

(а) $Д=0 \Leftrightarrow y=2x-x^2$.

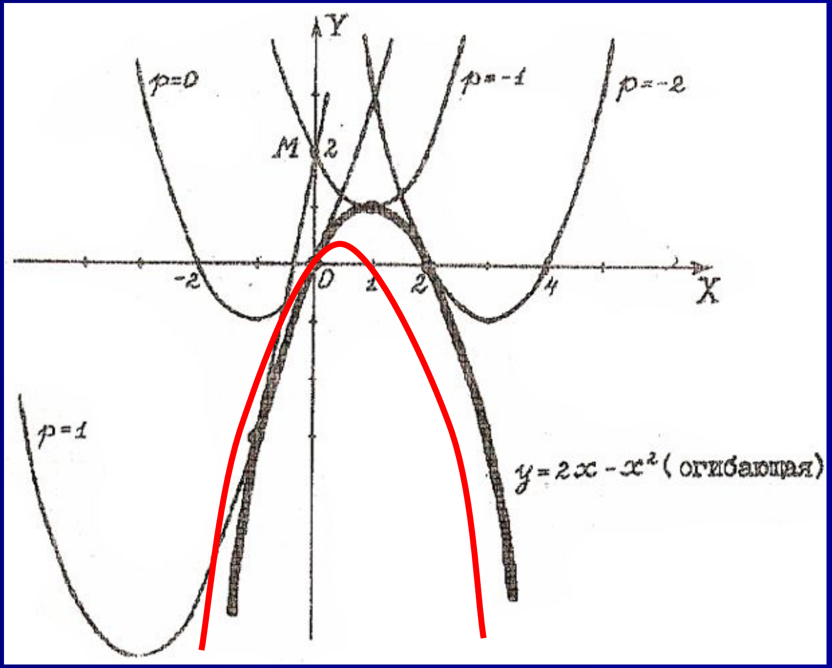
Тогда уравнение имеет одно решение. Это значит, что через каждую точку параболы $y=2x-x^2$ проходит ровно одна линия семейства, то есть эта парабола касается каждой параболы данного семейства она называется их огибающей.

(б) $Д<0 \Leftrightarrow y<2x-x^2$, то есть через точки расположенные строго ниже огибающей параболы, не проходит ни одной параболы семейства.

(в) $Д>0 \Leftrightarrow y>2x-x^2$, тогда квадратное уравнение имеет два решения

$P_{1,2}= -x \pm\sqrt{x^2-2x+y/2}$

Это значит что через каждую точку расположенную строго выше огибающей параболы $y=2x-x^2$ проходит ровно две параболы данного семейства.



$p=1, p=0, p=-1, p=-2$

$y=2x-x^2$(огибающая)