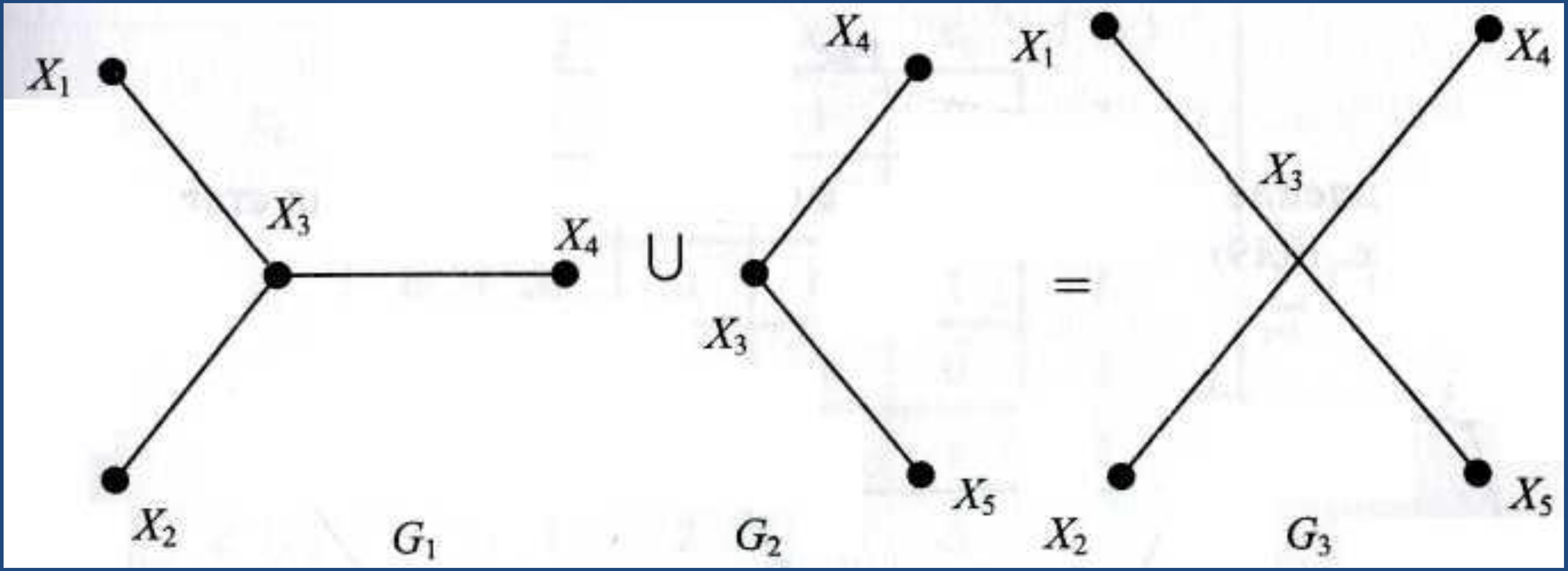
ОПЕРАЦИИ НАД ГРАФАМИ

- **Удаление вершин или ребер** — это операция, с помощью которой можно из заданного графа $G = (X,U)$ получить граф с меньшим числом элементов (вершин и ребер).
- **Добавление ребра** — это операции по соединению несмежных вершин графа.
- **Объединение графов**. Граф G_3 является наложением графов G_1 и G_2 (рис. 10.16).

ОПЕРАЦИИ НАД ГРАФАМИ



- Рис. 10.16

ОПЕРАЦИИ НАД ГРАФАМИ

- **4. Произведение двух графов** G_1 и G_2 есть граф G, для которого $x_1 \cdot x_2 = G$ (рис. 1

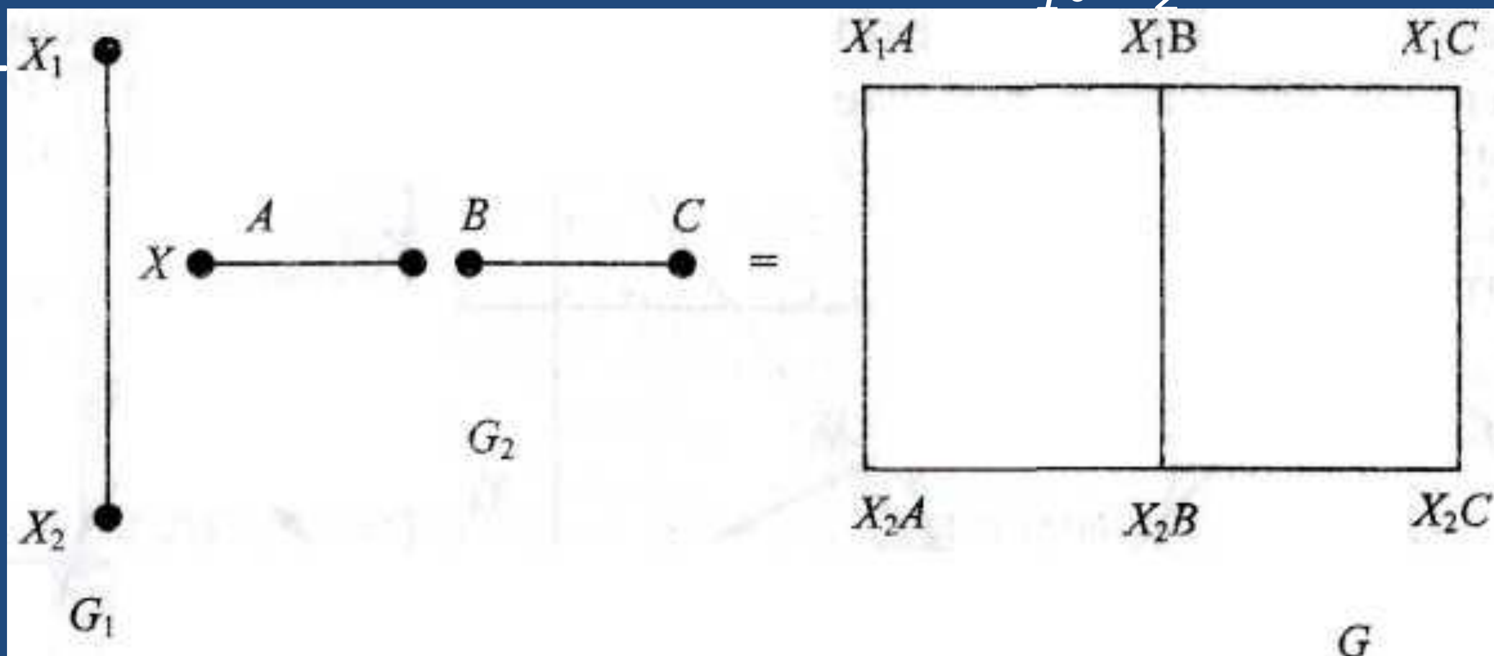


Рис. 10.17

ОПЕРАЦИИ НАД ГРАФАМИ

- **5. Стягивание ребра** означает отождествление смежных вершин (рис. 10.18).

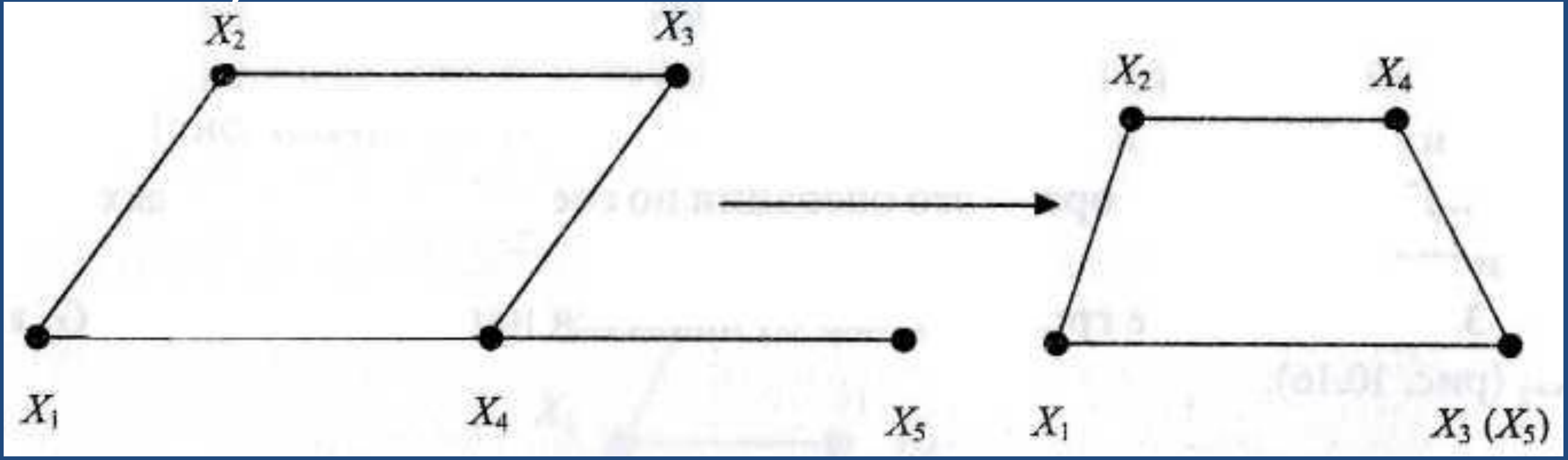


Рис. 10.18

ОПЕРАЦИИ НАД ГРАФАМИ

- 6. **Расщепление вершин** — это операция двойственная стягиванию

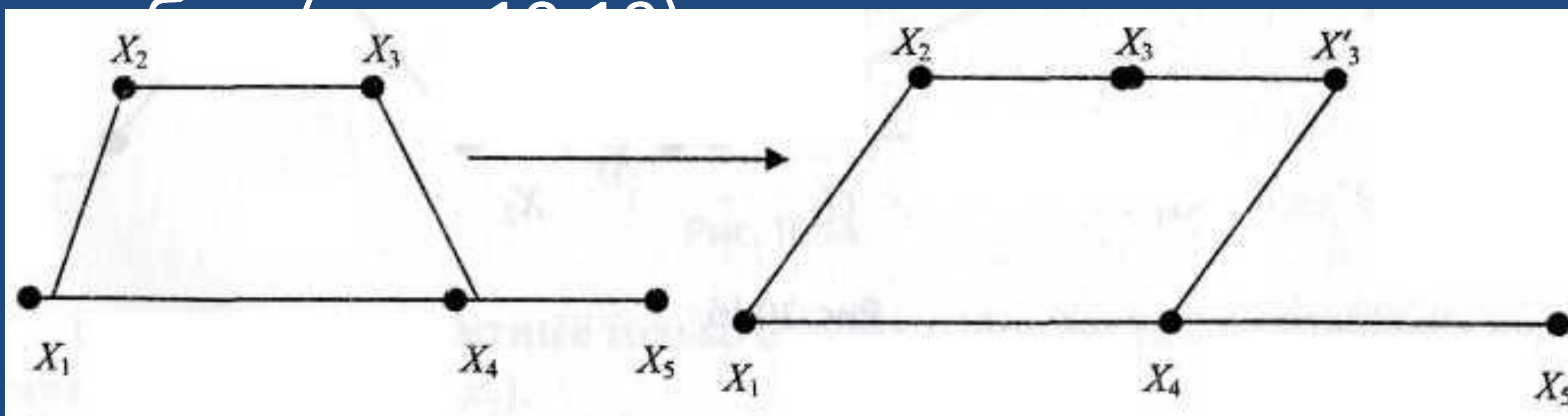


Рис. 10.19

МАТРИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРАФОВ

- Графы можно задавать с помощью матриц. Построим некоторые из них.

Матрицей смежности вершин графа называется квадратная матрица $A = \{a_{ik}\}$ размером n х n, у которой строки и столбцы соответствуют вершинам, а элементы a_{ik} определяют из условий:

$$a_{ik} = \begin{cases} 1, \text{ если вершины } x_i \text{ и } x_k \text{ смежны, т.е. существует дуга } (x_i, x_k); \\ 0 \text{ — в противном случае.} \end{cases}$$

МАТРИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРАФОВ

- Для орграфа (рис. 10.20) построить матрицу смежности *A(G).*

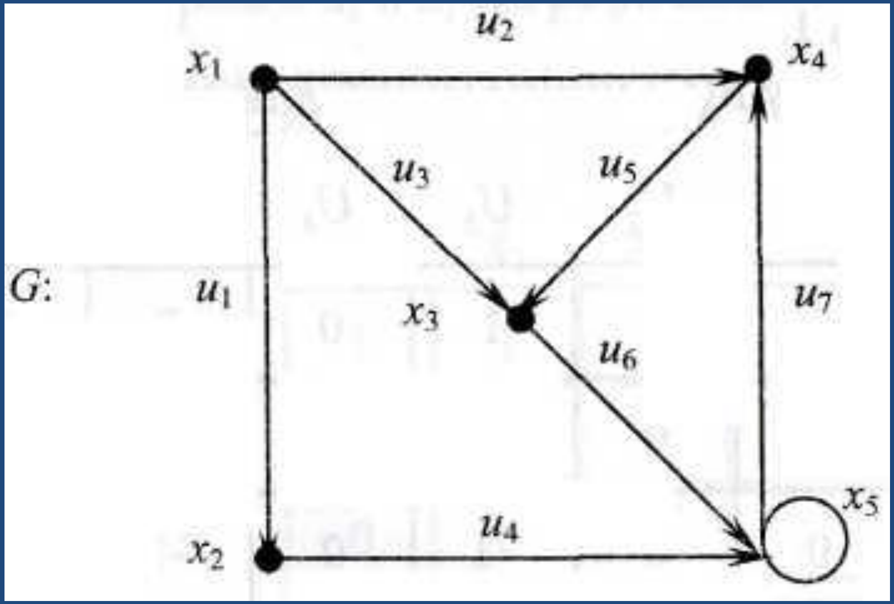


Рис. 10.20

МАТРИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРАФОВ

$$A(G) = \begin{array}{c|ccccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & d^+(x_i) \\
\hline
x_1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\
x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
x_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
x_5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\
\hline
d^-(x_i) & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 &
\end{array}$$

$$\sum_{i=1}^{5} d^+(x_i) = 8;$$

$$\sum_{i=1}^{5} d^-(x_i) = 8.$$

МАТРИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРАФОВ

Матрицей инциденций $B(G) = \{b_{ik}]$ орграфа $G = (X,U)$ называется прямоугольная матрица размерности $n \times m$ (n — число вершин графа, m — количество дуг), элементы которой удовлетворяют

$$b_{ik} = \begin{cases} 1, \text{ если вершина } x_i \text{ является началом дуги } u = (x_i, x_k); \\ -1, \text{ если } x_i \text{ является концевой вершиной дуги } u = (x_i, x_k); \\ 0, \text{ если } x_i \text{ не является вершиной дуги } u_к\text{, т.е. вершина } x_i \\ \quad \text{и дуга } u_k \text{ неинцидентны;} \\ 2, \text{ если дуга } u_k = (x_i, x_i) \text{ является петлей.} \end{cases}$$

МАТРИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРАФОВ

- В матрице инциденций для неографа при ее построении элементы -1 следует заменить на 1.
- Построим матрицу *B(G)* инциденций для орграфа *G* (рис. 10.20).

$B(G)$:

	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7	U_8
x_1	1	1	1	0	0	0	0	01
x_2	–1	0	0	1	0	0	0	0
x_3	0	0	–1	0	–1	1	0	0
x_4	0	–1	0	0	1	0	–1	0
x_5	0	0	0	–1	0	–1	1	2

МАТРИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРАФОВ

Матрицей пропускных способностей дуг $C(G) = \{c_{ik}\}$ графа G называется квадратная матрица размерности n х n, элементы которой определяют из условий:

$$c_{ik} = \begin{cases} c_{ik} \text{ — величина, равная значению пропускной способности дуги;} \\ 0 \text{ — в противном случае.} \end{cases}$$

Матрицу пропускных способностей дуг $C = (G)$ можно построить на основании матрицы смежности $A = (G)$, в которой 1 заменяются значением c_{ik} пропускной способности соответствующей дуги графа.

МАТРИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРАФОВ

Матрицей достижимостей $D(G) = \{d_{jk}\}$ графа G называется квадратная матрица размерности n x n (n — число вершин орграфа), элементы которой удовлетво

$C(G)$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	C_{12}	C_{13}	C_{14}	0
x_2	0	0	0	0	C_{25}
x_3	0	0	0	0	C_{35}
x_4	0	0	1	C_{43}	0
x_5	0	0	0	C_{45}	C_{55}

МАТРИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРАФОВ

$$d_{ik} = \begin{cases} 1, \text{ если вершина } x_k \text{ достижима из вершины } x_i, \\ \quad \text{т.е. для вершин } x_k \text{ и } x_i \text{ орграфа можно указать путь;} \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

$D(G)$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	1	1	1	0
x_2	0	1	1	1	1
x_3	0	0	1	1	1
x_4	0	0	1	1	1
x_5	0	0	1	1	1

СВЯЗНОСТЬ ГРАФОВ И КОМПОНЕНТЫ СВЯЗНОСТИ

Граф *G(X,U),* в котором все вершины соединены простой цепью называется связным.

Отношение связности вершин графа называется **эквивалентностью.** Классы эквивалентности по отношению к связности называются **компонентами связности** графа, или компонентой связности графа называется его связный подграф.

СВЯЗНОСТЬ ГРАФОВ И КОМПОНЕНТЫ СВЯЗНОСТИ

На рис. 10.22, *а* граф имеет две компоненты связности, на рис. 10.20, *б* у графа 3 компоненты связности.

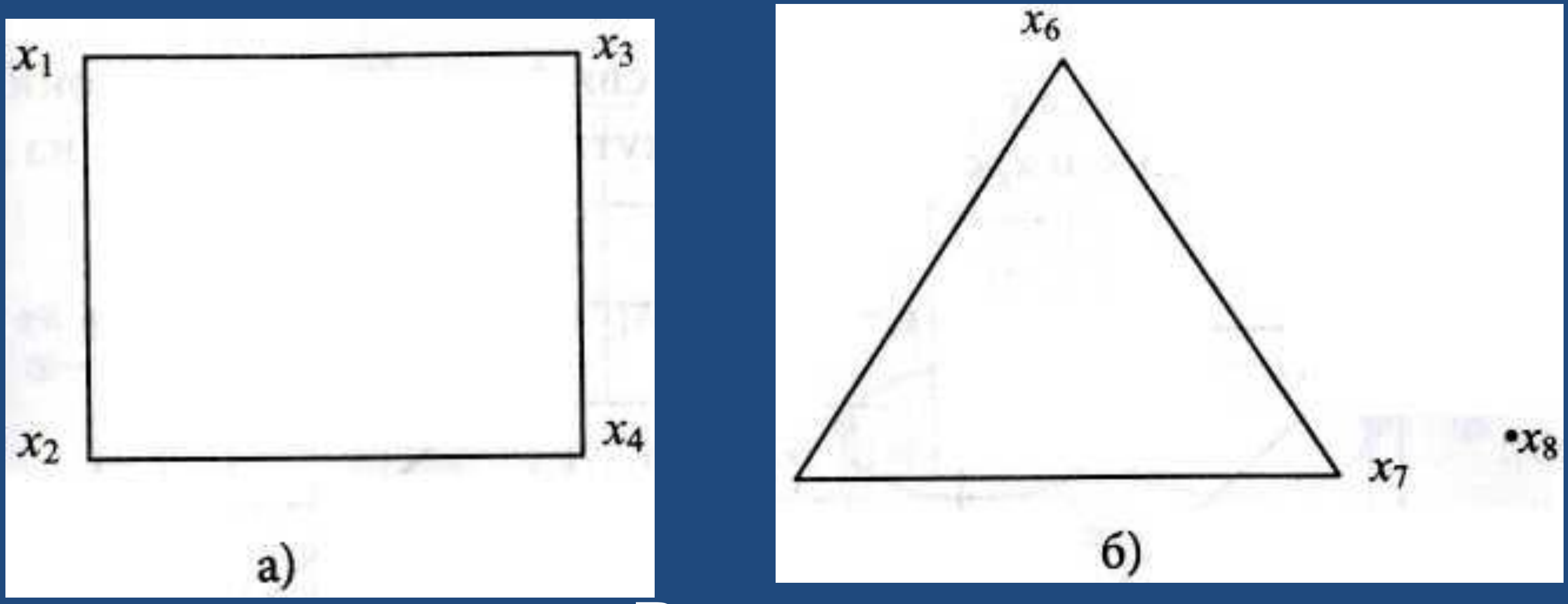


Рис. 10.22

СВЯЗНОСТЬ ГРАФОВ И КОМПОНЕНТЫ СВЯЗНОСТИ

Число компонент связности графа *G* обозначается *k(G)*.

Граф *G* является связным, когда *k(G)* = 1.

Если *k(G)* > 1, то граф называется несвязным. Например, для графа на рис. 10.24 *k(G)* = 1, для графа (рис. 10.25) *k(G)* = 2 и для графа *G*, представленного на рис. 10.26, *k(G)* = 3.

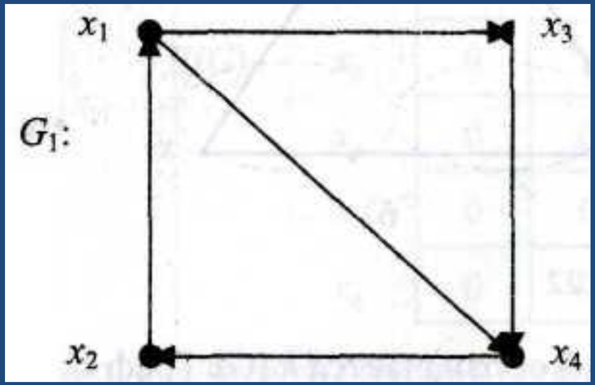


Рис. 10.24

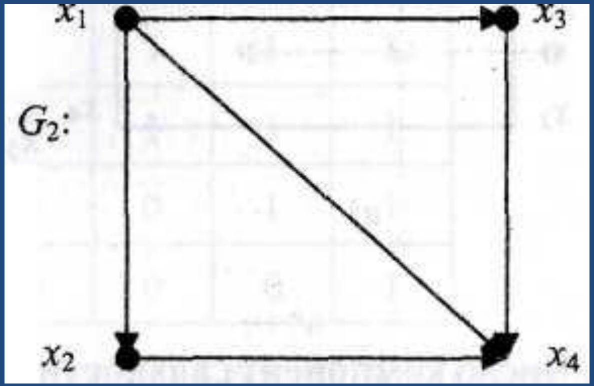


Рис. 10.25

СВЯЗНОСТЬ ГРАФОВ И КОМПОНЕНТЫ СВЯЗНОСТИ

Вершина графа *G* называется точкой сочленения, если ее удаление увеличивает число компонент связности.

Мостом называется ребро графа, удаление которого увеличивает число компонент связности.

Блоком называется связный граф, не имеющий точек сочленения.

На рис. 10.23, в графе *G:* вершины x_3 и x_4 являются точками сочленения, ребро U_4 (x_3, x_4) называется мостом и связные подграфы $\{x_1,x_2,x_3\}$, $\{x_4,x_5,x_6\}$, $\{x_s,x_6,x_7\}$, $\{x_4,x_5,x_6,x_7\}$ являются блоками.

СВЯЗНОСТЬ ГРАФОВ И КОМПОНЕНТЫ СВЯЗНОСТИ

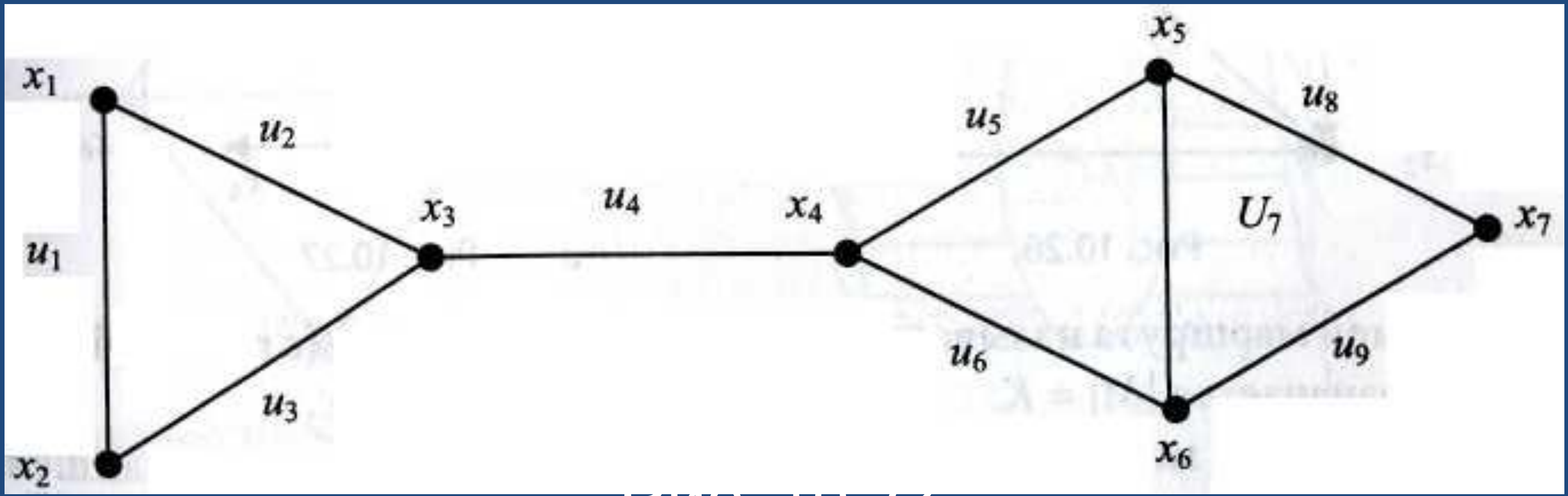


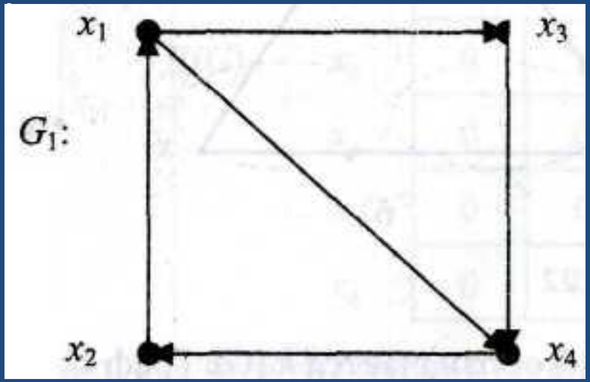
Рис. 10.23

Теорема. Граф $G = (X,U)$ связен тогда и только тогда, когда его нельзя представить в виде объединения двух графов.

СВЯЗНОСТЬ ГРАФОВ И КОМПОНЕНТЫ СВЯЗНОСТИ

- Орграф G_1 называется сильно связным графом или сильным, если для любых различных двух вершин x_i и $x_к$ существует по крайней мере один путь, соединяющий эти вершины, т.е. любые две вершины взаимно достижимые (рис. 10.24).

Орграф G_2 называется односторонне связным или односторонним, если для двух вершин x_i и $x_к$ существует путь либо из x_i в $x_к$ либо из $x_к$ в x_i (рис. 10.25



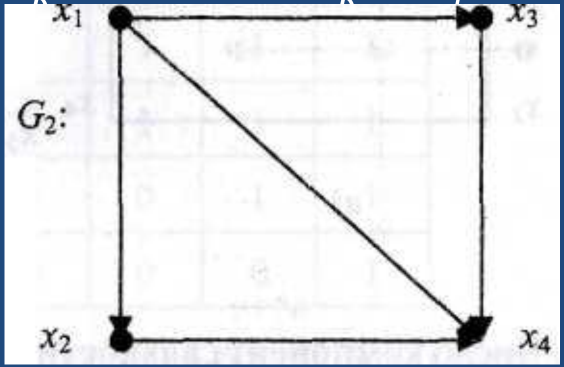


Рис. 10.24

Рис. 10.25

СВЯЗНОСТЬ ГРАФОВ И КОМПОНЕНТЫ СВЯЗНОСТИ

- Орграф G3 называется слабосвязным или слабым, если для двух любых вершин графа существует по крайней мере один маршрут (рис. 10.26).
- Орграф G4 называется несвязным, если для некоторой пары вершин его не существует маршрута, соединяющего

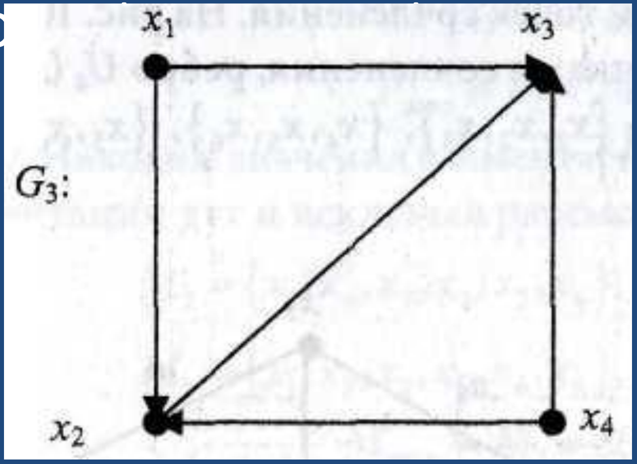


Рис. 10.26

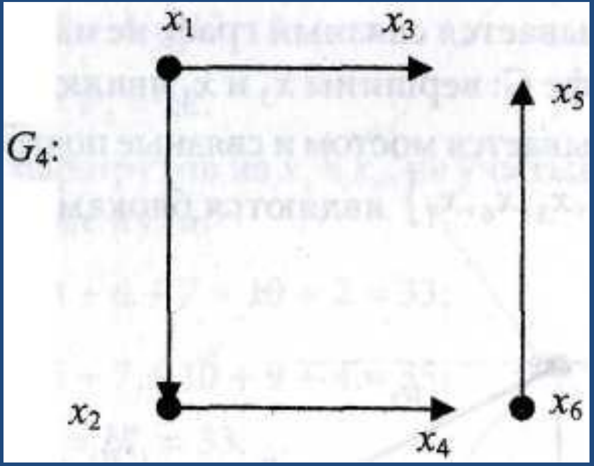


Рис. 10.27

СВЯЗНОСТЬ ГРАФОВ И КОМПОНЕНТЫ СВЯЗНОСТИ

- Длиной маршрута называется количество ребер в нем (с повторениями). Обозначается |*M*| = *К.*
- Расстоянием между вершинами x_i и $x_к$ называется длина кратчайшей цепи, а сама кратчайшая цепь называется **геодезической.** Обозначается расстояние $l\ (x_i,\ x_k)$.
- **Диаметром графа** G (обозначается *D(G))* называется длина наибольшей геодезической.
- **Эксцентриситетом** $e(x_i)$ вершины x_i в связном графе *G(X,U)* называется максимальное расстояние от вершины до других вершин графа *G*.
- **Радиусом** *R(G)* графа G называется наименьший из эксцентриситетов вершин.
-

  Вершина x_i называется центральной, если ее эксцентриситет совпадает с радиусом графа, т.е. $e(x_i) = R(G)$.

СВЯЗНОСТЬ ГРАФОВ И КОМПОНЕНТЫ СВЯЗНОСТИ

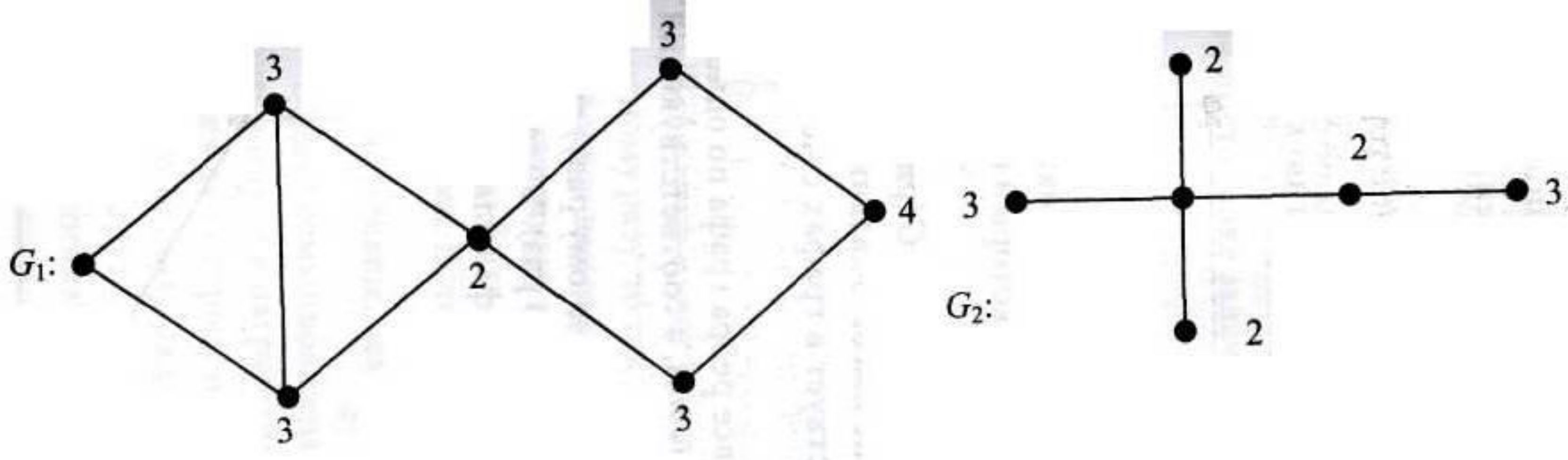


Рис. 10.28

- На рис. 10.28 указаны эксцентриситеты вершин и центры двух графов G_1 и G_2.
- Вершины, составляющие центры, выделены.

Циклы Эйлера и Гамельтона

- Задача Эйлера (о кенигсбергских мостах) заключается в нахождении маршрута путем обхода семи мостов по одному разу, который начинается и оканчивается в одной части города, рис. 10.29.
- При решении задачи (рис. 10.29, *а)* Эйлер составил граф *G* (рис. 10.29, *б)* и доказал, что поставленная задача решений не имеет. Указанный замкнутый маршрут, называемый циклом, существует в графах с четными степенями вершин.

Циклы Эйлера и Гамельтона

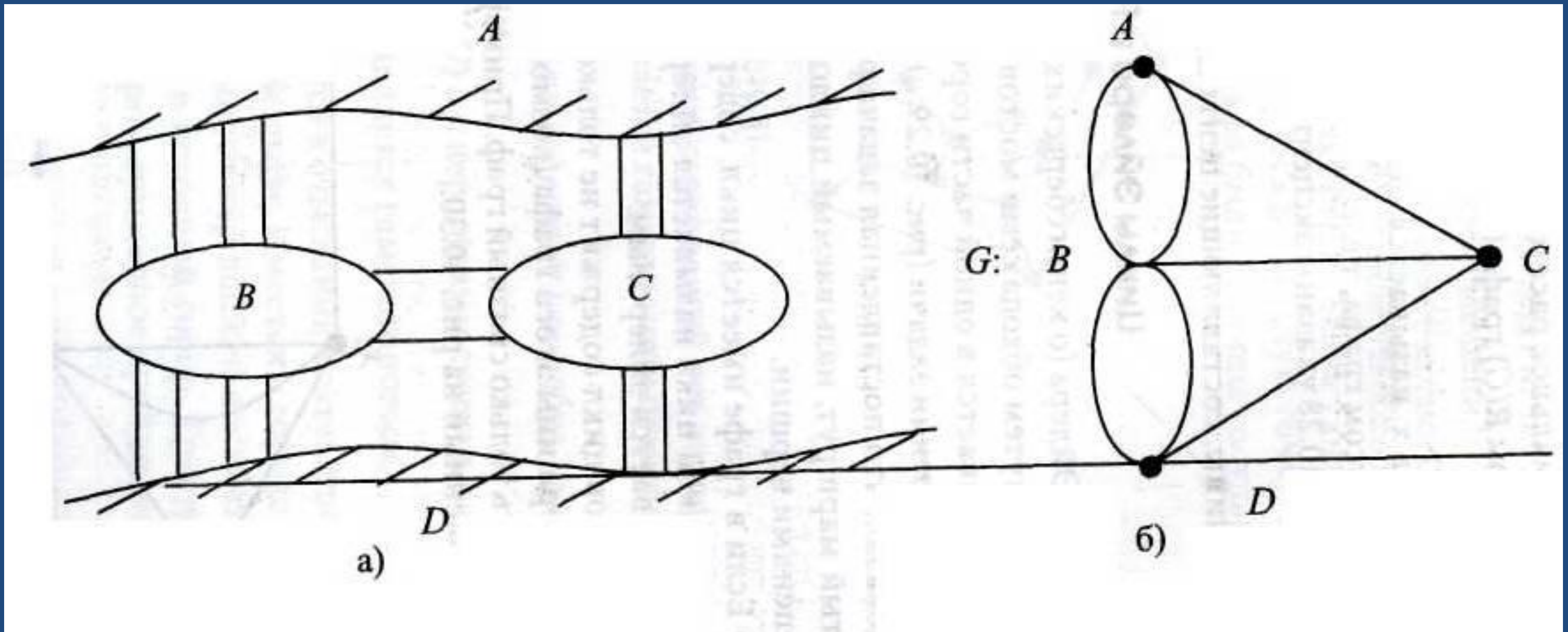


Рис. 10.29

Если в графе имеется цикл, содержащий все ребра графа по одному разу, то такой цикл называется эйлеровым циклом, а соответствующий граф называется эйлеровым.

Циклы Эйлера и Гамельтона

Эйлеров цикл содержит не только все ребра (по одному разу) графа, но и все вершины этого графа (возможно по несколько раз). Эйлеровым может быть только связный граф. Примером такого графа является граф, представленный на рис. 10.30.

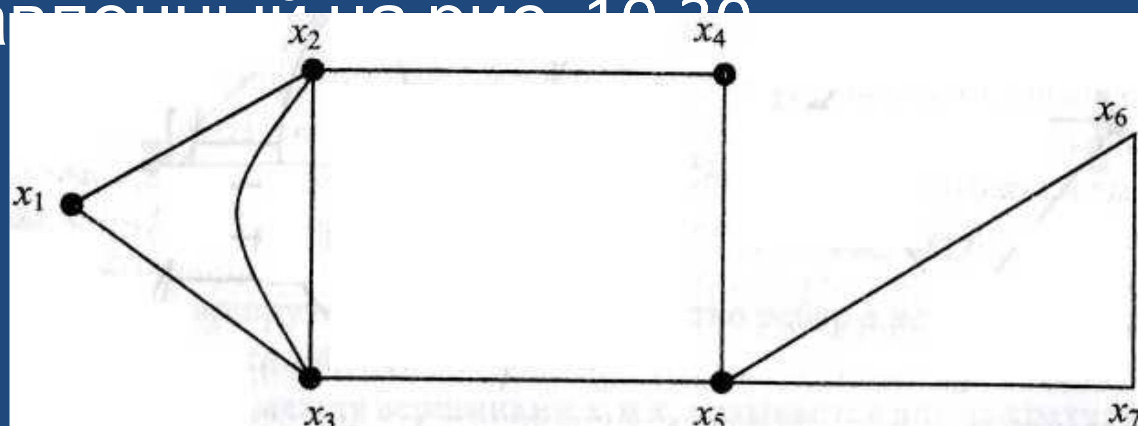


Рис. 10.30

Циклы Эйлера и Гамельтона

- **Теорема Эйлера.** Если граф $G = (X,U)$ связан и нетривиален, то следующие утверждения эквивалентны:
- $G = (X,U)$ — эйлеров граф.
- Каждая вершина имеет четную степень.
- Множество ребер можно разбить на простые цепи.

Циклы Эйлера и Гамельтона

Название **гамельтоновых циклов** произошло от задачи о кругосветном путешествии, сформированной У. Гамельтоном: Необходимо обойти все вершины графа, диаграмма которого представляла укладку додекаэдра (рис. 10.31), по одному разу и вернуться в исходную точку. В начальной постановке задачи вершинами графа были столицы государств.

Циклы Эйлера и Гамельтона

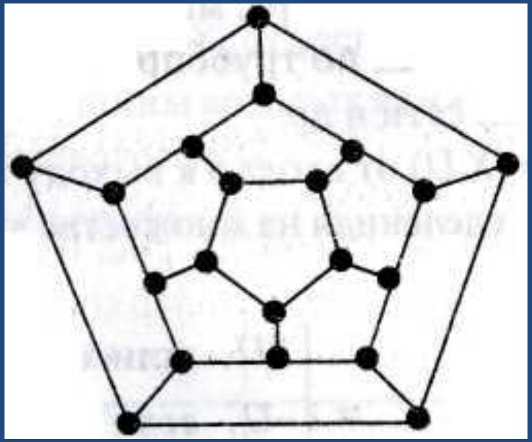


Рис. 10.31

- Если граф имеет простейший цикл, содержащий все вершины графа по одному разу, то такой цикл называется u**амельтоновым циклом,** а граф называется **гамельтоновым**.
- Гамельтонов цикл не обязательно содержит все ребра графа, но сам граф может быть только связным.

Циклы Эйлера и Гамельтона

Теорема. Если в графе *G = (X,U)* с n вершинами степень каждой вершины не меньше чем $\frac{n}{2}$,то граф является гамельтоновым.

Задача коммивояжера заключается в отыскании кратчайшего гамельтонова цикла в нагруженном полном графе.

Имеется n городов, расстояние между которым известны, коммивояжер должен посетить все n городов по одному разу, вернувшись в исходный город. Требуется найти такой маршрут движения, при котором суммарное пройденное расстояние будет минимальным.

Циклы Эйлера и Гамельтона

- Составляя задачи отыскания эйлеровых и гамельтоновых циклов, следует отметить, что внешне формулировки задач похожи, однако они оказываются принципиально различными с точки зрения практического применения.
- Эйлером получено просто проверяемое необходимое и достаточное условие существования в графиках эйлерова цикла.
- Для гамельтоновых графов таких условий нет, поэтому алгоритма построения таких циклов нет.