

# **Лекция**

## **№4**

**Описание линейных дискретных систем во  
временной области**

**Дискретным** называется сигнал, дискретный во времени и непрерывный по состоянию.

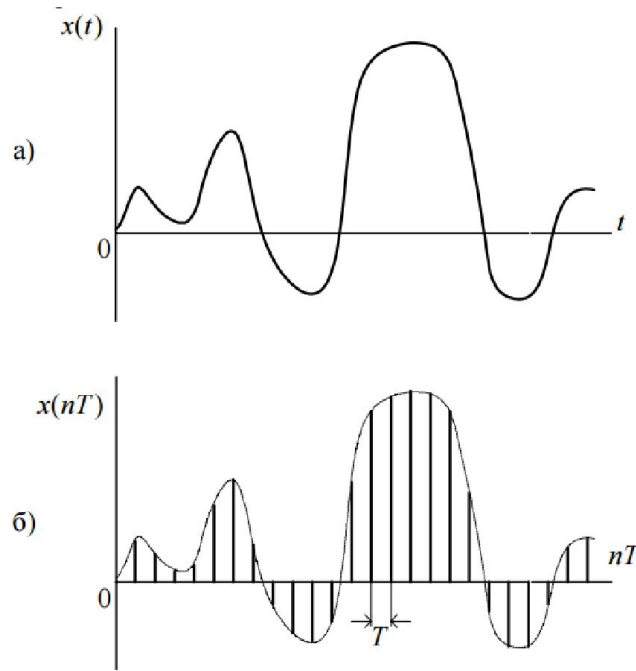


Рис. 1.1. Примеры аналогового и дискретного сигналов

Он описывается решетчатой функцией (последовательностью)  $x(nT)$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Последовательность  $x(nT)$  определена только в моменты времени  $nT$  и может принимать любые значения из некоторого интервала  $x_1 \leq x \leq x_2$ . Комплексный дискретный сигнал описывается двумя вещественными последовательностями  $x(nT) = x_1(nT) + jx_2(nT)$ .

**Цифровым** называют сигнал, дискретный по времени и квантованный по состоянию.

Такой сигнал описывается квантованной решетчатой функцией (квантованной последовательностью  $x(nT)$ ), отсчеты которой в каждый момент времени  $nT$  принимают квантованные значения из некоторого интервала  $x_1 \leq x \leq x_2$ .

Интервал  $T$  называют периодом дискретизации, а обратную величину  $T = \frac{1}{f_d}$  – **частотой дискретизации**.

При анализе дискретных сигналов удобно пользоваться нормированным временем

$$\hat{t} = \frac{t}{T},$$

откуда при  $t = nT$

$$\hat{t} = \frac{t}{T} = \frac{nT}{T} = n.$$

Номер  $n$  отсчета дискретного сигнала является нормированным временем:

номер  $n$  означает, что отсчет взят в момент  $nT$ .

Переход к нормированному времени позволяет рассматривать дискретный сигнал как функцию целочисленной переменной  $n$ .

Обозначения дискретного сигнала  $x(n)$  и  $x(nT)$  считают тождественными

$$x(nT) = x(n).$$

# Типовые дискретные

*Цифровой единичный импульс*, описываемый последовательностью

$$u_0(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n \neq 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

из чего следует, что этот сигнал равен единице при  $n = 0$  и нулю при всех остальных значениях  $n$  (рис. 1.2, а).

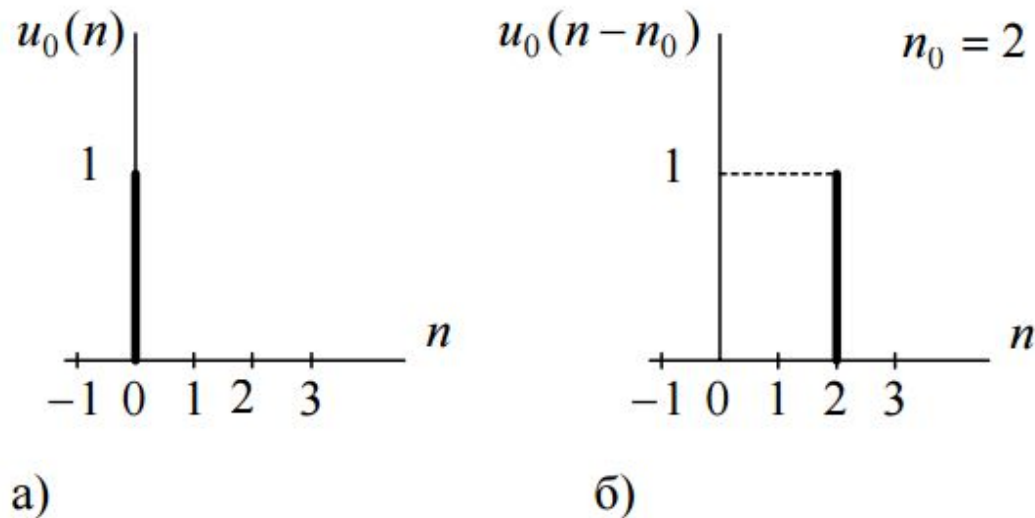


Рис. 1.2. Цифровой единичный импульс

*Задержанный цифровой единичный импульс*  
(рис. 1.2, б).

$$u_0(n - n_0) = \begin{cases} 1, & n = n_0; \\ 0, & n \neq n_0 \end{cases}$$

Дискретная экспонента, описываемая последовательностью

$$x(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0; \\ 0, & n < 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

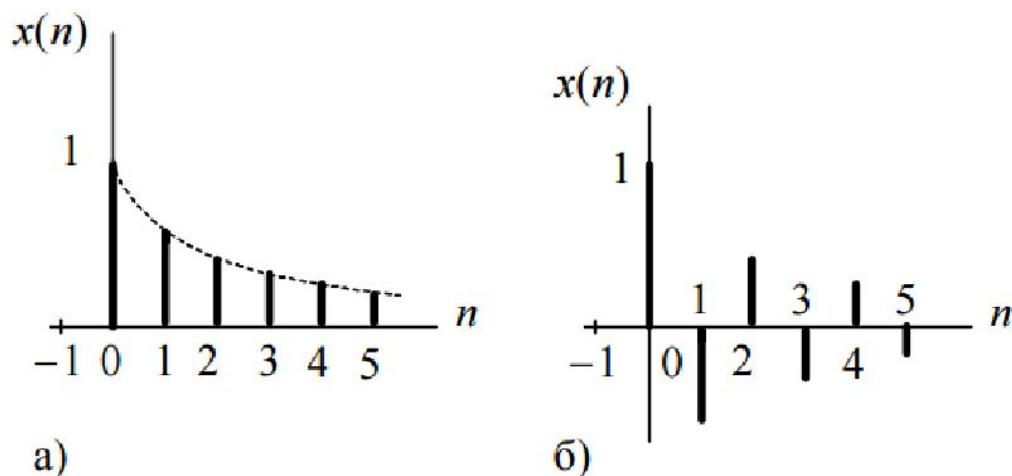


Рис. 1.3. Дискретная экспонента

Вид дискретной экспоненты определяется величиной и знаком параметра  $a$ , а именно:

при  $|a| < 1$  и  $a > 0$  дискретная экспонента будет *убывающей, знакопостоянной* (рис. 1.3, а);

при  $|a| < 1$  и  $a < 0$  – *убывающей, знакопеременной* (рис. 1.3, б);

при  $|a| > 1$  – *возрастающей*;

при  $|a| = 1$  и  $a > 0$  – *цифровым единичным скачком*;

при  $|a| = 1$  и  $a < 0$  – *знакопеременной последовательностью единиц*.

Дискретный гармонический сигнал (дискретная косинусоида или синусоида); например, дискретная косинусоида, описываемая последовательностью

$$x(n) = A \cos(2\pi fnT) = A \cos(\omega nT), \quad (1.7)$$

где  $T$  – период дискретизации,  
 $A$  – амплитуда,  
 $\omega = 2\pi$  – круговая частота.

Дискретная косинусоида получается из аналоговой

$$x(t) = A \cos(2\pi ft) = A \cos(\omega t)$$

в результате замены непрерывного времени дискретным (рис. 1.4)

$$t \rightarrow nT.$$

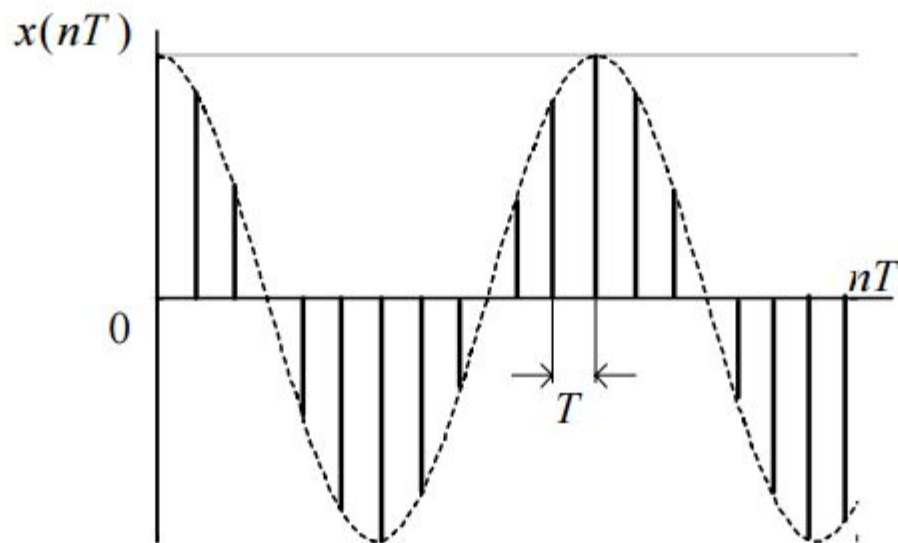


Рис. 1.4. Дискретная косинусоида



Произвольный дискретный сигнал можно описать в виде суммы

$$x(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x(m) u_0(n-m), \quad (1.5)$$

что оказывается удобным при выводе ряда соотношений

Подставляя в (1.5) любое значение  $n$ , получаем тождество, например, для  $x(n)$  при  $n = 2$  имеем

$$x(2) = x(0)u_0(2) + x(1)u_0(1) + x(2)u_0(0) + x(3)u_0(-1) + \dots,$$

откуда, с учетом определения цифрового единичного импульса  $u_0(n)$  (1.3), имеем

$$x(2) \equiv x(2).$$

*Дискретный комплексный гармонический сигнал, описываемый комплексной последовательностью*

$$x(n) = Ae^{j\omega T n},$$

или, при разложении по формуле Эйлера, двумя вещественными последовательностями – косинусоидой (вещественная часть) и синусоидой (мнимая часть)

$$x(n) = A \cos(\omega T n) + jA \sin(\omega T n).$$



# Основная полоса частот. Нормирование

Согласно теореме Котельникова максимальная частота аналогового сигнала  $f_{\text{в}}$  не должна превышать половины частоты дискретизации  $f_{\text{д}}$  этого сигнала, следовательно, в частотной области все дискретные сигналы целесообразно рассматривать только в области  $\left[0; \frac{f_{\text{д}}}{2}\right]$ , которая называется *основной полосой частот* или *основным диапазоном частот*.

Это позволяет ввести понятие *нормированной частоты*

$$\hat{f} = \frac{f}{f_{\text{д}}} = fT,$$

или

$$\hat{\omega} = \frac{\omega}{f_{\text{д}}} = \omega T, \quad (1.8)$$

в результате чего основная полоса частот станет равной  $\hat{f} \in [0; 0,5]$  или  $\hat{\omega} \in [0; \pi]$ . Обычно отдается предпочтение абсолютной частоте  $f$  и нормированной частоте  $\hat{\omega}$

Введение нормированной частоты указывает на то, что в ЦОС важны не абсолютные значения частот сигнала и дискретизации, а их отношение. Покажем это на простейшем примере двух дискретных косинусоид:

$$x_1(n) = \cos(2\pi f_1 T_1 n) = \cos\left(2\pi \frac{f_1}{f_{д1}} n\right),$$

где  $f_1 = 2$  Гц,  $f_{д1} = 16$  Гц;

$$x_2(n) = \cos(2\pi f_2 T_2 n) = \cos\left(2\pi \frac{f_2}{f_{д2}} n\right),$$

где  $f_2 = 5$  кГц,  $f_{д2} = 40$  кГц.

Подставив указанные значения частот, получим одинаковые дискретные сигналы в шкале нормированной частоты  $\hat{\omega}$ :

$$x_1(n) = \cos\left(2\pi \frac{2}{16} n\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} n\right);$$
$$x_2(n) = \cos\left(2\pi \frac{5000}{40000} n\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} n\right).$$

# ЛИНЕЙНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

**Системой обработки сигналов** называют объект, выполняющий требуемое преобразование (обработку) входного сигнала в выходной.

Системой может быть как физическое устройство, так и математическое преобразование.

По умолчанию будем подразумевать системы с одним входом и одним выходом.

Входной сигнал называют **воздействием**, выходной – **реакцией**.

Систему называют **линейной**, если она обладает свойствами:

- аддитивности: реакция на сумму воздействий равна сумме реакций на каждое из воздействий (принцип суперпозиции);
- однородности: умножению воздействия на весовой коэффициент соответствует реакция, умноженная на тот же коэффициент.

Соотношение вход/выход линейной системы описывается линейным уравнением.

Систему называют **стационарной**, если она обладает свойством инвариантности во времени, в соответствии с которым задержка воздействия на некоторое время приводит к задержке реакции на то же время.

Параметры стационарной системы неизменны во времени.

По умолчанию будем подразумевать стационарные системы.

Линейная система называется *дискретной*, если воздействие и реакция представляют собой дискретные сигналы  $x(nT)$  и  $y(nT)$  (рис. 1.5).

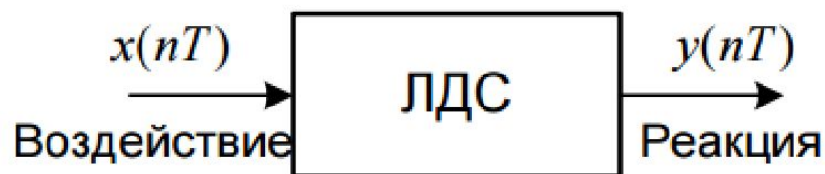


Рис. 1.5. Линейная дискретная система

Начальные условия дискретной системы могут быть нулевыми или ненулевыми. Признаком *нулевых* начальных условий является отсутствие реакции  $y(nT) = 0$  при отсутствии воздействия  $x(nT) = 0$ .

Обозначив начальный момент времени  $n = 0$ , *нулевые начальные условия* можно записать в следующем общем виде:

$$\begin{cases} x[(n-i)T]_{n-i < 0, i=1, 2, \dots} = 0; \\ y[(n-k)T]_{n-k < 0, k=1, 2, \dots} = 0. \end{cases} \quad (1.9)$$

Признаком *ненулевых* начальных условий является наличие ненулевых значений реакции (свободных колебаний) при отсутствии воздействия.



Дискретная система называется *физически реализуемой*, если для нее выполняются следующие условия (условия физической реализуемости): при нулевых начальных условиях реакция не может возникнуть раньше воздействия; значения реакции  $y(nT)$  в каждый момент времени  $n$  зависят от текущего  $x(nT)$  и предшествующих значений воздействия  $x[(n - m)T]$ ,  $m > 0$ , но не зависят от его последующих значений  $x[(n + m)T]$ ,  $m \geq 1$ .

Условия физической реализуемости отображают причинно-следственную связь (принцип причинности).

Линейные дискретные системы (ЛДС) помимо *временной* области описываются в  $z$ -области и в *частотной* области. В каждой из этих областей для ЛДС определяется:

- основная характеристика;
- соотношение вход/выход.

## ОПИСАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ

Во временной области основной характеристикой ЛДС является импульсная характеристика.

*Импульсной характеристикой (ИХ)  $h(nT)$  ЛДС называется ее реакция на цифровой единичный импульс  $u_0(nT)$  при нулевых начальных условиях (рис. 1.6).*

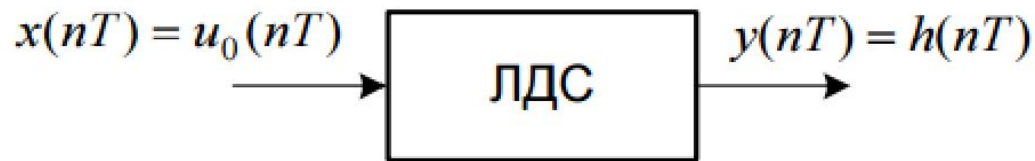


Рис. 1.6. К определению импульсной характеристики

Соотношение вход/выход ЛДС отображает взаимосвязь между ее входным  $x(nT)$  и выходным  $y(nT)$  сигналами, т. е. реакцию ЛДС на произвольное воздействие.

Во временной области соотношение вход/выход может описываться:

- формулой свертки (название уравнения), если для определения реакции используется импульсная характеристика;
- разностным уравнением, если для определения реакции используются параметры ЛДС.



## Формула свертки

Получим уравнение взаимосвязи между входным  $x(nT)$  и выходным  $y(nT)$  сигналами для ЛДС, заданной своей импульсной характеристикой  $h(nT)$ . Воспользуемся определением ИХ и свойствами ЛДС. Будем последовательно записывать соответствия, указываемые стрелкой, между воздействием и реакцией:

- по *определению*: воздействию в виде цифрового единичного импульса соответствует реакция, называемая импульсной характеристикой

$$u_0(nT) \rightarrow h(nT);$$

- на основании свойства *инвариантности во времени* для стационарных линейных систем: воздействию, задержанному на время  $mT$ , где  $m = \text{const}$ , соответствует реакция, задержанная на то же время

$$u_0(nT - mT) \rightarrow h(nT - mT);$$



- на основании свойства *однородности* линейных систем: умножению воздействия на весовой коэффициент – константу  $x(mT)$  – соответствует реакция, умноженная на тот же коэффициент

$$u_0(nT - mT)x(mT) \rightarrow h(nT - mT)x(mT);$$

- на основании свойства *аддитивности* линейных систем: реакция на сумму воздействий равна сумме реакций на каждое из воздействий

$$\sum_{m=0}^{\infty} u_0(nT - mT)x(mT) \rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} h(nT - mT)x(mT);$$

- слева имеем воздействие в виде суммы (1.5)

$$x(nT) \rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} u_0(nT - mT)x(mT),$$

а справа – реакцию

$$y(nT) = \sum_{m=0}^{\infty} h(nT - mT)x(mT), \quad (1.10)$$

где  $h(nT - mT)$  – импульсная характеристика, задержанная на  $m$  периодов дискретизации.

Линейное уравнение (1.10) называют *формулой свертки*, согласно которой реакция  $y(nT)$  вычисляется как дискретная свертка воздействия  $x(nT)$  и импульсной характеристики  $h(nT)$ .

Выполнив замену переменных в (1.10), можно получить другой вариант записи формулы свертки

$$y(nT) = \sum_{m=0}^{\infty} h(mT)x(nT - mT). \quad (1.11)$$

Для нормированного времени формула свертки в двух вариантах записи (1.10) и (1.11) принимает вид соответственно

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(n - m)x(m); \quad (1.12)$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n - m). \quad (1.13)$$

Выбор варианта формулы свертки определяется удобством применения в конкретном случае.

Линейная дискретная система, соотношение вход/выход которой описывается в виде формулы свертки, отвечает условиям *физической реализуемости*: при нулевых начальных условиях (1.9)

$$x(n - m)|_{n-m < 0} = 0$$

реакция не может возникнуть раньше воздействия; значения реакции в каждый момент времени  $n$  зависят только от текущего и предшествующих значений воздействия, но не зависят от его последующих значений.

Линейные уравнения (1.12)–(1.13) решаются *методом прямой подстановки* при нулевых начальных условиях, поэтому *формула свертки* непосредственно описывает *алгоритм* вычисления реакции по известному воздействию и импульсной характеристике ЛДС.



**Пример 1.1.** Вычислить реакцию ЛДС по формуле свертки. Импульсная характеристика и воздействие заданы графически (рис. 1.7–1.8). Требуется определить восемь отсчетов реакции.

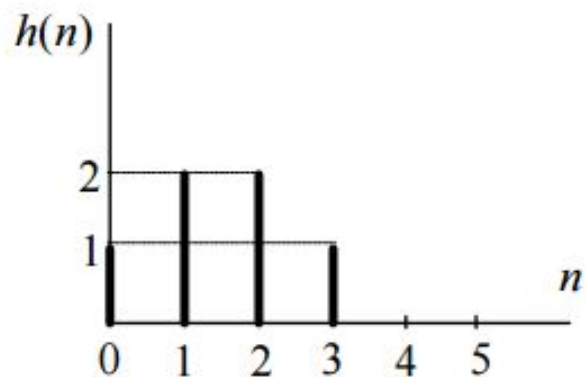


Рис. 1.7. Импульсная характеристика

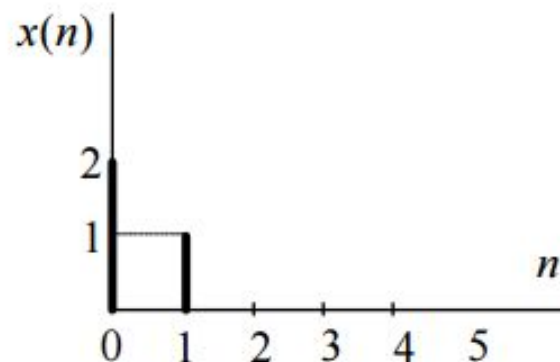


Рис. 1.8. Воздействие

**Решение** приведено в табл. 1.1, а график вычисленной реакции – на рис. 1.9.

Таблица 1.1

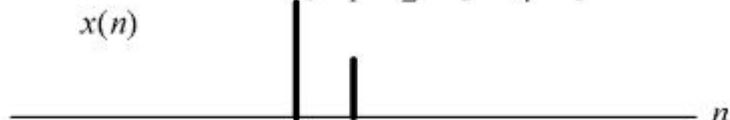
Вычисление реакции по формуле свертки

$n$	Реакция $y(n)$
0	$y(0) = h(0)x(0) + h(1)x(-1) + h(2)x(-2) + \dots = h(0)x(0) = 1 \cdot 2 = 2$
1	$y(1) = h(0)x(1) + h(1)x(0) + h(2)x(-1) + \dots = h(0)x(1) + h(1)x(0) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 5$
2	$y(2) = h(0)x(2) + h(1)x(1) + h(2)x(0) + h(3)x(-1) + \dots =$ $= h(0)x(2) + h(1)x(1) + h(2)x(0) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 6$
3	$y(3) = h(0)x(3) + h(1)x(2) + h(2)x(1) + h(3)x(0) + h(4)x(-1) + \dots = h(0)x(3) +$ $+ h(1)x(2) + h(2)x(1) + h(3)x(0) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 4$
4	$y(4) = h(0)x(4) + h(1)x(3) + h(2)x(2) + h(3)x(1) + h(4)x(0) + h(5)x(-1) + \dots =$ $= h(0)x(4) + h(1)x(3) + h(2)x(2) + h(3)x(1) + h(4)x(0) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 1$
5	$y(5) = h(0)x(5) + h(1)x(4) + h(2)x(3) + h(3)x(2) + h(4)x(1) + h(5)x(0) +$ $+ h(6)x(-0) + \dots = h(0)x(5) + h(1)x(4) + h(2)x(3) + h(3)x(2) + h(4)x(1) + h(5)x(0) =$ $= 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0$
6	$y(6) = 0$
7	$y(7) = 0$

Импульсная характеристика  
а



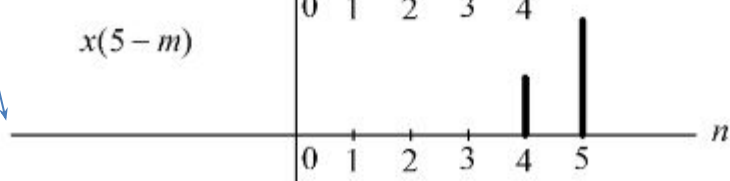
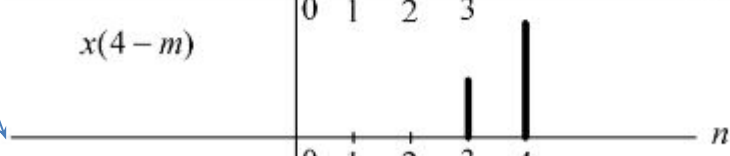
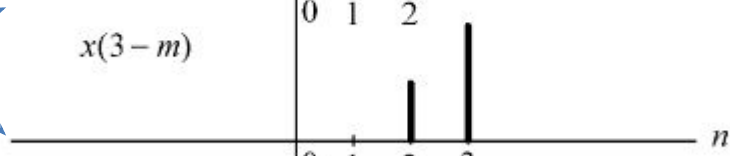
Вх. воздействие



Зеркальное отражение  
вх. воздействия



Скольжение  
вх. воздействия



а

б

в

г

д

е

ж

з



если длительность воздействия и/или импульсной характеристики *бесконечна*, то длительность реакции также бесконечна;

если длительности воздействия  $x(nT)$  и импульсной характеристики  $h(nT)$  *конечны* и равны  $NT$  и  $MT$  соответственно, то длительность реакции  $y(nT)$  также конечна и равна  $LT$ , где

$$L = N + M - 1 .$$

При  $n \geq L$  последовательности (импульсная характеристика и зеркально отображенное скользящее воздействие) "расходятся" и  $y(nT) = 0$ .

Если воздействие и импульсная характеристика конечны, формулы приобретают вид:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{L-1} h(n-m)x(m) ;$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{L-1} h(m)x(n-m) .$$

В примере имеем длину воздействия  $N = 2$  и длину импульсной характеристики  $M = 4$ , поэтому длина  $L$  реакции равна

$$L = 4 + 2 - 1 = 5 .$$



## Разностное уравнение

Взаимосвязь между воздействием  $x(nT)$  и реакцией  $y(nT)$  – соотношение вход/выход – может описываться *разностным уравнением* (РУ)

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x[(n-i)T] - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y[(n-k)T], \quad (1.14)$$

где  $b_i, a_k$  – коэффициенты уравнения (вещественные константы);  
 $x(nT), y(nT)$  – воздействие и реакция (вещественные или комплексные сигналы);

$i, k$  – значения задержек воздействия и реакции соответственно;

$N, M$  – константы;

$x[(n-i)T], y[(n-k)T]$  – воздействие и реакция, задержанные на  $i$  и  $k$  периодов дискретизации соответственно.

Коэффициенты  $b_i$  и  $a_k$  называются *внутренними параметрами* (*параметрами*) ЛДС.

Для нормированного времени разностное уравнение (1.14) принимает вид

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y(n-k). \quad (1.15)$$

Линейная дискретная система, соотношение вход/выход которой описывается в виде разностного уравнения (1.15), отвечает условиям *физической реализуемости*: при нулевых начальных условиях (1.9) реакция не может возникнуть раньше воздействия; значения реакции в каждый момент времени  $n$  зависят только от текущего и предшествующих значений воздействия, но не зависят от его последующих значений.

*Разностное уравнение* (1.15) решается *методом прямой подстановки* при нулевых начальных условиях (1.9), следовательно, оно непосредственно описывает *алгоритм* вычисления реакции по известному воздействию и параметрам ЛДС.



**Пример 1.2.** Решить разностное уравнение

$$y(n) = x(n) - 0,5y(n - 1)$$

методом прямой подстановки при заданном воздействии и нулевых начальных условиях

$$x(n) = 0,1^n .$$

Требуется определить 5 отсчетов реакции.

**Решение** приведено в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Вычисление реакции методом прямой подстановки

<i>n</i>	Воздействие	Реакция
0	$x(0) = 1$	$y(0) = x(0) - 0,5y(-1) = 1 - 0,5 \cdot 0 = 1$
1	$x(1) = 0,1$	$y(1) = x(1) - 0,5y(0) = 0,1 - 0,5 \cdot 1 = 0,1 - 0,5 = -0,4$
2	$x(2) = 0,01$	$y(2) = x(2) - 0,5y(1) = 0,01 - 0,5 \cdot (-0,4) = 0,01 + 0,2 = 0,21$
3	$x(3) = 0,001$	$y(3) = x(3) - 0,5y(2) = 0,001 - 0,5 \cdot 0,21 = 0,001 - 0,105 = -0,104$
4	$x(4) = 0,0001$	$y(4) = x(4) - 0,5y(3) = 0,0001 - 0,5 \cdot (-0,104) = 0,0001 + 0,052 = 0,0521$
⋮	⋮	⋮

## Рекурсивные и нерекурсивные линейные дискретные системы

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y(n-k). \quad (1.15)$$

Линейная дискретная система называется *рекурсивной*, если хотя бы один из коэффициентов  $a_k$  разностного уравнения (1.15) не равен нулю:

$$a_k \neq 0 \text{ хотя бы для одного из значений } k.$$

*Порядком* рекурсивной ЛДС называют порядок РУ (1.15), т. е.  $\max\{(M-1), (N-1)\}$ .

Согласно (1.15) реакция  $y(n)$  *рекурсивной* ЛДС в каждый момент времени  $n$  определяется:

- текущим отсчетом воздействия  $x(n)$ ;
- предысторией воздействия  $x(n-i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N-1$ ;
- предысторией реакции  $y(n-k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, M-1$ .

Примеры разностных уравнений рекурсивной ЛДС:

- *первого* порядка

$$y(n) = b_0 x(n) + b_{1x}(n-1) - a_1 y(n-1); \quad (1.16)$$

- *второго* порядка

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2). \quad (1.17)$$

Линейная дискретная система называется *нерекурсивной*, если все коэффициенты  $a_k$  разностного уравнения (1.15) равны нулю:

$$a_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, M - 1.$$

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y(n-k). \quad (1.15)$$

Для *нерекурсивной* ЛДС разностные уравнения (1.14)–(1.15) принимают вид соответственно

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x[(n-i)T]; \quad (1.18)$$

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i). \quad (1.19)$$

*Порядок* *нерекурсивной* ЛДС равен  $(N - 1)$ .

Согласно РУ (1.19) реакция  $y(n)$  *нерекурсивной* ЛДС в каждый момент времени  $n$  определяется:

- текущим отсчетом воздействия  $x(n)$ ;
- предысторией воздействия  $x(n-i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N - 1$ .

Пример РУ *нерекурсивной* ЛДС второго порядка:

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2). \quad (1.20)$$