Лекция №4

Описание линейных дискретных систем во временной области

Дискретным называется сигнал, дискретный во времени и непрерывный по состоянию.

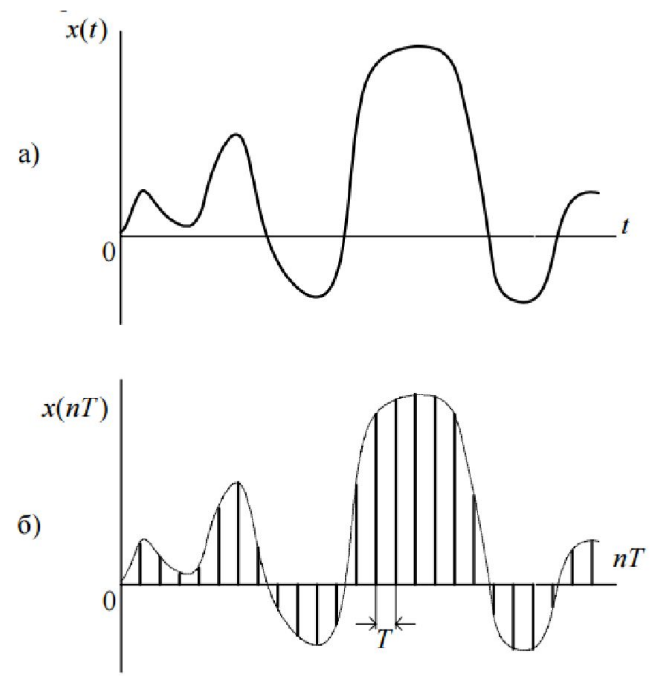


Рис. 1.1. Примеры аналогового и дискретного сигналов

Он описывается решетчатой функцией (последовательностью) x(nT), где n = 0, 1, 2, Последовательность x(nT) определена только в моменты времени nT и может принимать любые значения из некоторого интервала $x_1 \le x \le x_2$.

Комплексный дискретный сигнал описывается двумя вещественными последовательностями $x(nT) = x_1(nT) + jx_2(nT)$.

Цифровым называют сигнал, дискретный по времени и квантованный по состоянию.

Такой сигнал описывается квантованной решетчатой функцией (квантованной последовательностью ***x (nT)*** , отсчеты которой в каждый момент времени ***nT*** принимают квантованные значения из некоторого интервала $x_1 \le x \le x_2$.

Интервал Т называют периодом дискретизации, а обратную величину Т $= \frac{1}{f_д}$ – ***частотой дискретизации***.

При анализе дискретных сигналов удобно пользоваться нормированным временем

$$\hat{t} = \frac{t}{T},$$

откуда при $t = nT$

$$\hat{t} = \frac{t}{T} = \frac{nT}{T} = n .$$

Номер ***n*** отсчета дискретного сигнала является нормированным временем:

номер ***n*** означает, что отсчет взят в момент ***nT***.

Переход к нормированному времени позволяет рассматривать
дискретный сигнал как функцию целочисленной переменной ***n*** .

Обозначения дискретного сигнала ***x(n)*** и ***x(nT)***
считают тождественными

$$x(nT) = x(n).$$

Типовые дискретные

Цифровой единичный импульс, описываемый последовательностью

$$u_0(n) = \begin{cases} 1, n = 0; \\ 0, n \neq 0, \end{cases} \qquad (1.3)$$

из чего следует, что этот сигнал равен единице при $n = 0$ и нулю при всех остальных значениях n (рис.1.2, а).

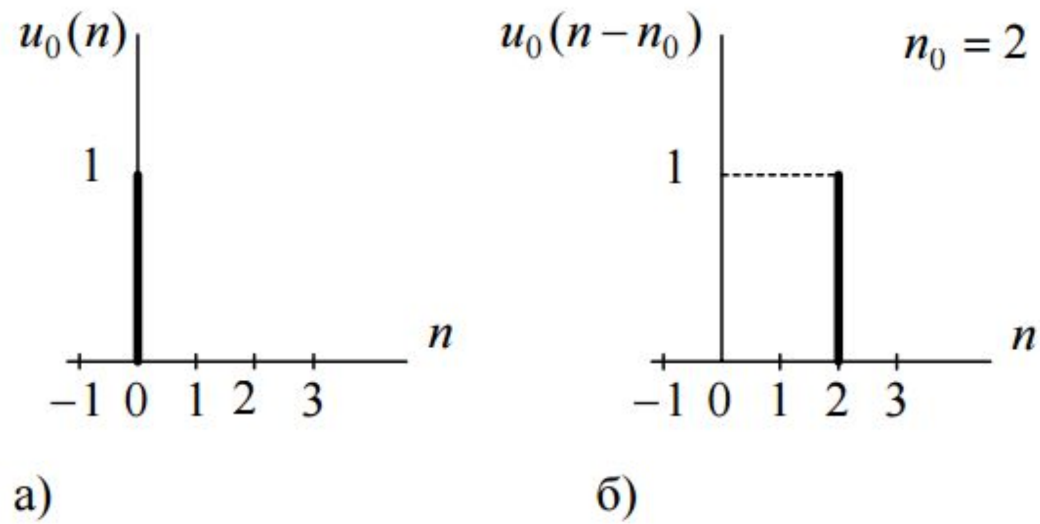


Рис. 1.2. Цифровой единичный импульс

Задержанный цифровой единичный импульс (рис. 1.2, б).

$$u_0(n-n_0) = \begin{cases} 1, \ n = n_0; \\ 0, \ n \neq n_0 \end{cases}$$

Дискретная экспонента, описываемая последовательностью

$$x(n) = \begin{cases} a^n, & n \ge 0; \\ 0, & n < 0. \end{cases} \qquad (1.6)$$

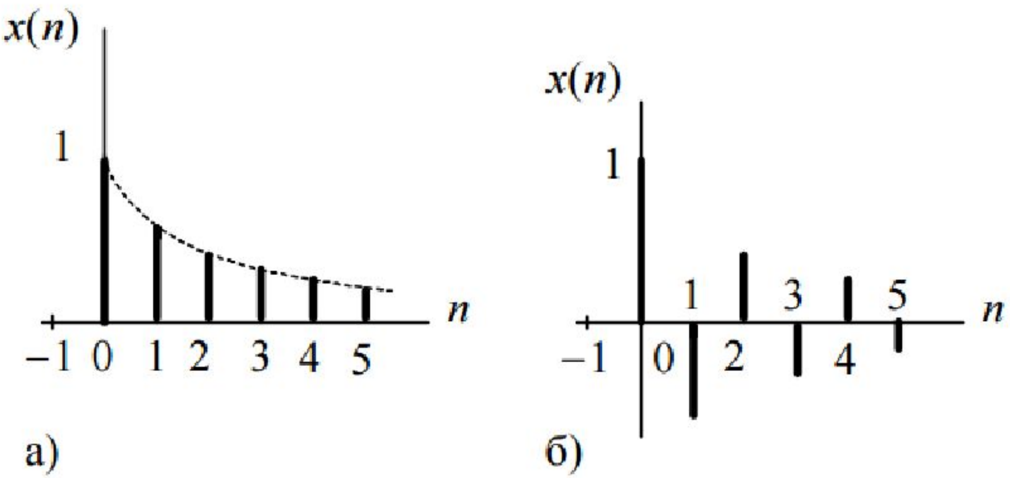


Рис. 1.3. Дискретная экспонента

Вид дискретной экспоненты определяется величиной и знаком параметра a, а именно:

при $|a| < 1$ и $a > 0$ дискретная экспонента будет *убывающей, знакопостоянной* (рис. 1.3, а);

при $|a| < 1$ и $a < 0$ – *убывающей*, знакопеременной (рис. 1.3, б);

при $|a| > 1$ – возрастающей;

при $|a| = 1$ и $a > 0$ – цифровым единичным скачком;

при $|a| = 1$ и $a < 0$ – знакопеременной последовательностью единиц.

Дискретный гармонический сигнал (дискретная косинусоида или синусоида); например, дискретная косинусоида, описываемая последовательностью

$$x(n) = A\cos(2\pi f nT) = A\cos\left(\omega nT\right), \qquad (1.7)$$

где T – период дискретизации,

A – амплитуда,

$\omega = 2\pi$ – круговая частота.

Дискретная косинусоида получается из аналоговой

$$x(t) = A\cos(2\pi f t) = A\cos(\omega t)$$

в результате замены непрерывного времени дискретным (рис. 1.4)

$$t \to nT\ .$$

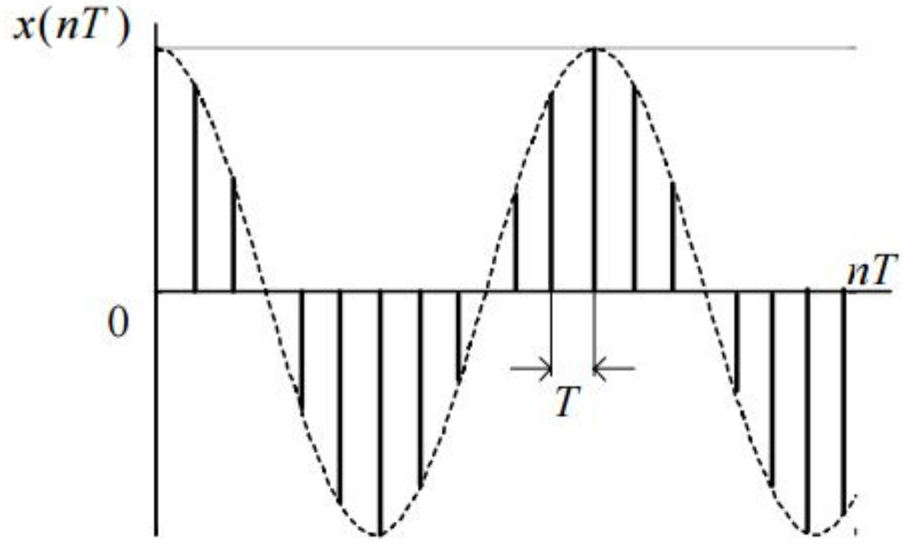


Рис. 1.4. Дискретная косинусоида

Произвольный дискретный сигнал можно описать в виде суммы

$$x(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x(m)\, u_0(n-m)\,, \qquad (1.5)$$

что оказывается удобным при выводе ряда соотношений

Подставляя в (1.5) любое значение n, получаем тождество, например, для $x(n)$ при $n = 2$ имеем

$$x(2) = x(0)u_0(2) + x(1)u_0(1) + x(2)u_0(0) + x(3)u_0(-1) + \ldots,$$

откуда, с учетом определения цифрового единичного импульса $u_0(n)$ (1.3), имеем

$$x(2) \equiv x(2)\,.$$

Дискретный комплексный гармонический сигнал, описываемый комплексной последовательностью

$$x(n) = Ae^{j\omega T n}\,,$$

или, при разложении по формуле Эйлера, двумя вещественными последовательностями – косинусоидой (вещественная часть) и синусоидой (мнимая часть)

$$x(n) = A\cos(\omega Tn) + jA\sin(\omega Tn)\,.$$

Основная полоса частот. Нормирование

Согласно теореме Котельникова максимальная частота аналогового сигнала $f_в$ не должна превышать половины частоты дискретизации $f_д$ этого сигнала, следовательно, в частотной области все дискретные сигналы целесообразно рассматривать только в области $\left[0; \frac{f_д}{2}\right]$, которая называется *основной полосой частот* или *основным диапазоном частот*.

Это позволяет ввести понятие *нормированной частоты*

$$\hat{f} = \frac{f}{f_д} = f\,T,$$

или

$$\hat{\omega} = \frac{\omega}{f_д} = \omega\,T, \tag{1.8}$$

в результате чего основная полоса частот станет равной $\hat{f} \in [0; 0{,}5]$ или $\hat{\omega} \in [0; \pi]$. Обычно отдается предпочтение абсолютной частоте f и нормированной частоте $\hat{\omega}$

Введение нормированной частоты указывает на то, что в ЦОС важны не абсолютные значения частот сигнала и дискретизации, а их отношение. Покажем это на простейшем примере двух дискретных косинусоид:

$$x_1(n) = \cos(2\pi f_1 T_1 n) = \cos(2\pi \frac{f_1}{f_{д1}} n),$$

где $f_1 = 2$ Гц, $f_{д1} = 16$ Гц;

$$x_2(n) = \cos(2\pi f_2 T_2 n) = \cos(2\pi \frac{f_2}{f_{д2}} n),$$

где $f_2 = 5$кГц, $f_{д2} = 40$ кГц.

Подставив указанные значения частот, получим одинаковые дискретные сигналы в шкале нормированной частоты $\widehat{\omega}$:

$$x_1(n) = \cos\left(2\pi \frac{2}{16} n\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} n\right);$$

$$x_2(n) = \cos\left(2\pi \frac{5000}{40000} n\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} n\right).$$

ЛИНЕЙНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

Системой обработки сигналов называют объект, выполняющий требуемое преобразование (обработку) входного сигнала в выходной.

Системой может быть как физическое устройство, так и математическое преобразование.

По умолчанию будем подразумевать системы с одним входом и одним выходом.

Входной сигнал называют **воздействием**, выходной – **реакцией**.

Систему называют **линейной,** если она обладает свойствами:

- аддитивности: реакция на сумму воздействий равна сумме реакций на каждое из воздействий (принцип суперпозиции);
- однородности: умножению воздействия на весовой коэффициент соответствует реакция, умноженная на тот же коэффициент.

Соотношение вход/выход линейной системы описывается линейным уравнением.

Систему называют **стационарной,** если она обладает свойством инвариантности во времени, в соответствии с которым задержка воздействия на некоторое время приводит к задержке реакции на то же время.

Параметры стационарной системы неизменны во времени.

По умолчанию будем подразумевать стационарные системы.

Линейная система называется ***дискретной***, если воздействие и реакция представляют собой дискретные сигналы $x(nT)$ и $y(nT)$ (рис. 1.5).

Рис. 1.5. Линейная дискретная система

Начальные условия дискретной системы могут быть нулевыми или ненулевыми. Признаком *нулевых* начальных условий является отсутствие реакции $y(nT) = 0$ при отсутствии воздействия $x(nT) = 0$.

Обозначив начальный момент времени $n = 0$, ***нулевые начальные условия*** можно записать в следующем общем виде:

$$\begin{cases} x[(n-i)T]\big|_{n-i<0,\, i=1,\, 2...} = 0; \\ y[(n-k)T]\big|_{n-k<0,\, k=1,\, 2...} = 0. \end{cases} \tag{1.9}$$

Признаком *ненулевых* начальных условий является наличие ненулевых значений реакции (свободных колебаний) при отсутствии воздействия.

Дискретная система называется ***физически реализуемой***, если для нее выполняются следующие условия (условия физической реализуемости): при нулевых начальных условиях реакция не может возникнуть раньше воздействия; значения реакции $y(nT)$ в каждый момент времени n зависят от текущего $x(nT)$ и предшествующих значений воздействия $x[(n-m)T]$, $m>0$, но не зависят от его последующих значений $x[(n+m)T]$, $m \geq 1$.

Условия физической реализуемости отображают причинно-следственную связь (принцип причинности).

Линейные дискретные системы (ЛДС) помимо *временной* области описываются в z-области и в *частотной* области. В каждой из этих областей для ЛДС определяется:

- основная характеристика;
- соотношение вход/выход.

ОПИСАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ

Во временной области основной характеристикой ЛДС является импульсная характеристика.

Импульсной характеристикой (ИХ) $h(nT)$ ЛДС *называется ее реакция на цифровой единичный импульс* $u_0(nT)$ *при нулевых начальных условиях* (рис. 1.6).

Рис. 1.6. К определению импульсной характеристики

Соотношение вход/выход ЛДС отображает взаимосвязь между ее входным x(nT) и выходным y(nT) сигналами, т. е. реакцию ЛДС на произвольное воздействие.

Во временной области соотношение вход/выход может описываться:

- формулой свертки (название уравнения), если для определения реакции используется импульсная характеристика;
- разностным уравнением, если для определения реакции используются параметры ЛДС.

Формула свертки

Получим уравнение взаимосвязи между входным $x(nT)$ и выходным $y(nT)$ сигналами для ЛДС, заданной своей импульсной характеристикой $h(nT)$. Воспользуемся определением ИХ и свойствами ЛДС. Будем последовательно записывать соответствия, указываемые стрелкой, между воздействием и реакцией:

- по *определению*: воздействию в виде цифрового единичного импульса соответствует реакция, называемая импульсной характеристикой

$$u_0(nT) \to h(nT);$$

- на основании свойства *инвариантности во времени* для стационарных линейных систем: воздействию, задержанному на время mT, где $m = \text{const}$, соответствует реакция, задержанная на то же время

$$u_0(nT - mT) \to h(nT - mT);$$

- на основании свойства *однородности* линейных систем: умножению воздействия на весовой коэффициент – константу $x(mT)$ – соответствует реакция, умноженная на тот же коэффициент

$$u_0(nT - mT)x(mT) \to h(nT - mT)x(mT);$$

- на основании свойства *аддитивности* линейных систем: реакция на сумму воздействий равна сумме реакций на каждое из воздействий

$$\sum_{m=0}^{\infty} u_0(nT - mT)x(mT) \to \sum_{m=0}^{\infty} h(nT - mT)x(mT);$$

- слева имеем воздействие в виде суммы (1.5)

$$x(nT) \to \sum_{m=0}^{\infty} u_0(nT - mT)x(mT),$$

а справа – реакцию

$$y(nT) = \sum_{m=0}^{\infty} h(nT - mT)x(mT), \qquad (1.10)$$

где $h(nT - mT)$ – импульсная характеристика, задержанная на m периодов дискретизации.

Линейное уравнение (1.10) называют *формулой свертки*, согласно которой реакция $y(nT)$ вычисляется как дискретная свертка воздействия $x(nT)$ и импульсной характеристики $h(nT)$.

Выполнив замену переменных в (1.10), можно получить другой вариант записи формулы свертки

$$y(nT) = \sum_{m=0}^{\infty} h(mT)x(nT - mT). \tag{1.11}$$

Для нормированного времени формула свертки в двух вариантах записи (1.10) и (1.11) принимает вид соответственно

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(n-m)x(m); \tag{1.12}$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m). \tag{1.13}$$

Выбор варианта формулы свертки определяется удобством применения в конкретном случае.

Линейная дискретная система, соотношение вход/выход которой описывается в виде формулы свертки, отвечает условиям *физической реализуемости*: при нулевых начальных условиях (1.9)

$$x(n-m)_{|n-m<0}=0$$

реакция не может возникнуть раньше воздействия; значения реакции в каждый момент времени n зависят только от текущего и предшествующих значений воздействия, но не зависят от его последующих значений.

Линейные уравнения (1.12)–(1.13) решаются *методом прямой подстановки* при *нулевых начальных условиях*, поэтому *формула свертки* непосредственно описывает *алгоритм* вычисления реакции по известному воздействию и импульсной характеристике ЛДС.

Пример 1.1. Вычислить реакцию ЛДС по формуле свертки.

Импульсная характеристика и воздействие заданы графически (рис. 1.7–1.8). Требуется определить восемь отсчетов реакции.

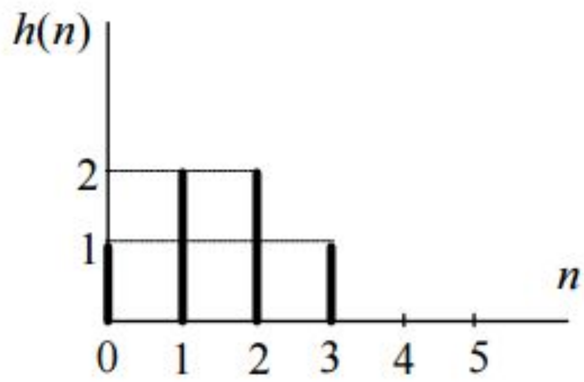


Рис. 1.7. Импульсная характеристика

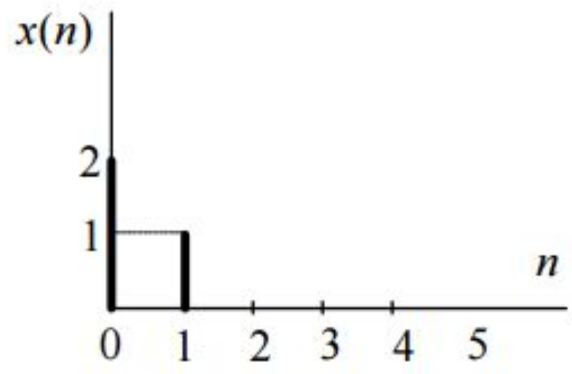


Рис. 1.8. Воздействие

Решение приведено в табл. 1.1, а график вычисленной реакции – на рис. 1.9.

Таблица 1.1

Вычисление реакции по формуле свертки

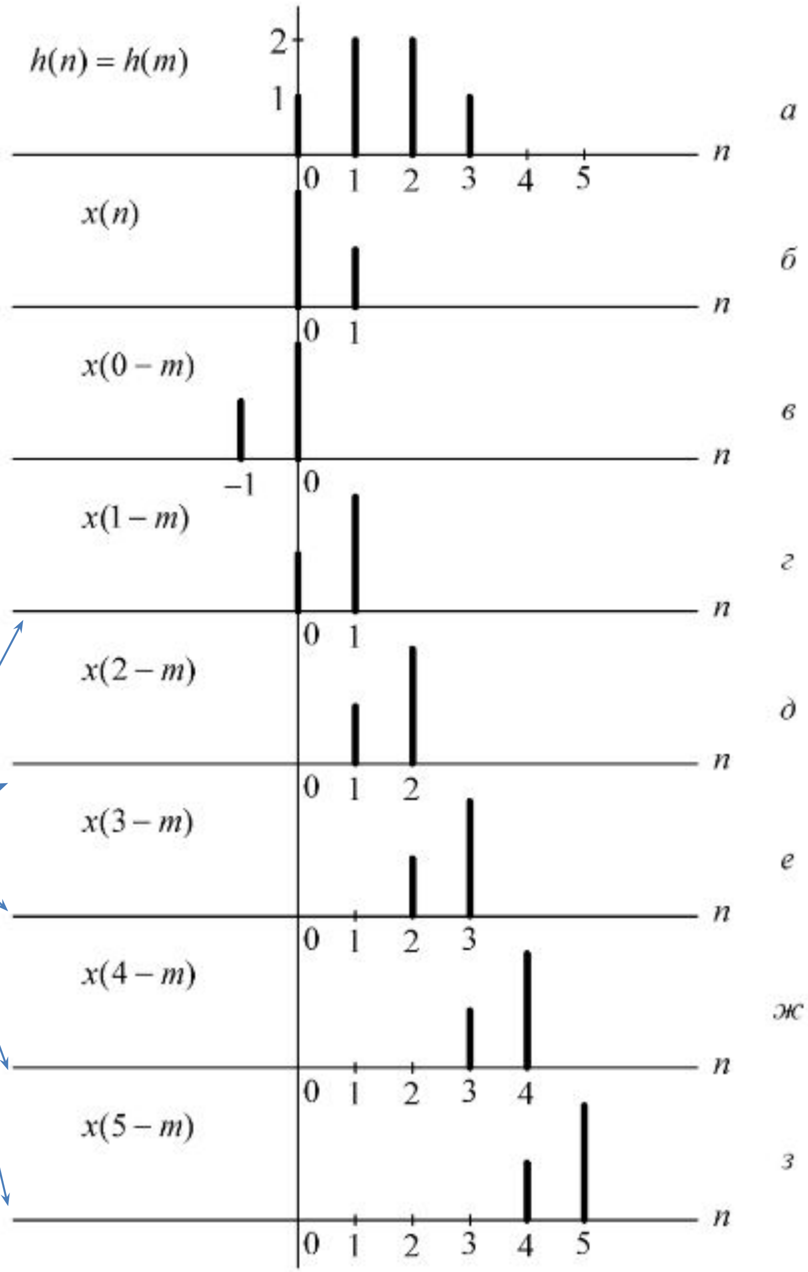
n	**Реакция** $y(n)$
0	$y(0) = h(0)x(0) + h(1)x(-1) + h(2)x(-2) + \ldots = h(0)x(0) = 1 \cdot 2 = 2$
1	$y(1) = h(0)x(1) + h(1)x(0) + h(2)x(-1) + \ldots = h(0)x(1) + h(1)x(0) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 5$
2	$y(2) = h(0)x(2) + h(1)x(1) + h(2)x(0) + h(3)x(-1) + \ldots =$ $= h(0)x(2) + h(1)x(1) + h(2)x(0) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 6$
3	$y(3) = h(0)x(3) + h(1)x(2) + h(2)x(1) + h(3)x(0) + h(4)x(-1) + \ldots = h(0)x(3) +$ $+ h(1)x(2) + h(2)x(1) + h(3)x(0) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 4$
4	$y(4) = h(0)x(4) + h(1)x(3) + h(2)x(2) + h(3)x(1) + h(4)x(0) + h(5)x(-1) + \ldots =$ $= h(0)x(4) + h(1)x(3) + h(2)x(2) + h(3)x(1) + h(4)x(0) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 1$
5	$y(5) = h(0)x(5) + h(1)x(4) + h(2)x(3) + h(3)x(2) + h(4)x(1) + h(5)x(0) +$ $+ h(6)x(-0) + \ldots = h(0)x(5) + h(1)x(4) + h(2)x(3) + h(3)x(2) + h(4)x(1) + h(5)x(0) =$ $= 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0$
6	$y(6) = 0$
7	$y(7) = 0$

Импульсная характеристика

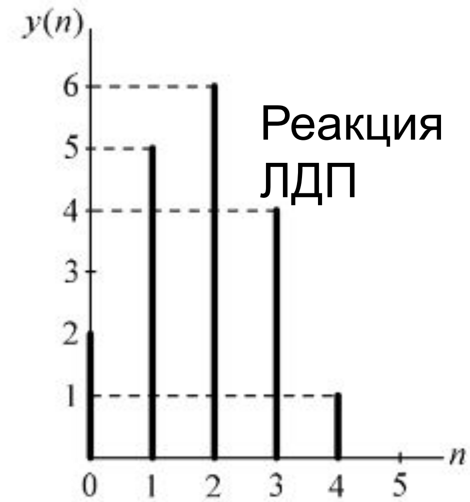
Вх. воздействие

Зеркальное отражение вх. воздействия

Скольжение Вх. воздействия



Реакция ЛДП



если длительность воздействия и/или импульсной характеристики *бесконечна*, то длительность реакции также бесконечна;

если длительности воздействия $x(nT)$ и импульсной характеристики $h(nT)$ *конечны* и равны NT и MT соответственно, то длительность реакции $y(nT)$ также конечна и равна LT, где

$$L = N + M - 1.$$

При $n \geq L$ последовательности (импульсная характеристика и зеркально отображенное скользящее воздействие) "расходятся" и $y(nT) = 0$.

Если воздействие и импульсная характеристика конечны, формулы приобретают вид:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{L-1} h(n-m)\,x(m);$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{L-1} h(m)\,x(n-m).$$

В примере имеем длину воздействия $N = 2$ и длину импульсной характеристики $M = 4$, поэтому длина L реакции равна

$$L = 4 + 2 - 1 = 5.$$

Разностное уравнение

Взаимосвязь между воздействием $x(nT)$ и реакцией $y(nT)$ – соотношение вход/выход – может описываться *разностным уравнением* (РУ)

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x\left[(n-i)T\right] - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y\left[(n-k)T\right], \tag{1.14}$$

где b_i, a_k – коэффициенты уравнения (вещественные константы);

$x(nT), y(nT)$ – воздействие и реакция (вещественные или комплексные сигналы);

i, k – значения задержек воздействия и реакции соответственно;

N, M – константы;

$x\left[(n-i)T\right]$, $y\left[(n-k)T\right]$ – воздействие и реакция, задержанные на i и k периодов дискретизации соответственно.

Коэффициенты b_i и a_k называются *внутренними параметрами* (*параметрами*) ЛДС.

Для нормированного времени разностное уравнение (1.14) принимает вид

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y(n-k). \qquad (1.15)$$

Линейная дискретная система, соотношение вход/выход которой описывается в виде разностного уравнения (1.15), отвечает условиям *физической реализуемости*: при нулевых начальных условиях (1.9) реакция не может возникнуть раньше воздействия; значения реакции в каждый момент времени n зависят только от текущего и предшествующих значений воздействия, но не зависят от его последующих значений.

Разностное уравнение (1.15) решается *методом прямой подстановки* при *нулевых начальных условиях* (1.9), следовательно, оно непосредственно описывает *алгоритм* вычисления реакции по известному воздействию и параметрам ЛДС.

Пример 1.2. Решить разностное уравнение

$$y(n) = x(n) - 0{,}5y(n-1)$$

методом прямой подстановки при заданном воздействии и нулевых начальных условиях

$$x(n) = 0{,}1^n .$$

Требуется определить 5 отсчетов реакции.

Решение приведено в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Вычисление реакции методом прямой подстановки

n	**Воздействие**	**Реакция**
0	$x(0) = 1$	$y(0) = x(0) - 0{,}5y(-1) = 1 - 0{,}5\cdot 0 = 1$
1	$x(1) = 0{,}1$	$y(1) = x(1) - 0{,}5y(0) = 0{,}1 - 0{,}5\cdot 1 = 0{,}1 - 0{,}5 = -0{,}4$
2	$x(2) = 0{,}01$	$y(2) = x(2) - 0{,}5y(1) = 0{,}01 - 0{,}5\cdot(-0{,}4) = 0{,}01 + 0{,}2 = 0{,}21$
3	$x(3) = 0{,}001$	$y(3) = x(3) - 0{,}5y(2) = 0{,}001 - 0{,}5\cdot 0{,}21 = 0{,}001 - 0{,}105 =$ $= -0{,}104$
4	$x(4) = 0{,}0001$	$y(4) = x(4) - 0{,}5y(3) = 0{,}0001 - 0{,}5\cdot(-0{,}104) =$ $= 0{,}0001 + 0{,}052 = 0{,}0521$
⋮	⋮	⋮

Рекурсивные и нерекурсивные линейные дискретные системы

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y(n-k). \qquad (1.15)$$

Линейная дискретная система называется *рекурсивной*, если хотя бы один из коэффициентов a_k разностного уравнения (1.15) не равен нулю:

$$a_k \neq 0 \text{ хотя бы для одного из значений } k.$$

Порядком рекурсивной ЛДС называют порядок РУ (1.15), т. е. $\max\{(M-1), (N-1)\}$.

Согласно (1.15) реакция $y(n)$ *рекурсивной* ЛДС в каждый момент времени n определяется:

- текущим отсчетом воздействия $x(n)$;
- предысторией воздействия $x(n-i)$, $i = 1, 2, ..., N-1$;
- предысторией реакции $y(n-k)$, $k = 1, 2, ..., M-1$.

Примеры разностных уравнений рекурсивной ЛДС:

- *первого* порядка

$$y(n) = b_0 x(n) + b_{1x}(n-1) - a_1 y(n-1); \qquad (1.16)$$

- *второго* порядка

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2). \qquad (1.17)$$

Линейная дискретная система называется *нерекурсивной*, если все коэффициенты a_k разностного уравнения (1.15) равны нулю:

$$a_k = 0\,,\ k = 1, 2, \ldots, M-1\,.$$

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y(n-k)\,. \qquad (1.15)$$

Для нерекурсивной ЛДС разностные уравнения (1.14)–(1.15) принимают вид соответственно

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x\big[(n-i)T\big]; \qquad (1.18)$$

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i)\,. \qquad (1.19)$$

Порядок нерекурсивной ЛДС равен $(N-1)$.

Согласно РУ (1.19) реакция $y(n)$ *нерекурсивной* ЛДС в каждый момент времени n определяется:

- текущим отсчетом воздействия $x(n)$;
- предысторией воздействия $x(n-i)$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$.

Пример РУ нерекурсивной ЛДС второго порядка:

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2)\,. \qquad (1.20)$$