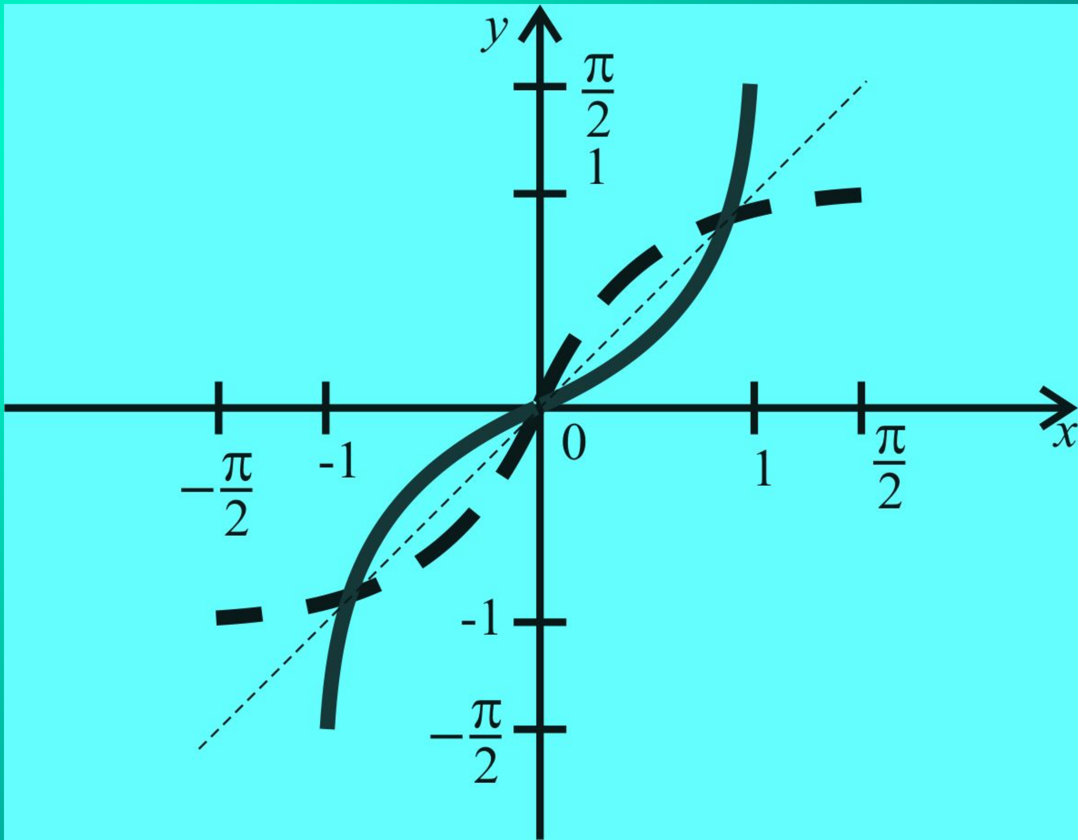
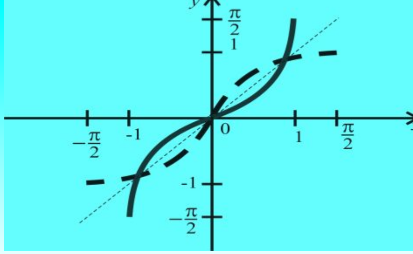
Определение чисел arcsin*a*, arccos*a*, arctg*a*, arcctg*a*



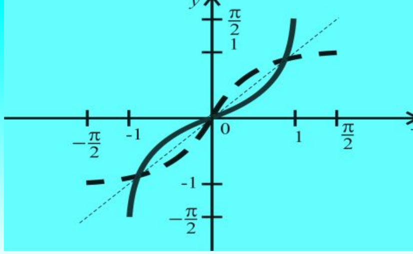
Автор
Календарева Н.Е.

План



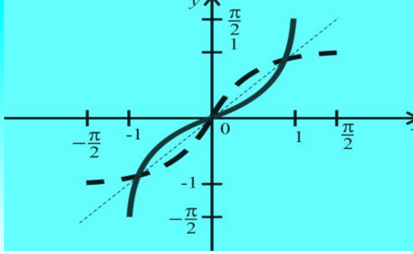
1. Теорема о корне монотонной функции
2. Возрастание синуса на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$
3. Определение арксинуса числа
4. График синуса на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$
5. Примеры
6. Определение арккосинуса числа
7. Определение арктангенса числа
8. Определение арккотангенса числа

Теорема о корне монотонной функции



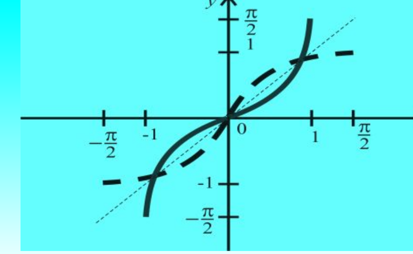
Пусть функция $f(x)$ возрастает (убывает) на промежутке $<p; q>$, а число a – любое из значений функции f из множества значений. Тогда уравнение $f(x) = a$ имеет единственный корень в промежутке $<p; q>$.

Доказательство



Доказательство для возрастающей функции.

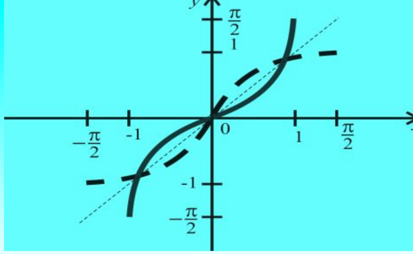
По условию число *a* – какое-либо значение функции *f*, т.е. в промежутке <*p*; *q*> существует такое число *b*, что *f*(*b*) = *a*. Докажем единственность.



От противного. Допустим, на промежутке есть еще одно число $c \neq b$, такое что

$f(c) = a.$

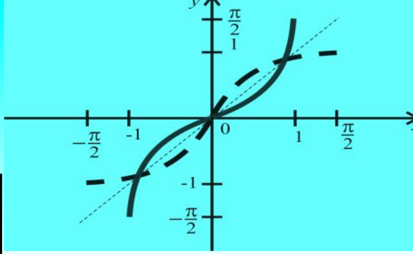
Но $a = f(b)$, т.е. $f(c) = f(b)$. Так как $c \neq b$, то для определенности пусть $c > b$. Но функция f возрастает на <p; q>, поэтому f(c) > f(b). Это противоречит равенству $f(c) = f(b)$.



Следовательно, число *b* одно, т.е. на промежутке <*p*; *q*> функция *f* имеет единственный корень.

Теорема доказана.

Возрастание синуса на отрезке $[-\pi/2;\ \pi/2]$

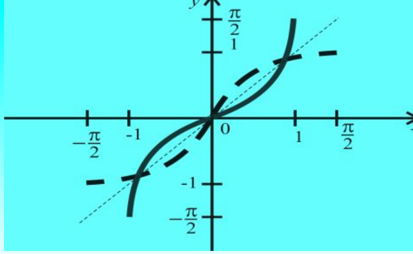


Функция синус на отрезке $[-\pi/2;\ \pi/2]$ возрастает. Докажем это.

Пусть $x_1, x_2 \in (-\pi/2;\ \pi/2)$ и $x_1 < x_2$. Надо показать, что $\sin x_1 < \sin x_2$.

Или разность $\sin x_2 - \sin x_1 > 0$.

$$\sin x_2 - \sin x_1 = 2\cos\frac{x_2 + x_1}{2}\sin\frac{x_2 - x_1}{2}$$



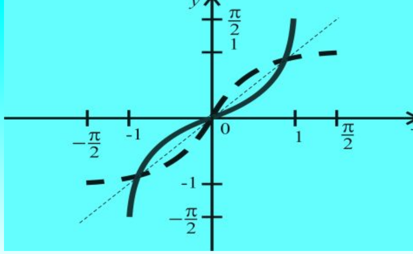
Имеем неравенства $-\frac{\pi}{2} < x_1 < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < x_2 < \frac{\pi}{2}$

Сложим $-\pi < x_1 + x_2 < \pi$, $-\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{2}$

Сл-но, $\cos\frac{x_1 + x_2}{2} > 0$

Рассмотрим два неравенства:

$$-\frac{\pi}{2} < -x_1 < \frac{\pi}{2} \qquad -\frac{\pi}{2} < x_2 < \frac{\pi}{2}$$



Сложим $-\pi < x_2 - x_1 < \pi$.

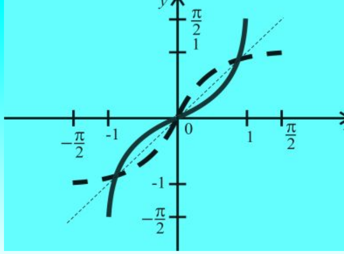
Учтем, что $x_1 < x_2$, т.е. $x_2 - x_1 > 0$.

Получим $$0 < \frac{x_2 - x_1}{2} < \frac{\pi}{2}$$

Следовательно, синус этого числа > 0.

Доказали, что синус возрастает на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$.

Определение арксинуса числа

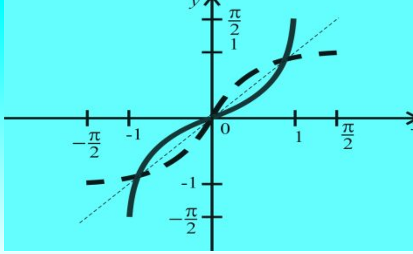


Функция синус принимает значения из отрезка [− 1; 1]. Рассмотрим уравнение

$$\sin x = a, \text{ где } |\, a \,| \le 1.$$

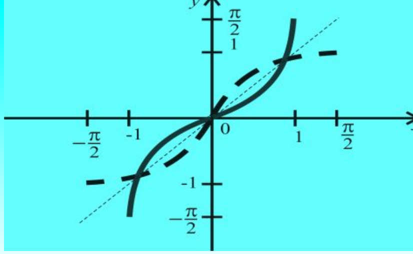
По теореме о корне уравнение $\sin x = a$ имеет один корень b из отрезка [−π/2; π/2] такой, что $\sin b = a$.

Это число b называется *арксинусом* числа a. Обозначают $\arcsin a$.



Арксинусом числа *а* из отрезка [− 1; 1] называется такое число из отрезка [−π/2; π/2], синус которого равен *а*.

График синуса на отрезке [−π/2; π/2]

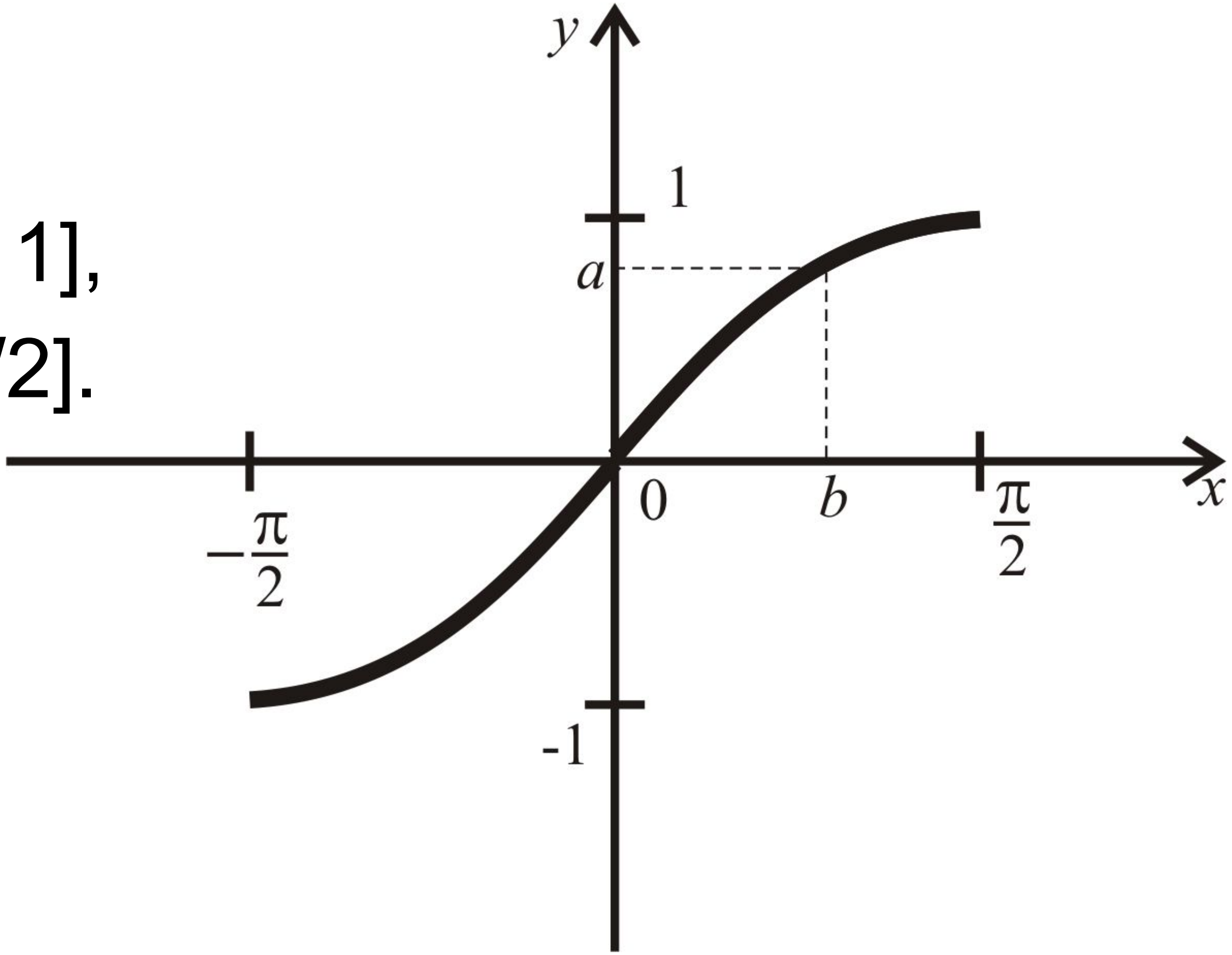


sin*b* = *a*;

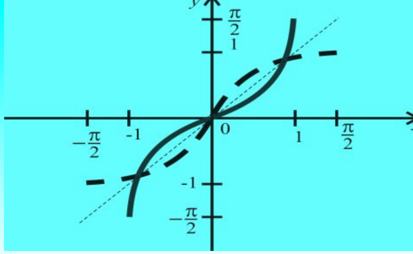
b = arcsin *a,*

где а ∈ [− 1; 1],

b ∈ [−π/2; π/2].



Чему равен arcsin следующих чисел?



1. arcsin0 =

   Ответ: arcsin0 = 0.

2. arcsin1 =

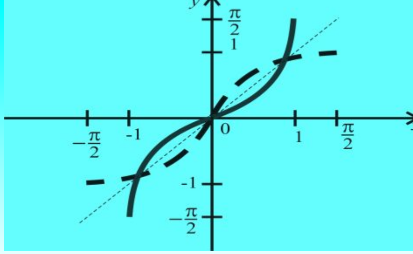
   Ответ: arcsin1 = π/2.

3. arcsin(1/2) =

   Ответ: arcsin(1/2) = π/6.

4. arcsin2

   ТАК **НЕЛЬЗЯ** ПИСАТЬ!



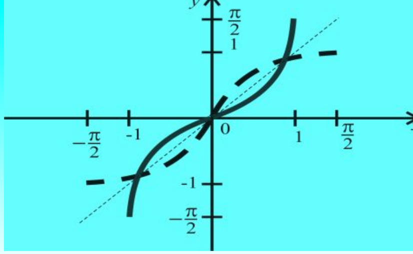
5. arcsin(−1) =

   Ответ: arcsin(−1) = − π/2.

6. arcsin(− 1/2) =

   Ответ: arcsin(− 1/2) = − π/6.

Определение арккосинуса числа



Функция косинус убывает на отрезке [0; π].

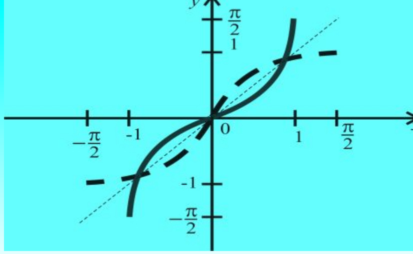
(доказательство аналогично).

Рассмотрим уравнение

$$\cos x = a, \text{ где } |a| \le 1.$$

По теореме о корне это уравнение имеет один корень b из отрезка [0; π] такой, что

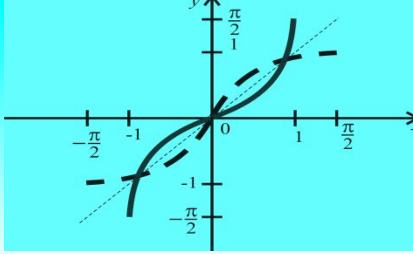
$\cos b = a$.



Это число называется *арккосинусом* числа *a*. Обозначают arccos *a*.

Арккосинусом числа *a* из отрезка [− 1; 1] называется такое число из отрезка [0; π], косинус которого равен *a*.

График косинуса на отрезке [0; π]

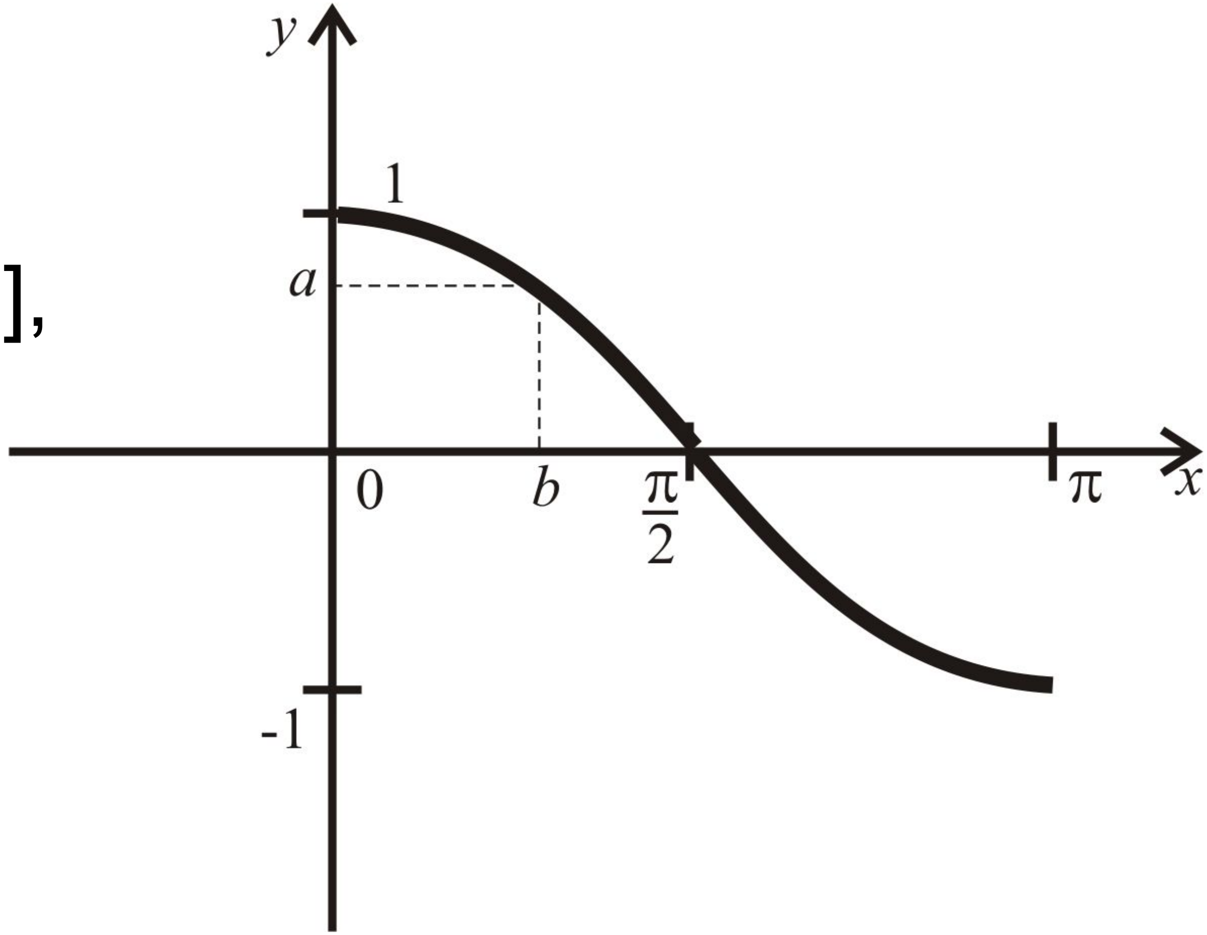


$\cos b = a$;

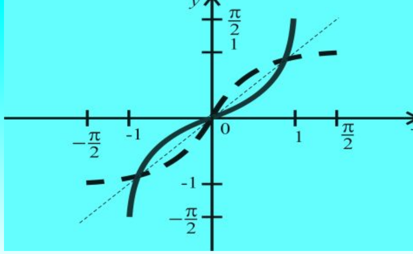
$b = \arccos a$,

где а $\in [-1; 1]$,

$b \in [0; \pi]$.



Чему равен arccos следующих чисел?



1. arccos0 =

   Ответ: arccos0 = π/2.

2. arccos1 =

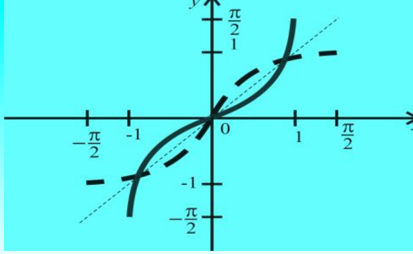
   Ответ: arccos1 = 0.

3. arccos(1/2) =

   Ответ: arccos(1/2) = π/3.

4. arccos(3/2)

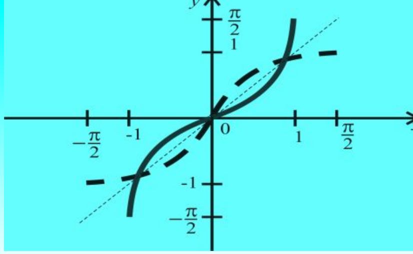
   ТАК **НЕЛЬЗЯ** ПИСАТЬ!



5. arccos(−1) =

Ответ: π.

Определение арктангенса числа



Функция тангенс возрастает на интервале (−π/2; π/2). Ее множество значений – это **R**.

Рассмотрим уравнение tg*x* = *a*, где *a* – любое число.

На промежутке возрастания, т.е. на интервале (−π/2; π/2) это уравнение имеет один корень *b* такой, что tg*b* = *a*.

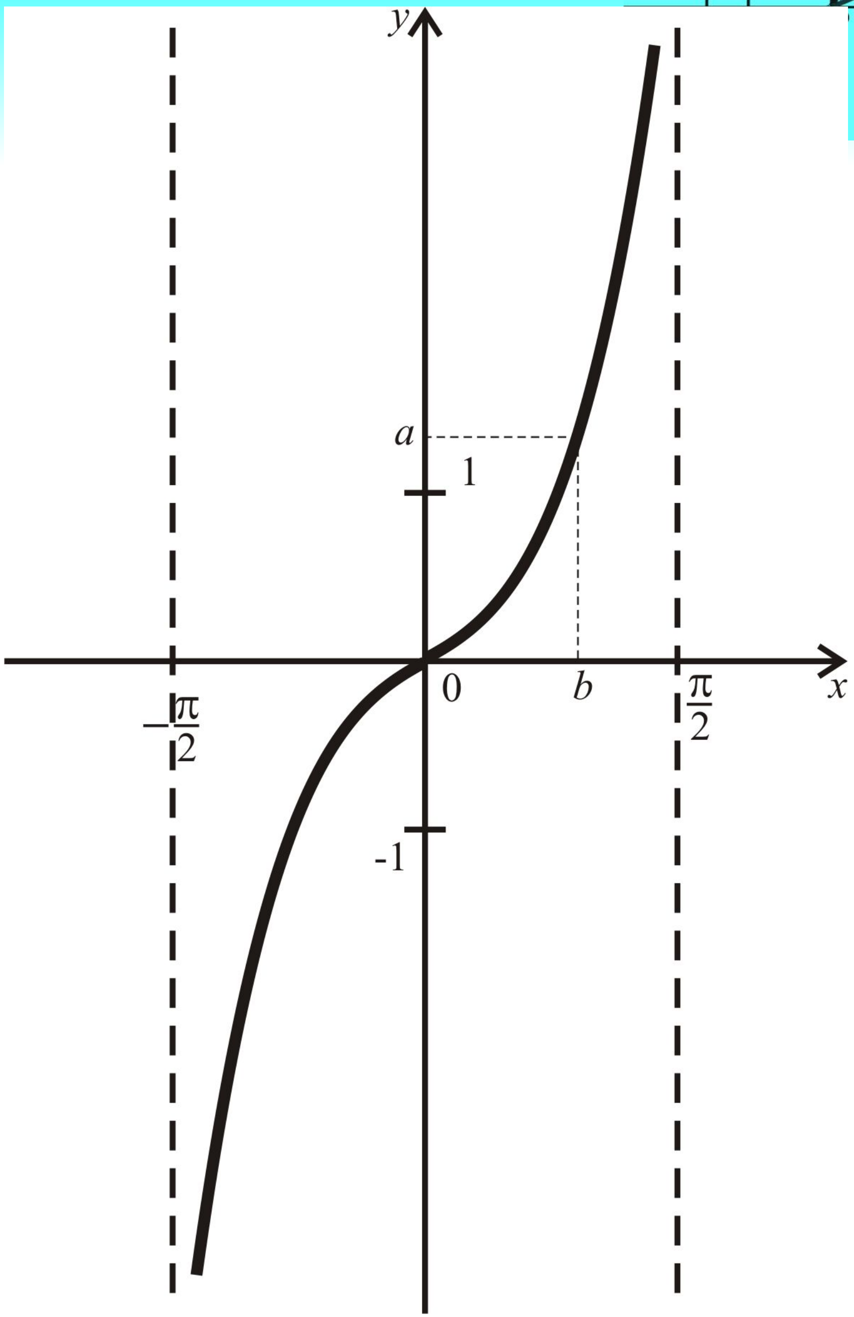
График тангенса на $(-\pi/2;\ \pi/2)$

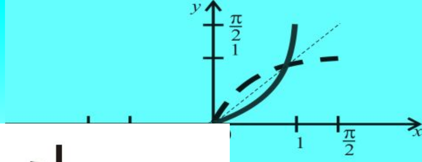
$\mathrm{tg}\,b = a$;

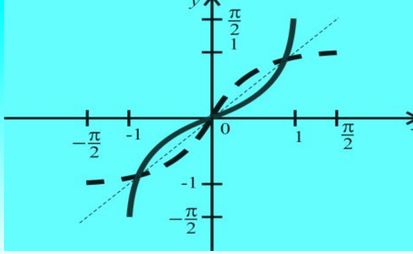
$a = \mathrm{arctg}\,b$,

где $a \in (-\infty;\ +\infty)$,

$b \in (-\pi/2;\ \pi/2)$.



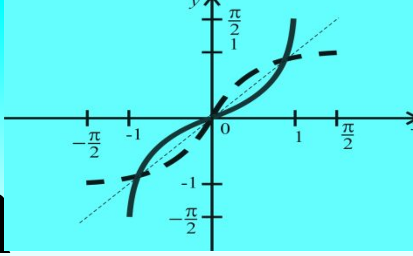




Это число называется *арктангенсом* числа *a* и обозначают arctg *a*.

Арктангенсом числа *a*, где *a* – любое число, называется такое число из интервала (−π/2; π/2), тангенс которого равен *a*.

Определение арккотангенса числа



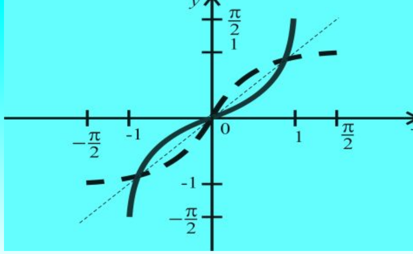
Функция котангенс убывает на интервале (0; π). Ее множество значений – это **R**.

Рассмотрим уравнение ctg*x* = *a*,

где *a* – любое число.

На промежутке убывания, т.е. на

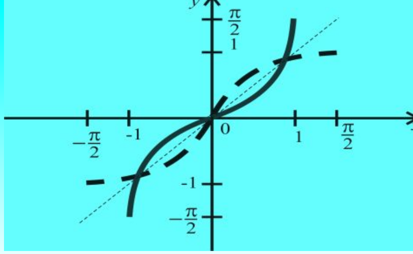
интервале (0; π) это уравнение имеет один корень *b* такой, что ctg*b* = *a*.



Это число называется *арккотангенсом* числа *a* и обозначают arcctg *a*.

Арккотангенсом числа *a*, где *a* – любое число, называется такое число из интервала (0; π), котангенс которого равен *a*.

График котангенса на (0; π)

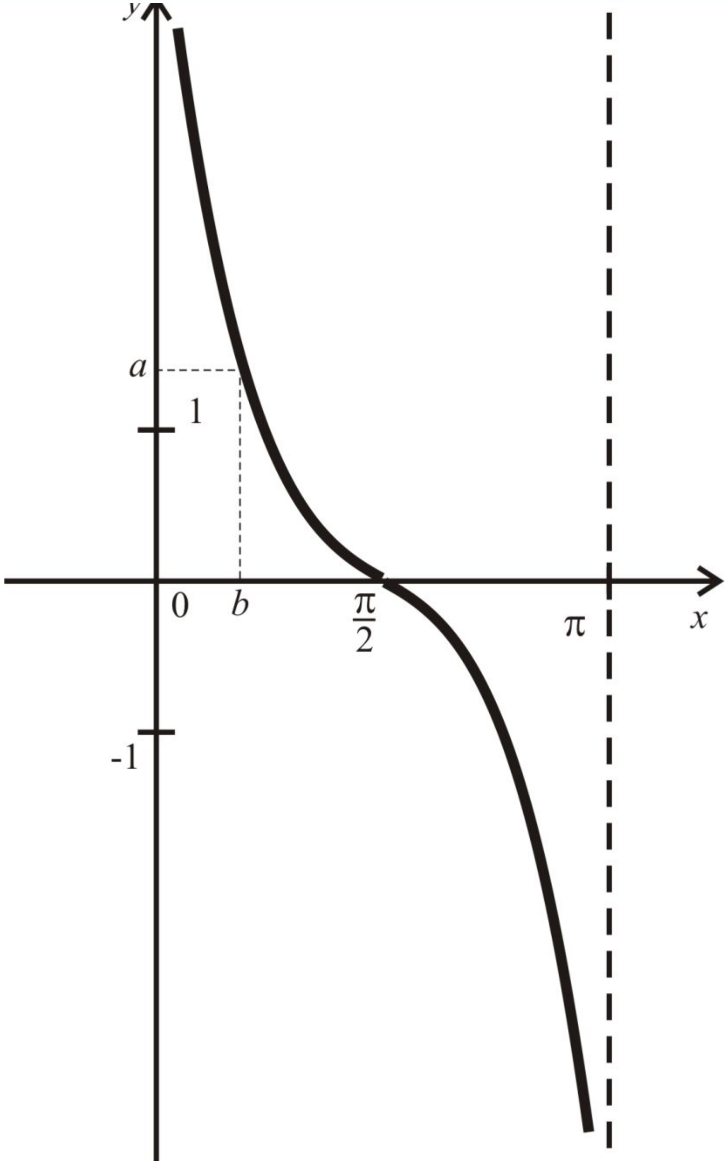


ctg$b$ = a;

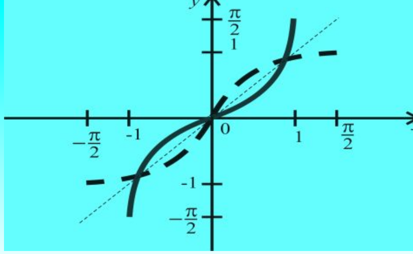
a = arcctg$b$,

где $a \in (-\infty; \infty)$,

$b \in (0; \pi)$.



Домашнее задание



1. Выучите определения арксинуса числа, арккосинуса числа, тангенса и котангенса чисел (на оценку)
2. Надо понимать, что такое арксинус числа, как он изображается на круге, на какой дуге и т.д.