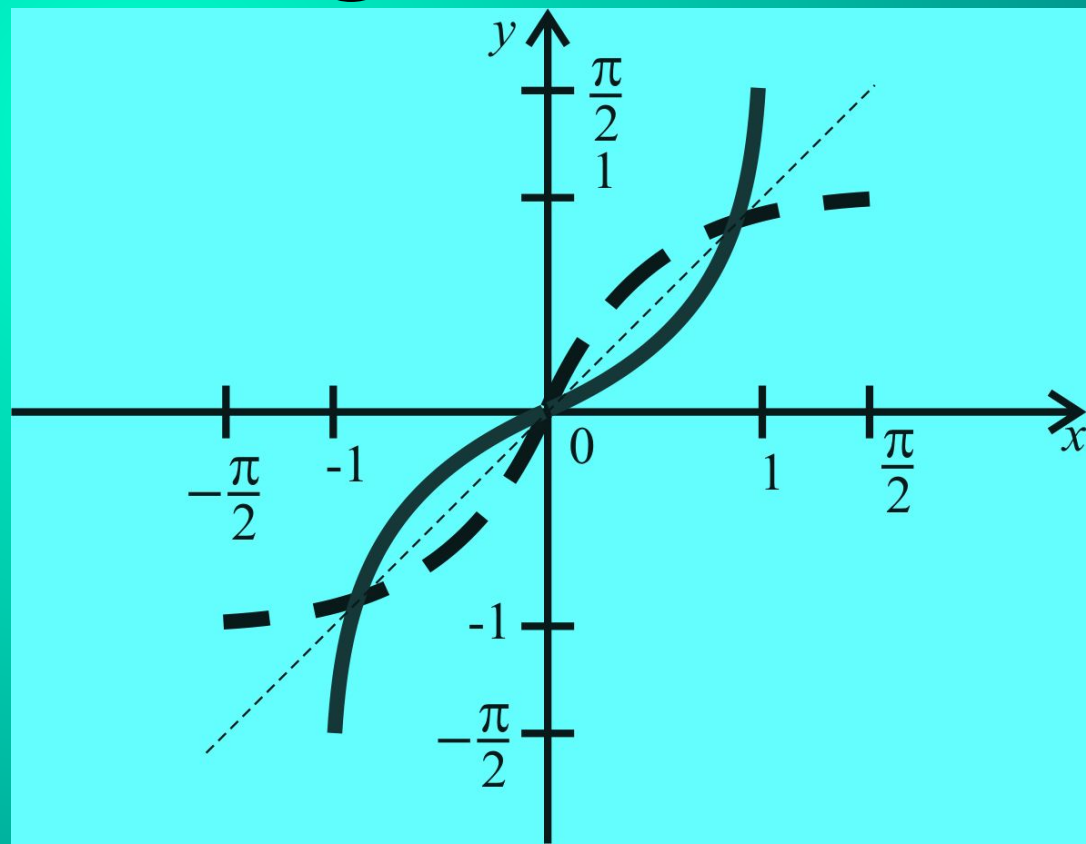
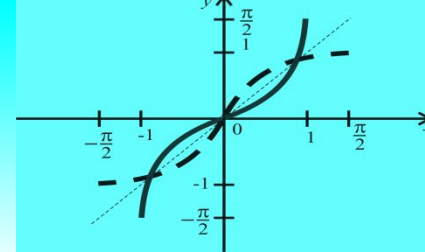


Определение чисел $\arcsin a$, $\arccos a$, $\operatorname{arctg} a$, $\operatorname{arcctg} a$

Автор
Календарева Н.Е.
© 2011 г.

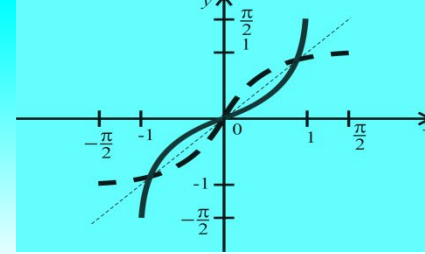


План



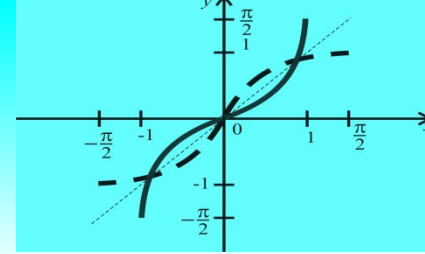
1. Теорема о корне монотонной функции
2. Возрастание синуса на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$
3. Определение арксинуса числа
4. График синуса на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$
5. Примеры
6. Определение арккосинуса числа
7. Определение арктангенса числа
8. Определение арккотангенса числа

Теорема о корне монотонной функции



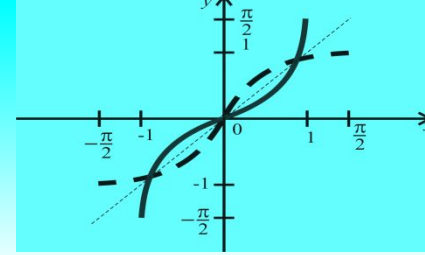
Пусть функция $f(x)$ возрастает (убывает) на промежутке $\langle p; q \rangle$, а число a – любое из значений функции f из множества значений. Тогда уравнение $f(x) = a$ имеет единственный корень в промежутке $\langle p; q \rangle$.

Доказательство



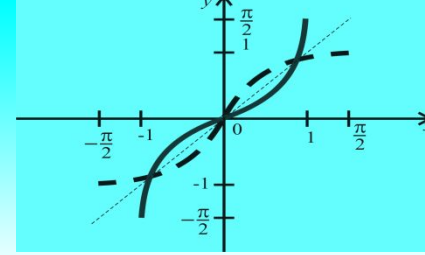
Доказательство для возрастающей функции.

По условию число a – какое-либо значение функции f , т.е. в промежутке $\langle p; q \rangle$ существует такое число b , что $f(b) = a$. Докажем единственность.



От противного. Допустим, на промежутке
есть еще одно число $c \neq b$, такое что
 $f(c) = a$.

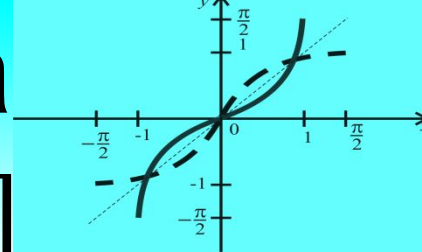
Но $a = f(b)$, т.е. $f(c) = f(b)$. Так как $c \neq b$, то
для определенности пусть $c > b$. Но
функция f возрастает на $\langle p; q \rangle$, поэтому
 $f(c) > f(b)$. Это противоречит равенству
 $f(c) = f(b)$.



Следовательно, число b одно, т.е. на промежутке $\langle p; q \rangle$ функция f имеет единственный корень.

Теорема доказана.

Возрастание синуса на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$

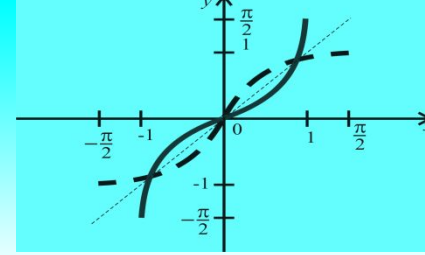


Функция синус на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$ возрастает. Докажем это.

Пусть $x_1, x_2 \in (-\pi/2; \pi/2)$ и $x_1 < x_2$. Надо показать, что $\sin x_1 < \sin x_2$.

Или разность $\sin x_2 - \sin x_1 > 0$.

$$\sin x_2 - \sin x_1 = 2 \cos \frac{x_2 + x_1}{2} \sin \frac{x_2 - x_1}{2}$$



Имеем неравенства $-\frac{\pi}{2} < x_1 < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < x_2 < \frac{\pi}{2}$

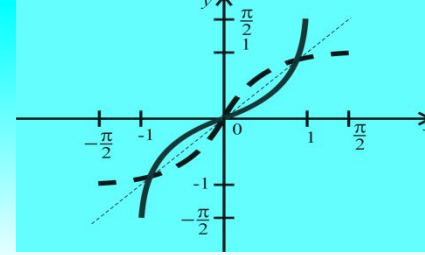
Сложим $-\pi < x_1 + x_2 < \pi$, $-\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{2}$

Сл-но, $\cos \frac{x_1 + x_2}{2} > 0$

Рассмотрим два неравенства:

$$-\frac{\pi}{2} < -x_1 < \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} < x_2 < \frac{\pi}{2}$$



Сложим $-\pi < x_2 - x_1 < \pi$.

Учтем, что $x_1 < x_2$, т.е. $x_2 - x_1 > 0$.

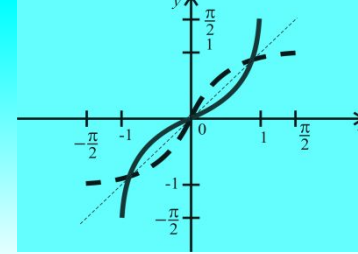
$$0 < \frac{x_2 - x_1}{2} < \frac{\pi}{2}$$

Получим

Следовательно, синус этого числа > 0 .

Доказали, что синус возрастает на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$.

Определение арксинуса числа

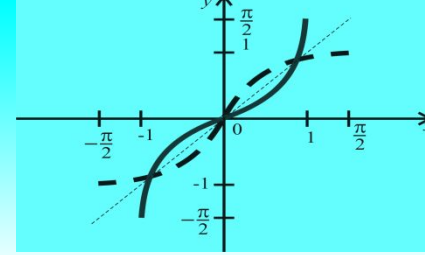


Функция синус принимает значения из отрезка $[-1; 1]$. Рассмотрим уравнение

$$\sin x = a, \text{ где } |a| \leq 1.$$

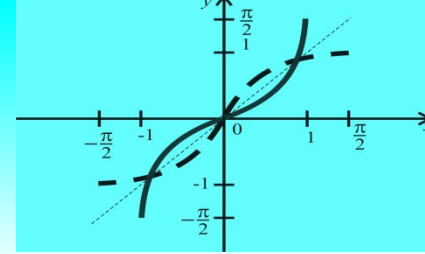
По теореме о корне уравнение $\sin x = a$ имеет один корень b из отрезка $[-\pi/2; \pi/2]$ такой, что $\sin b = a$.

Это число b называется **арксинусом** числа a . Обозначают $\arcsin a$.



Арксинусом числа a из отрезка $[-1; 1]$ называется такое число из отрезка $[-\pi/2; \pi/2]$, синус которого равен a .

График синуса на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$

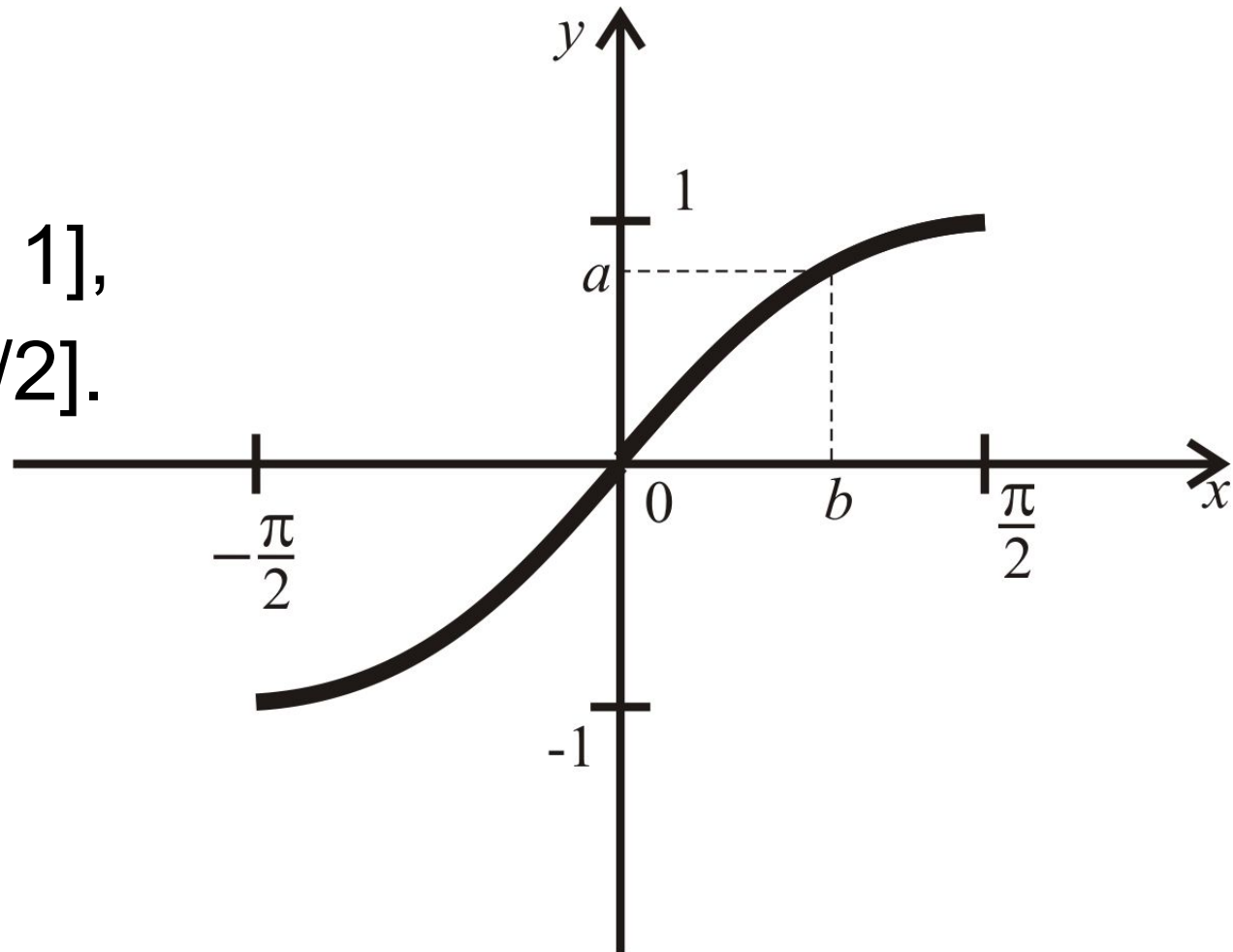


$$\sin b = a;$$

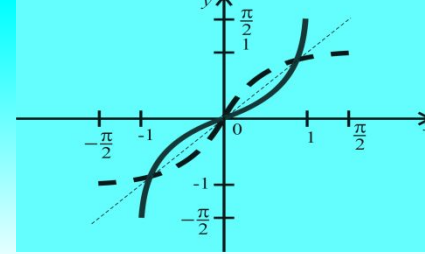
$$b = \arcsin a,$$

где $a \in [-1; 1]$,

$b \in [-\pi/2; \pi/2]$.



Чему равен arcsin следующих чисел?



1. $\arcsin 0 =$

Ответ: $\arcsin 0 = 0$.

2. $\arcsin 1 =$

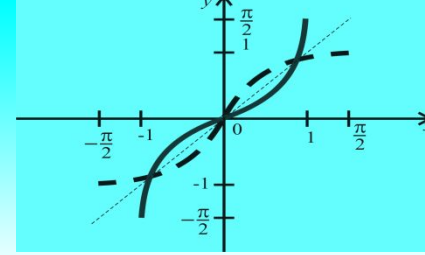
Ответ: $\arcsin 1 = \pi/2$.

3. $\arcsin(1/2) =$

Ответ: $\arcsin(1/2) = \pi/6$.

4. $\arcsin 2$

ТАК НЕЛЬЗЯ ПИСАТЬ!



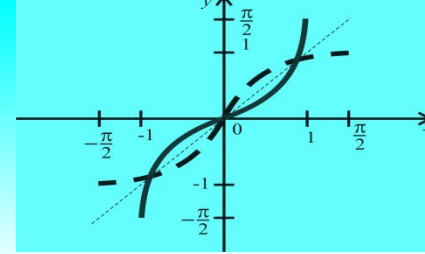
5. $\arcsin(-1) =$

ОТВЕТ: $\arcsin(-1) = -\pi/2.$

6. $\arcsin(-1/2) =$

ОТВЕТ: $\arcsin(-1/2) = -\pi/6.$

Определение арккосинуса числа

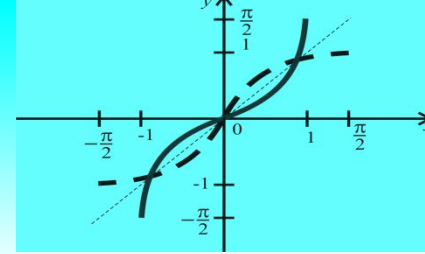


Функция косинус убывает на отрезке $[0; \pi]$.
(доказательство аналогично).

Рассмотрим уравнение

$$\cos x = a, \text{ где } |a| \leq 1.$$

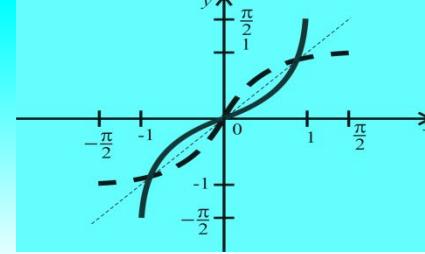
По теореме о корне это уравнение имеет
один корень b из отрезка $[0; \pi]$ такой, что
 $\cos b = a$.



Это число называется *арккосинусом* числа a . Обозначают $\arccos a$.

Арккосинусом числа a из отрезка $[-1; 1]$ называется такое число из отрезка $[0; \pi]$, косинус которого равен a .

График косинуса на отрезке $[0; \pi]$

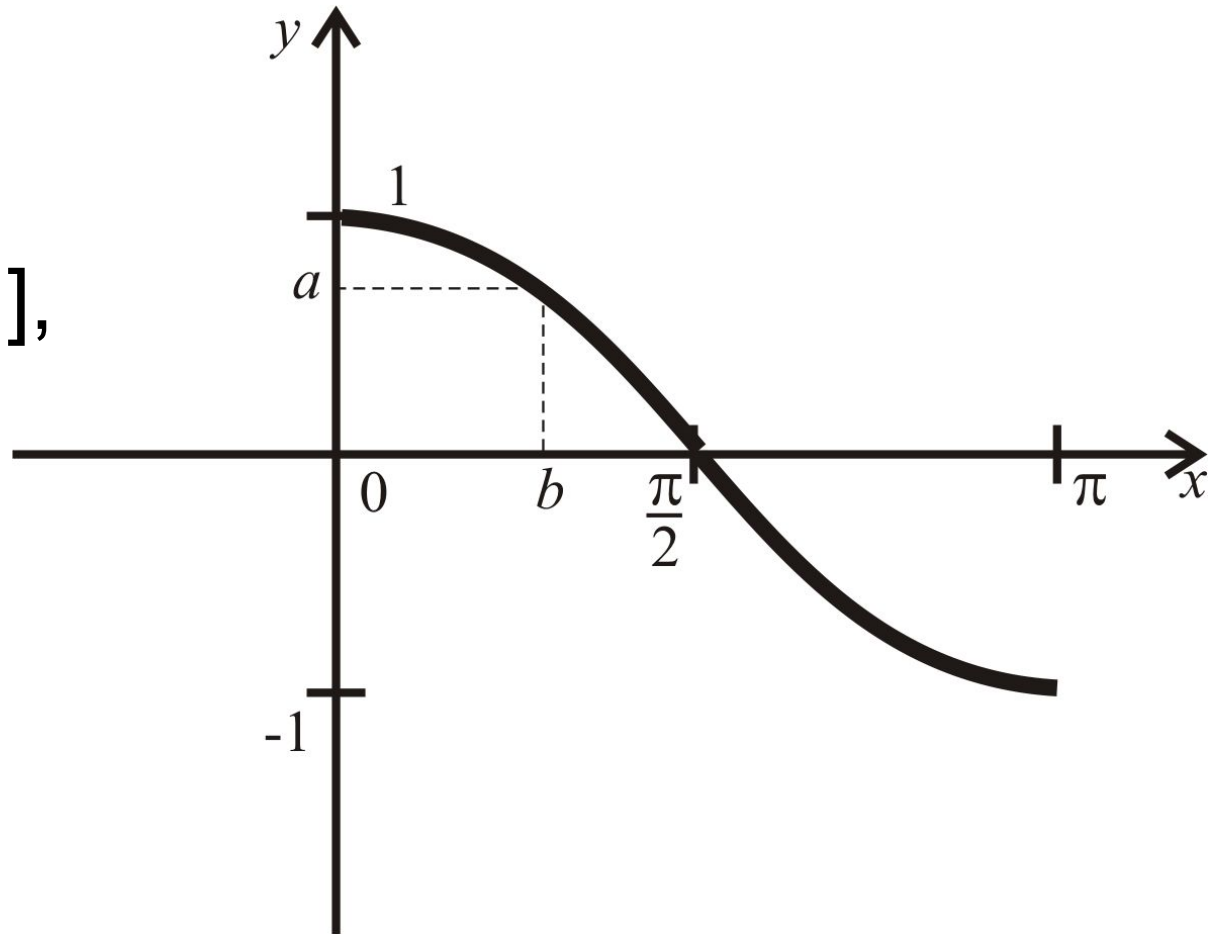


$$\cos b = a;$$

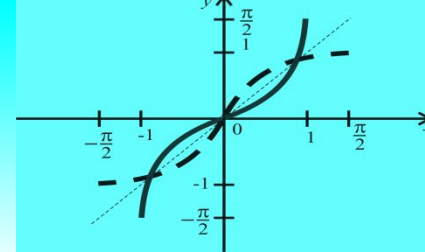
$$b = \arccos a,$$

где $a \in [-1; 1]$,

$$b \in [0; \pi].$$



Чему равен \arccos следующих чисел?



1. $\arccos 0 =$

Ответ: $\arccos 0 = \pi/2$.

2. $\arccos 1 =$

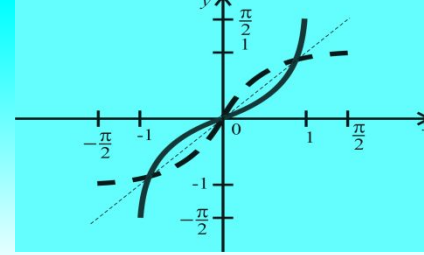
Ответ: $\arccos 1 = 0$.

3. $\arccos(1/2) =$

Ответ: $\arccos(1/2) = \pi/3$.

4. $\arccos(3/2)$

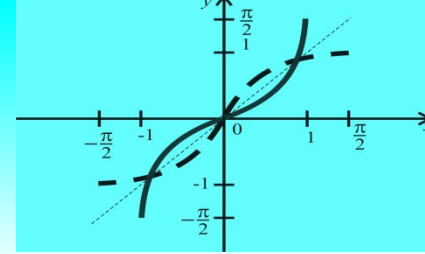
ТАК НЕЛЬЗЯ ПИСАТЬ!



5. $\arccos(-1) =$

Ответ: π .

Определение арктангенса числа



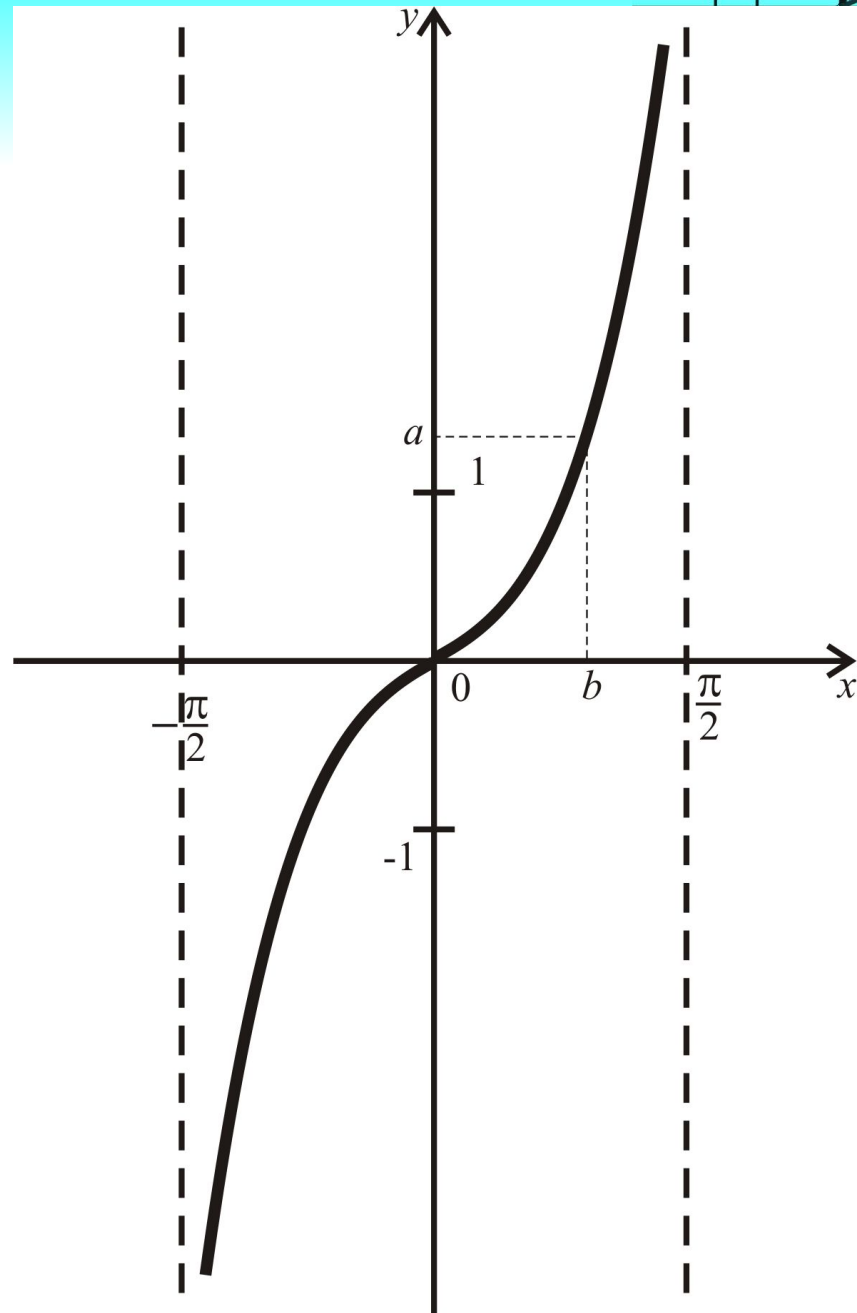
Функция тангенс возрастает на интервале $(-\pi/2; \pi/2)$. Ее множество значений – это \mathbf{R} .

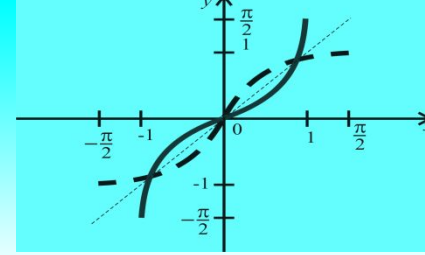
Рассмотрим уравнение $\operatorname{tg}x = a$, где a – любое число.

На промежутке возрастания, т.е. на интервале $(-\pi/2; \pi/2)$ это уравнение имеет один корень b такой, что $\operatorname{tg}b = a$.

График тангенса на $(-\pi/2; \pi/2)$

$\operatorname{tg} b = a;$
 $a = \operatorname{arctg} b,$
где $a \in (-\infty; +\infty),$
 $b \in (-\pi/2; \pi/2).$

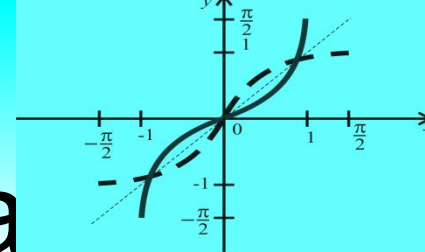




Это число называется *арктангенсом* числа a и обозначают $\operatorname{arctg} a$.

Арктангенсом числа a , где a – любое число, называется такое число из интервала $(-\pi/2; \pi/2)$, тангенс которого равен a .

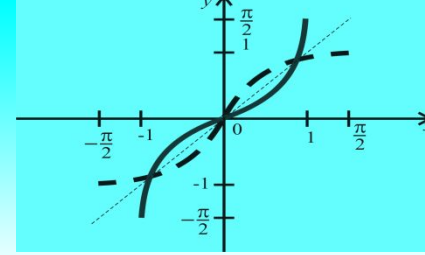
Определение арккотангенса числа



Функция котангенс убывает на интервале $(0; \pi)$. Ее множество значений – это \mathbf{R} .

Рассмотрим уравнение $\operatorname{ctg}x = a$,
где a – любое число.

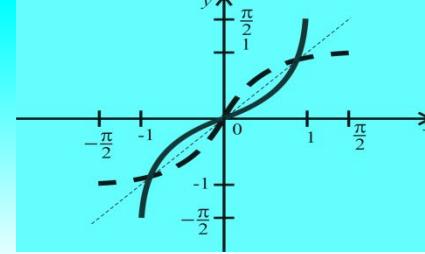
На промежутке убывания, т.е. на интервале $(0; \pi)$ это уравнение имеет один корень b такой, что $\operatorname{ctg}b = a$.



Это число называется *арккотангенсом* числа a и обозначают $\text{arcctg } a$.

Арккотангенсом числа a , где a – любое число, называется такое число из интервала $(0; \pi)$, котангенс которого равен a .

График котангенса на $(0; \pi)$

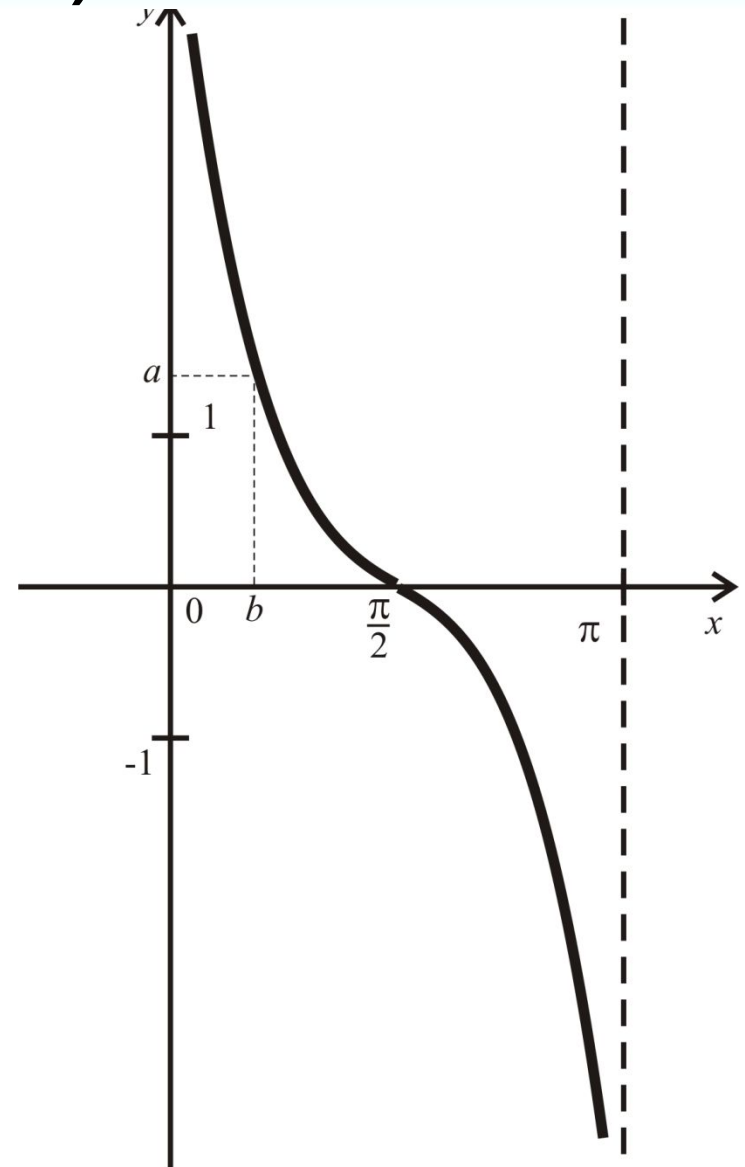


$$\operatorname{ctg} b = a;$$

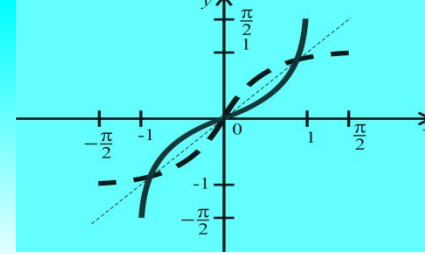
$$a = \operatorname{arccctg} b,$$

где $a \in (-\infty; \infty)$,

$$b \in (0; \pi).$$



Домашнее задание



1. Выучите определения арксинуса числа, арккосинуса числа, тангенса и котангенса чисел (на оценку)
2. Надо понимать, что такое арксинус числа, как он изображается на круге, на какой дуге и т.д.