

Определение машины Тьюринга



Машина Тьюринга – абстрактный исполнитель, осуществляющий алгоритмический процесс

Это математический объект, а не физическая машина

Предложена Аланом Тьюрингом в 1936 году



Устройство машины Тьюринга



1) Внешний алфавит

$$A = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$$

Элемент a_0 называется **пустой символ**



В этом алфавите в виде слова кодируется исходный набор данных и результат работы алгоритма

Устройство машины Тьюринга

2) Внутренний алфавит

$$Q = \{q_0, q_1, \dots, q_m\}, \{П, Л, С\}$$



В любой момент времени машина M находится в одном из состояний q_0, q_1, \dots, q_m

При этом: q_1 - начальное состояние
 q_0 - заключительное состояние

Символы $\{П, Л, С\}$ – символы сдвига (вправо, влево, на месте)

Устройство машины Тьюринга



3) Внешняя память (лента)

Машина имеет ленту, разбитую на ячейки, в каждую из которых может быть записана только одна буква



a_0	a_2	a_1	a_5	a_3	a_0
-------	-------	-------	-------	-------	-------

Устройство машины Тьюринга



3) Внешняя память (лента)

a_0	a_2	a_1	a_5	a_3	a_0
-------	-------	-------	-------	-------	-------

Пустая клетка содержит a_0 .

В каждый момент времени на ленте записано конечное число непустых букв



Лента является конечной, но дополняется в любой момент ячейками слева и справа для записи новых непустых символов.

Это соответствует принципу абстракции потенциальной осуществимости

Устройство машины Тьюринга

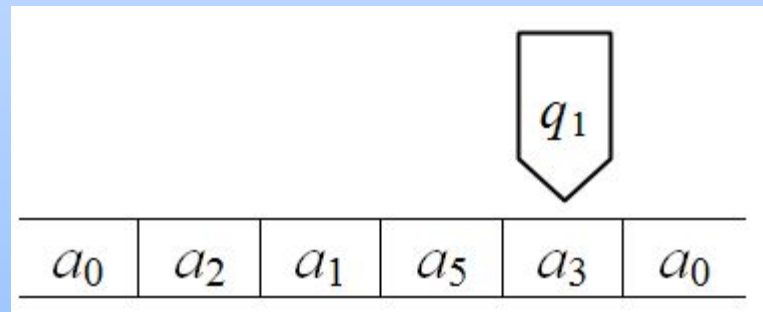


4) Каретка (управляющая головка)



Каретка машины располагается над некоторой ячейкой ленты – воспринимает символ, записанный в ячейке

В одном такте работы каретка сдвигается на одну ячейку (вправо, влево) или остается на месте



Устройство машины Тьюринга



5) Функциональная схема (программа)



Программа машины состоит из команд:

$$\begin{aligned} q_i a_j &\rightarrow q_k a_l X, & X &\in \{П, Л, С\} \\ i &= \overline{1, m}, & j &= \overline{1, n} \\ k &= \overline{1, m}, & l &= \overline{1, n} \end{aligned}$$

Для каждой пары (q_i, a_j) программа машины должна содержать одну команду (детерминированная машина Тьюринга)



Замечание

1) В недетерминированной машине может появиться несколько параллельных вычислительных процессов

2) Разные машины Тьюринга отличаются своими программами

Для каждого алгоритма создается своя машина Тьюринга, точнее ее программа

Описание работы машины Тьюринга



К началу работы машины на ленту подается исходный набор данных в виде слова α



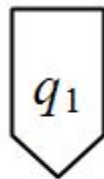
Будем говорить, что непустое слово α в алфавите $A \setminus \{a_0\}$ воспринимается машиной в **стандартном положении**, если:

- оно задано в последовательных ячейках ленты,
- все другие ячейки пусты,
- машина обозревает крайнюю правую ячейку из тех, в которых записано слово α

Описание работы машины Тьюринга

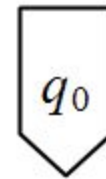


Стандартное положение называется **начальным (заключительным)**, если машина, воспринимающая слово в стандартном положении, находится в начальном состоянии q_1 (стоп-состоянии q_0)



a_0	a_2	a_1	a_5	a_3	a_0
-------	-------	-------	-------	-------	-------

начальное стандартное



a_0	a_2	a_1	a_5	a_3	a_0
-------	-------	-------	-------	-------	-------

заключительное стандартное

Описание работы машины Тьюринга



Находясь в не заключительном состоянии, машина совершает шаг, который определяется текущим состоянием q_i и обозреваемым символом a_j

Описание работы машины Тьюринга



В соответствии с командой $q_i a_j \rightarrow q_k a_l X$ выполняются следующие действия:



1) Содержимое обозреваемой ячейки a_j стирается и в нее записывается символ a_l (который может совпадать с a_j)

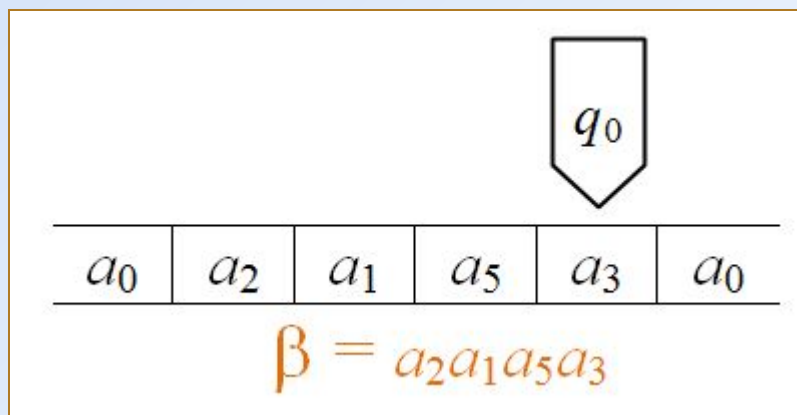
2) Машина переходит в новое состояние q_k (оно может совпадать с состоянием q_i)

3) Каретка перемещается в соответствии с управляемым символом $X \in \{П, Л, С\}$

Описание работы машины Тьюринга

При переходе машины в заключительное состояние q_0 ее работа прекращается

На ленте записан результат работы алгоритма – слово β в алфавите $A \setminus \{a_0\}$



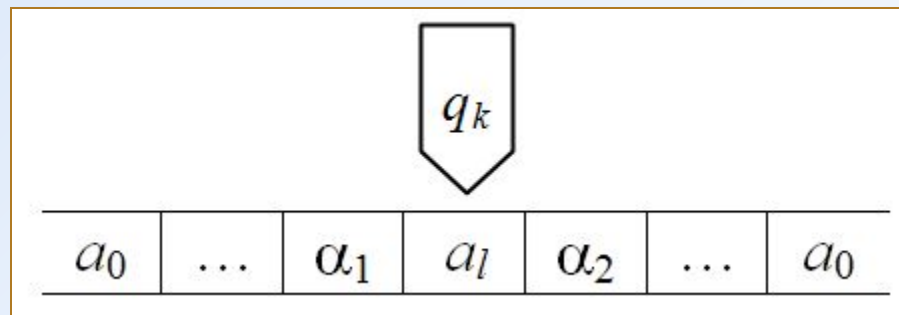


Машинным словом (конфигурацией) машины Тьюринга называется слово вида $\alpha_1 q_k a_l \alpha_2$, где α_1 и α_2 - слова в алфавите A .



Конфигурация $\alpha_1 q_k a_l \alpha_2$ интерпретируется следующим образом:

- машина находится в состоянии q_k
- каретка обозревает на ленте символ a_l
- α_1 и α_2 – это содержимое ленты до и после символа a_l





Пример

Дана машина Тьюринга с внешним алфавитом $A = \{a_0, 1, * \}$, алфавитом внутренних состояний $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, и следующей функциональной схемой:

	q_1	q_2	q_3
a_0		$q_3 1 \Pi$	$q_1 a_0 \text{Л}$
1	$q_2 a_0 \text{Л}$	$q_2 1 \text{Л}$	$q_3 1 \Pi$
*	$q_0 a_0 \text{С}$	$q_2 * \text{Л}$	$q_3 * \Pi$

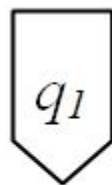
Применить машину Тьюринга к слову $\alpha = 11^*1$, начиная со стандартного начального положения



Решение

	q_1	q_2	q_3
a_0		$q_3 1 \Pi$	$q_1 a_0 \text{Л}$
1	$q_2 a_0 \text{Л}$	$q_2 1 \text{Л}$	$q_3 1 \Pi$
*	$q_0 a_0 \text{С}$	$q_2^* \text{Л}$	$q_3^* \Pi$

1)



a_0	1	1	*	1	a_0
-------	---	---	---	---	-------

$$q_1 1 \rightarrow q_2 a_0 \text{Л}$$



Решение

	q_1	q_2	q_3
a_0		$q_3 1 \Pi$	$q_1 a_0 \text{Л}$
1	$q_2 a_0 \text{Л}$	$q_2 1 \text{Л}$	$q_3 1 \Pi$
*	$q_0 a_0 \text{С}$	$q_2^* \text{Л}$	$q_3^* \Pi$

1)



a_0	1	1	*	1	a_0
-------	---	---	---	---	-------

$$q_1 1 \rightarrow q_2 a_0 \text{Л}$$

1) Заменяем содержимое обозреваемой ячейки 1 на a_0

2)

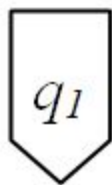
a_0	1	1	*	a_0	a_0
-------	---	---	---	-------	-------



Решение

	q_1	q_2	q_3
a_0		$q_3 1 \Pi$	$q_1 a_0 \text{Л}$
1	$q_2 a_0 \text{Л}$	$q_2 1 \text{Л}$	$q_3 1 \Pi$
*	$q_0 a_0 \text{С}$	$q_2^* \text{Л}$	$q_3^* \Pi$

1)



a_0	1	1	*	1	a_0
-------	---	---	---	---	-------

$$q_1 1 \rightarrow q_2 a_0 \text{Л}$$

2) Машина переходит в новое состояние q_2

2)



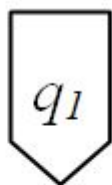
a_0	1	1	*	a_0	a_0
-------	---	---	---	-------	-------



Решение

	q_1	q_2	q_3
a_0		$q_3 1 \Pi$	$q_1 a_0 \Pi$
1	$q_2 a_0 \Pi$	$q_2 1 \Pi$	$q_3 1 \Pi$
*	$q_0 a_0 C$	$q_2^* \Pi$	$q_3^* \Pi$

1)

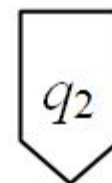


a_0	1	1	*	1	a_0
-------	---	---	---	---	-------

$$q_1 1 \rightarrow q_2 a_0 \text{Л}$$

3) Каретка перемещается влево

2)



a_0	1	1	*	a_0	a_0
-------	---	---	---	-------	-------

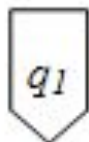


Решение

Полное подробное решение

	q_1	q_2	q_3
a_0		$q_3 1\Pi$	$q_1 a_0 \text{Л}$
1	$q_2 a_0 \text{Л}$	$q_2 1 \text{Л}$	$q_3 1\Pi$
*	$q_0 a_0 \text{С}$	$q_2^* \text{Л}$	$q_3^* \Pi$

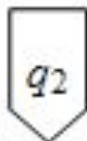
1)



a_0	1	1	*	1	a_0
-------	---	---	---	---	-------

$$q_1 1 \rightarrow q_2 a_0 \text{Л}$$

2)



a_0	1	1	*	a_0	a_0
-------	---	---	---	-------	-------

$$q_2 * \rightarrow q_2^* \text{Л}$$

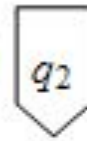
3)



a_0	1	1	*	a_0	a_0
-------	---	---	---	-------	-------

$$q_2 1 \rightarrow q_2 1 \text{Л}$$

4)



a_0	1	1	*	a_0	a_0
-------	---	---	---	-------	-------

$$q_2 1 \rightarrow q_2 1 \text{Л}$$

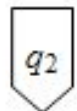


Решение

Полное подробное решение

	q_1	q_2	q_3
a_0		$q_3 1 \Pi$	$q_1 a_0 \Pi$
1	$q_2 a_0 \Pi$	$q_2 1 \Pi$	$q_3 1 \Pi$
*	$q_0 a_0 \Sigma$	$q_2^* \Pi$	$q_3^* \Pi$

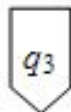
5)



a_0	1	1	*	a_0	a_0
-------	---	---	---	-------	-------

$q_2 a_0 \rightarrow q_3 1 \Pi$

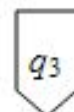
6)



a_0	1	1	1	*	a_0	a_0
-------	---	---	---	---	-------	-------

$q_3 1 \rightarrow q_3 1 \Pi$

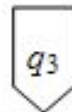
7)



a_0	1	1	1	*	a_0	a_0
-------	---	---	---	---	-------	-------

$q_3 1 \rightarrow q_3 1 \Pi$

8)



a_0	1	1	1	*	a_0	a_0
-------	---	---	---	---	-------	-------

$q_3^* \rightarrow q_3^* \Pi$

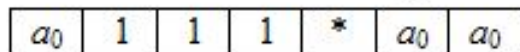
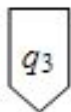


Решение

Полное подробное решение

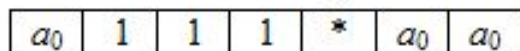
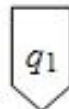
	q_1	q_2	q_3
a_0		$q_3 1\Pi$	$q_1 a_0 \text{Л}$
1	$q_2 a_0 \text{Л}$	$q_2 1 \text{Л}$	$q_3 1 \Pi$
*	$q_0 a_0 \text{С}$	$q_2 * \text{Л}$	$q_3 * \Pi$

9)



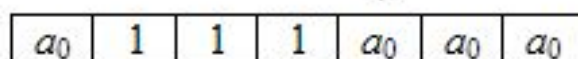
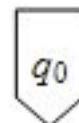
$$q_3 a_0 \rightarrow q_1 a_0 \text{Л}$$

10)



$$q_1 * \rightarrow q_0 a_0 \text{С}$$

11)



$$\underline{\beta = 111}$$



Решение

	q_1	q_2	q_3
a_0		$q_3 1 \Pi$	$q_1 a_0 \text{Л}$
1	$q_2 a_0 \text{Л}$	$q_2 1 \text{Л}$	$q_3 1 \Pi$
*	$q_0 a_0 \text{С}$	$q_2^* \text{Л}$	$q_3^* \Pi$

Решение, записанное с помощью конфигураций
(в строчку)

$$\begin{aligned}
 & a_0 1 1 * q_1 1 a_0 \Rightarrow a_0 1 1 q_2 * a_0 \Rightarrow a_0 1 q_2 1 * a_0 \Rightarrow a_0 q_2 1 1 * a_0 \Rightarrow \\
 & \Rightarrow a_0 q_2 a_0 1 1 * a_0 \Rightarrow a_0 1 q_3 1 1 * a_0 \Rightarrow a_0 1 1 q_3 1 * a_0 \Rightarrow \\
 & \Rightarrow a_0 1 1 1 q_3 * a_0 \Rightarrow a_0 1 1 1 * q_3 a_0 \Rightarrow a_0 1 1 1 q_1 * a_0 \Rightarrow a_0 1 1 1 q_0 a_0
 \end{aligned}$$



$$\alpha = 1^*11$$

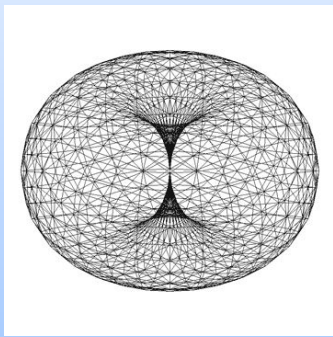
	q_1	q_2	q_3
a_0		$q_3 1 \Pi$	$q_1 a_0 \Pi$
1	$q_2 a_0 \Pi$	$q_2 1 \Pi$	$q_3 1 \Pi$
*	$q_0 a_0 \mathcal{C}$	$q_2^* \Pi$	$q_3^* \Pi$

Ответ: $\beta = 111$



Литература

1. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов. – М.: Академия, 2008. - 448 с.
2. Лихтарников Л.М., Сукачева Т.Г.
Математическая логика. Курс лекций.
Задачник-практикум и решения. – СПб.: Лань, 1999. - 288 с.
3. Ильиных А.П. Теория алгоритмов. Учебное пособие. – Екатеринбург, 2006. - 149 с.



Люди могут вести себя по-разному в одинаковых ситуациях, и этим они принципиально отличаются от машин.