Определение производной. Её геометрический и физический смысл

Упражнение:

- Вычислить пределы:

$$\lim_{x\to 1}(x^2 - 3x + 5) = 3$$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{4x^2 + 9}{x^2 + 2} = 4$$

$$\lim_{x\to 6}\sqrt{x + 3} = 3$$

$$\lim_{x\to -1}(x^2 + 6x - 8) = -13$$

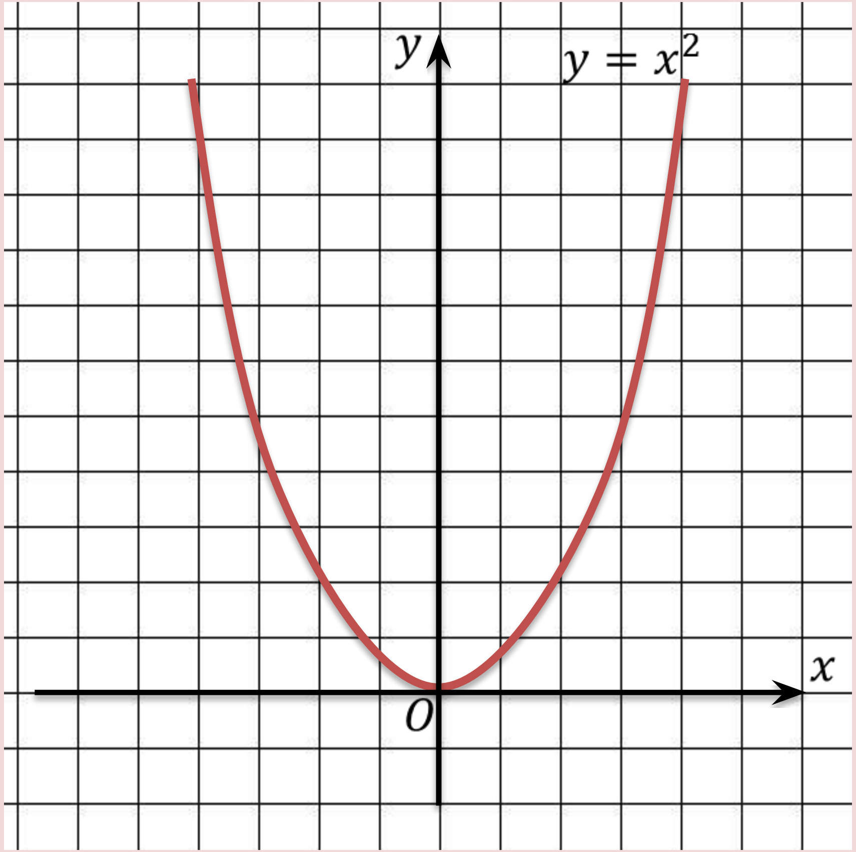
$S = S(t)$ $\quad t = [c] \quad v = [\text{м/с}]$ $\quad v_{\text{ср}} = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$

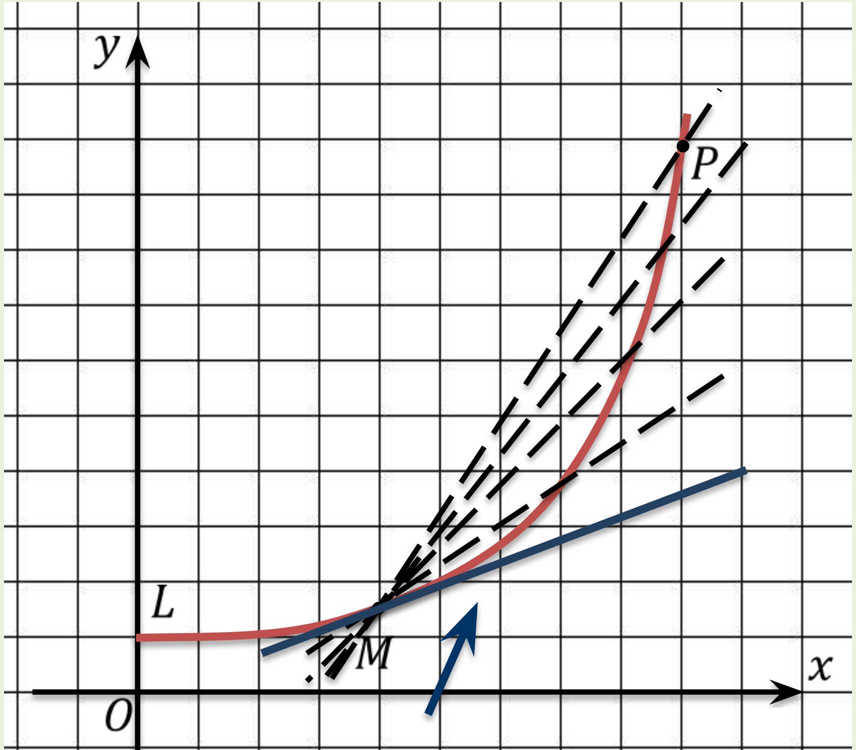
$$\left.\begin{aligned} OM &= S(t) \\ OP &= S(t+\Delta t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow MP = OP - OM = \qquad -$$

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}}$$

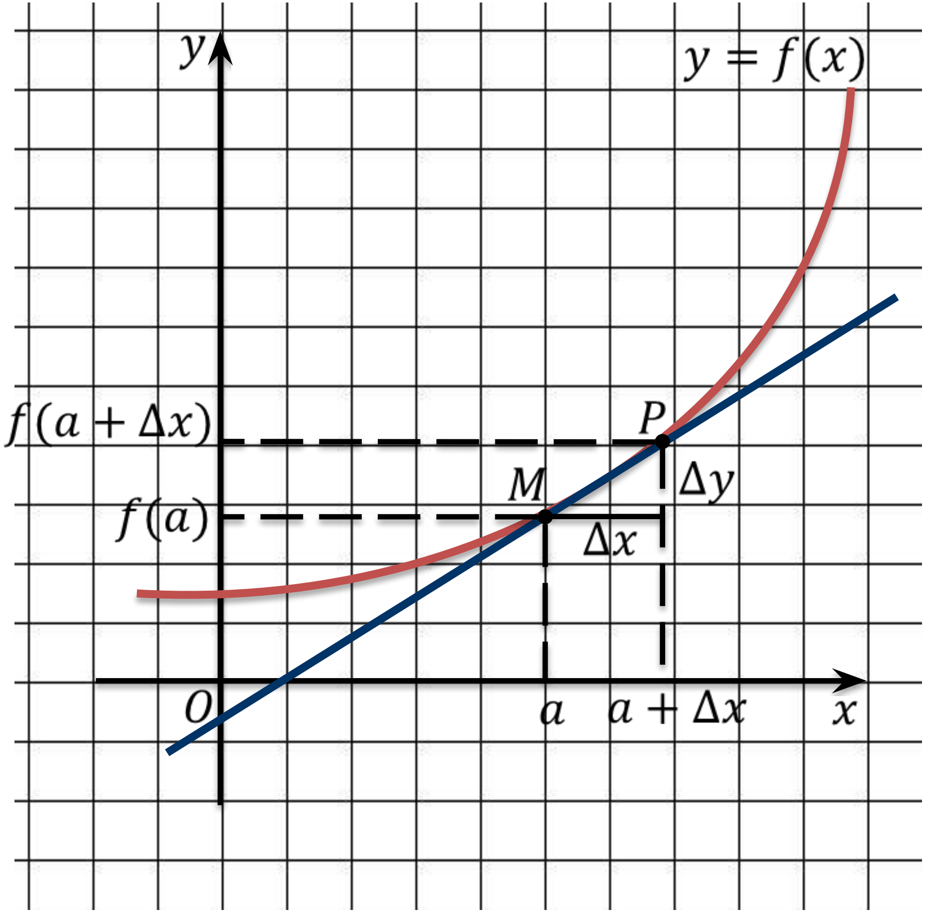
$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0}$$

$MP = \Delta S$





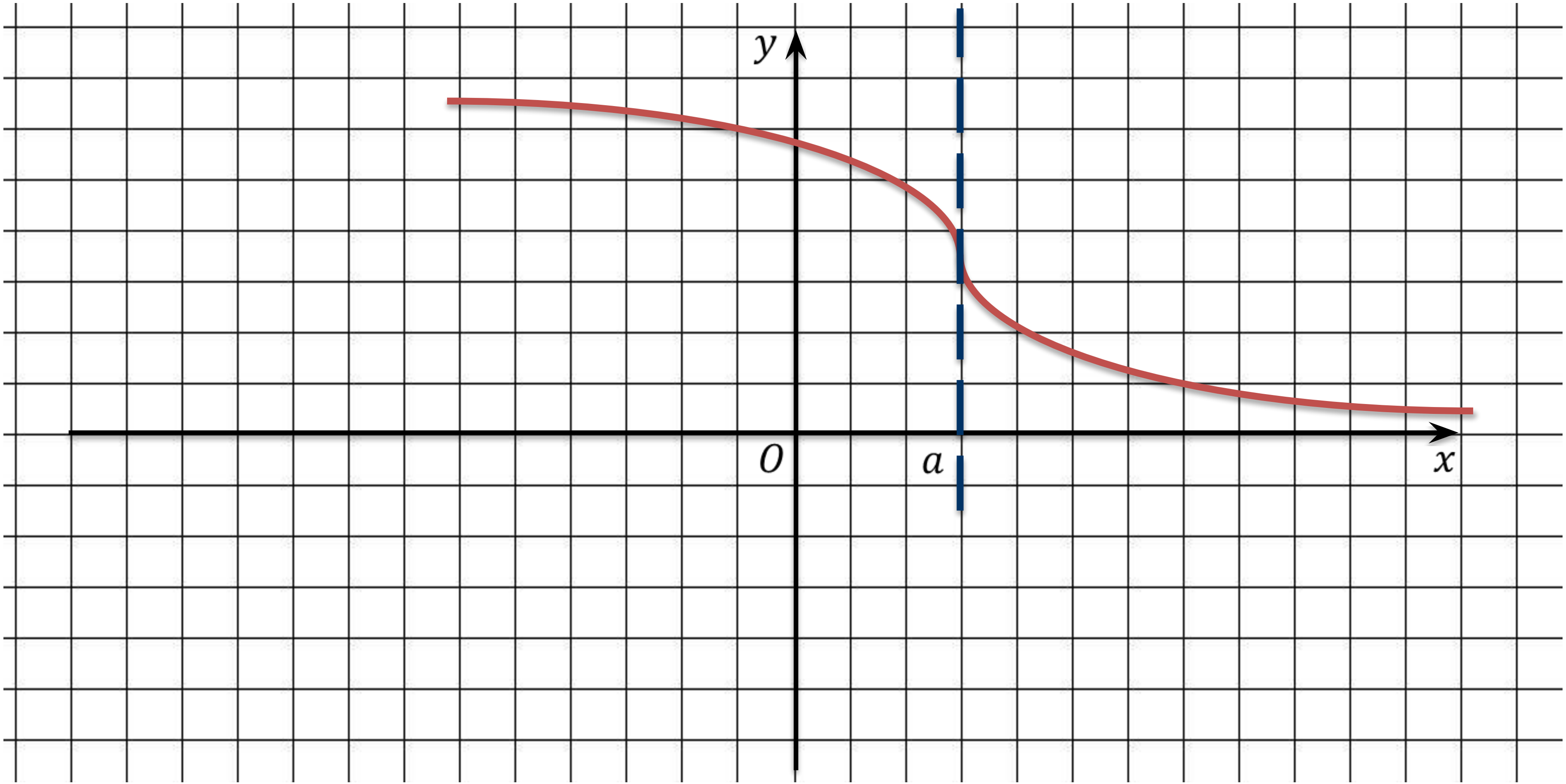
Касательная к кривой L в точке M



$$k_{\text{сек}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\Delta x \to 0$$

$$k_{\text{кас}} = \lim_{\Delta x \to 0} k_{\text{сек}}$$


y
O
a
x

$$v_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$k_{\text{кас}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором интервале, содержащем внутри себя точку x_0. Дадим аргументу приращение Δx такое, чтобы не выйти из этого интервала. Найдем соответствующее приращение функции Δy (при переходе от точки x_0 к точке $x_0 + \Delta x$) и составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Если существует предел этого отношения при $\Delta x \to 0$, то указанный предел называют производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначают $f'(x_0)$.

$$y' = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$y' = f'(x)$ – производная функции $y = f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} y = kx + m \\ \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = k \end{array}\right\} \Rightarrow y' = k \Leftrightarrow (kx + m)' = k$$

$$k = 1, m = 0 \Longrightarrow (1x + 0)' = (x)' = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow y' = 2x \Leftrightarrow (x^2)' = 2x$$

Физический смысл производной:

- Если $s = s(t)$ – закон прямолинейного движения тела, то производная выражает *мгновенную скорость* в момент времени t:

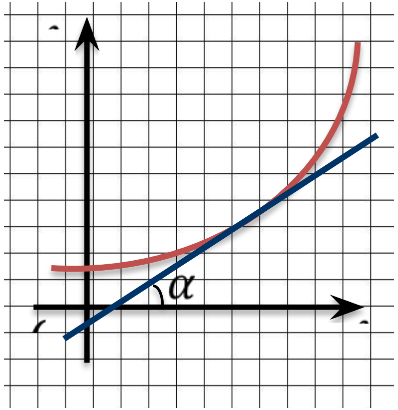
$$v(t) = s'(t)$$

Если некоторый процесс протекает по закону $s = s(t)$, то $s'(t)$ выражает *скорость протекания процесса* в момент времени t.

Геометрический смысл производной:

- Если к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$ можно провести касательную, непараллельную оси OY, то $f'(a)$ выражает *угловой коэффициент касательной:*

$$k = f'(a)$$



$$k = tg\,\alpha \Rightarrow f'(a) = tg\,\alpha$$

Алгоритм нахождения производной функции $v = f(x)$:

1. Зафиксировать значение x, найти $f(x)$.
2. Дать аргументу x приращение Δx, перейти в новую точку $x + \Delta x$, найти $f(x + \Delta x)$.
3. Найти приращение функции: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.
4. Составить отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
5. Вычислить $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Этот предел и есть $f'(x)$.

Пример:

- Найти производную функции $y = C$.

Решение:

1. $f(x) = C$
2. $f(x + \Delta x) = C$
3. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0$
4. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$
5. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0$

Ответ: $(C)' = 0$.

Пример:

- Найти производную функции $y = \frac{1}{x}$.

Решение:

1. $f(x) = \frac{1}{x}$
2. $f(x + \Delta x) = \frac{1}{x+\Delta x}$
3. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)} = \frac{x-x-\Delta x}{x(x+\Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}$
4. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x+\Delta x)}$
5. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(-\frac{1}{x(x+\Delta x)}\right) = -\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(x(x+\Delta x)\right)} = -\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} x \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0}(x+\Delta x)} = -\frac{1}{x \cdot x} = -\frac{1}{x^2}$

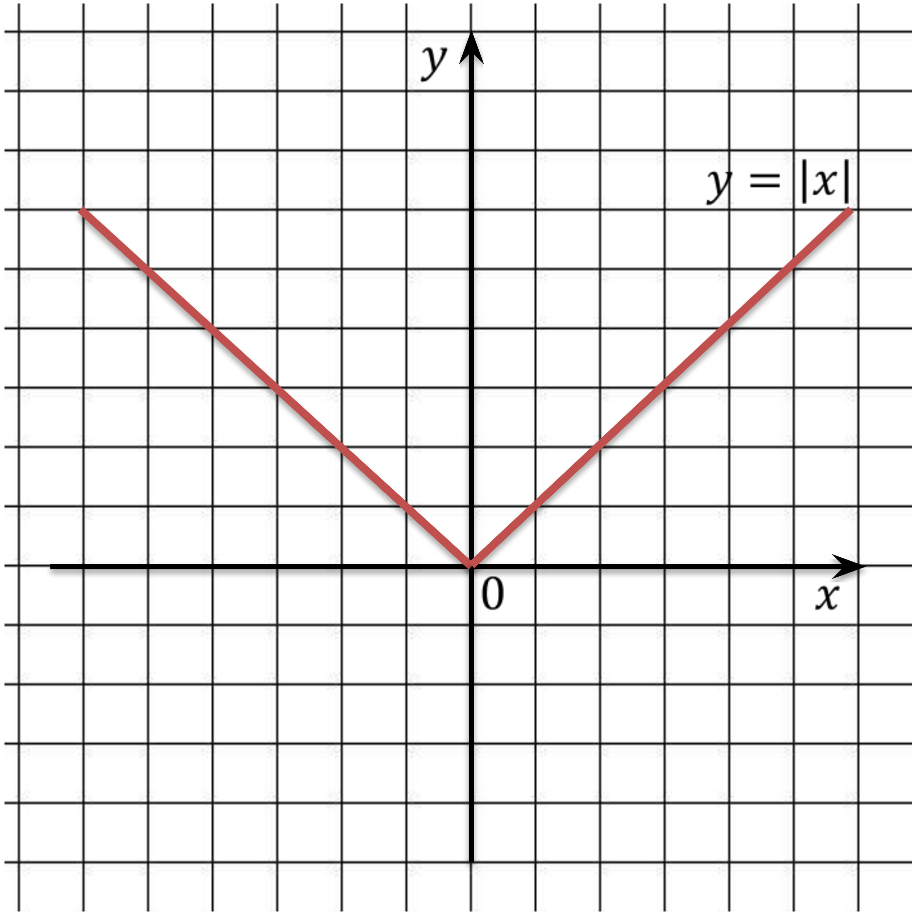
Ответ: $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

- Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x, то ее называют дифференцируемой в точке x. Процедуру нахождения производной функции $y = f(x)$ называют дифференцированием функции $y = f(x)$.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x. Тогда, пользуясь геометрическим смыслом производной, в точке $M(x, f(x))$ можно провести касательную, причем, угловой коэффициент этой касательной равен $f'(x)$.

В точке M не может быть разрыва, то есть функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x.

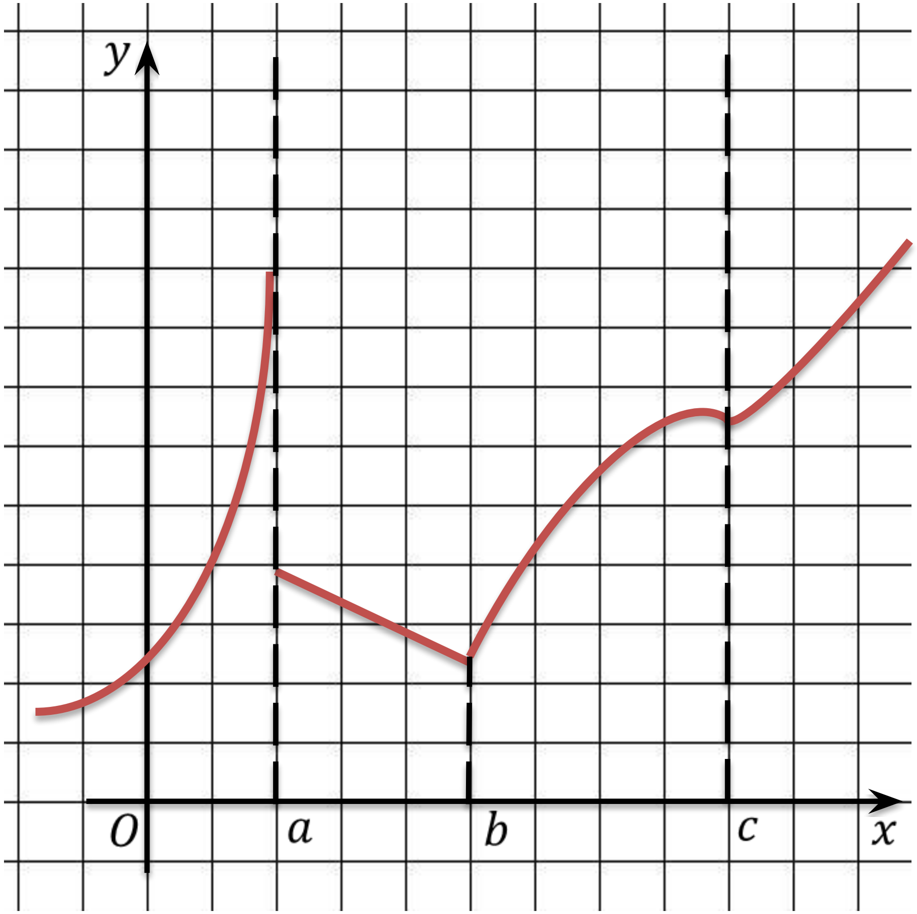
Если функция $y = f(x)$ *дифференцируема* в точке x, то она и *непрерывна* в этой точке.



Если в некоторой точке к графику функции нельзя провести касательную, то в этой точке *не существует производная*.

Если в некоторой точке к графику функции можно провести касательную, не перпендикулярную оси абсцисс, то в этой точке *функция дифференцируема*.

Если в некоторой точке касательная к графику функции не существует или она перпендикулярна оси абсцисс, то в этой точке *функция недифференцируема*.



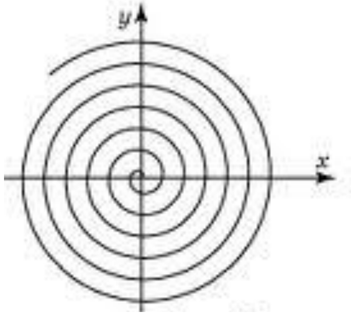
В точке a касательной к графику функции не существует.

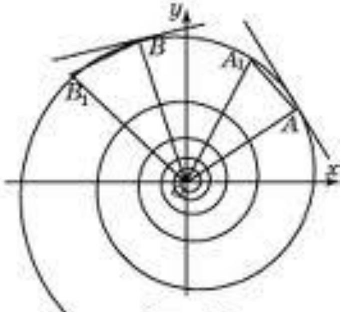
В точке b касательной к графику функции не существует.

В точке c касательная к графику функции параллельна оси OY.

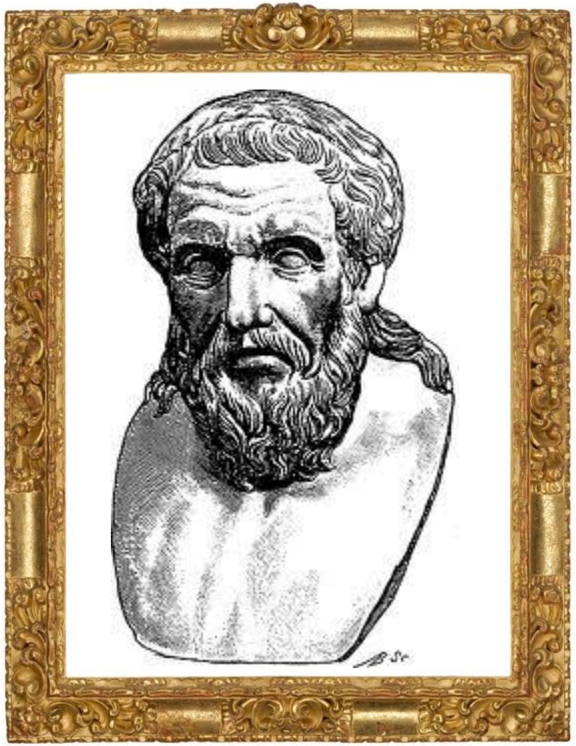
Раздел математики который изучает производные функции и их применения, называется дифферен-циальным исчислением.

Это исчисление возникло из решений задач на проведение касательных к кривым, на вычисление скорости движения, на отыскание наибольших и наименьших значений функции.

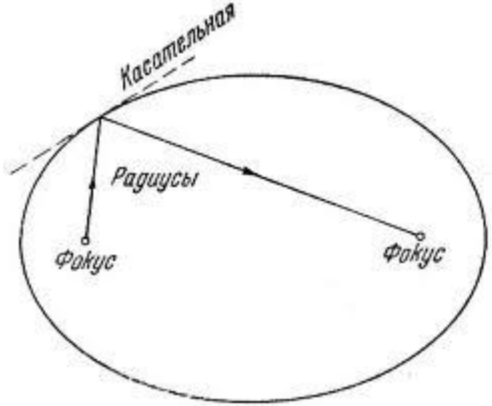


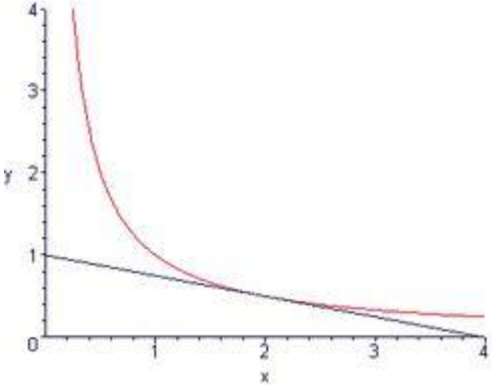


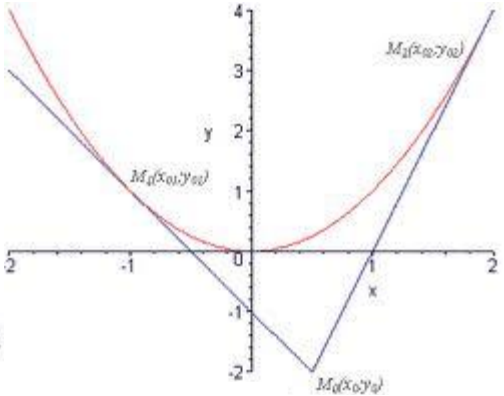
Архимед (ок. 287 – 212 до н.э.)

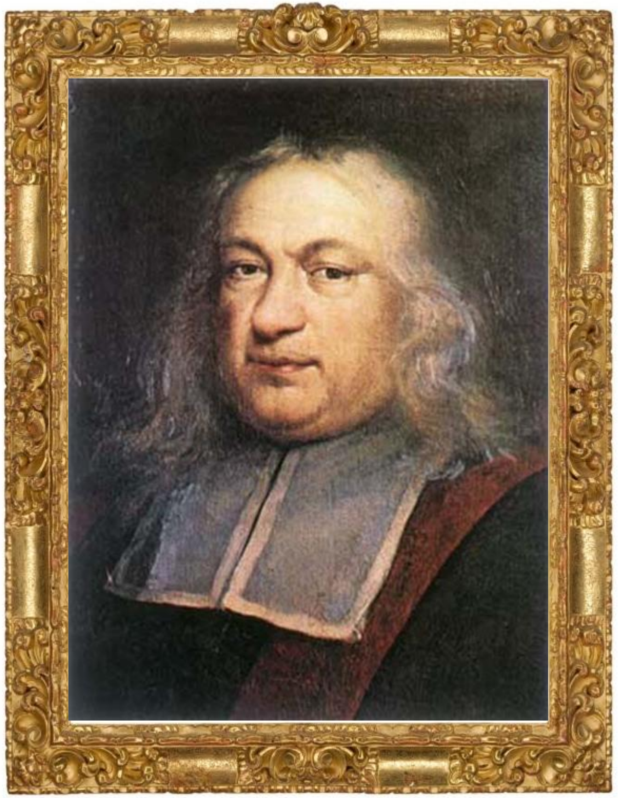


Апполоний Пергский
(ок. 262 – 190 до н.э.)

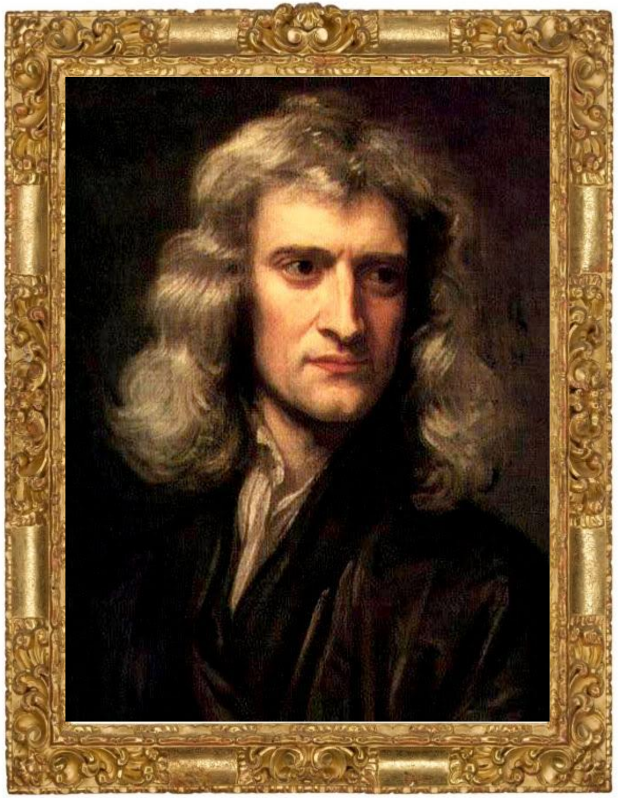








Пьер Ферма (1601 – 1665 гг.)



Исаак Ньютон (1642 – 1727 гг.)

Готфрид Вильгельм Лейбниц
(1646 – 1716 гг.)

Основываясь на результатах Ферма и некоторых других выводах, Лейбниц в 1684 году опубликовал первую статью по дифференциальному исчислению, в которой были изложены основные правила дифференцирования.

Жозеф Луи Лагранж
1736 – 1813

Термин «производная» впервые встречается у француза Луи Арбогаста. Этим термином стал пользоваться Лагранж, который и ввел обозначения y' и $f'(x)$.