

# 8.2. Определение производной

Пусть функция  $y=f(x)$  определена на промежутке  $X$ .  
Выберем точку  $x \in X$

Дадим аргументу  $x$  приращение  $\Delta x$ , тогда функция получит приращение

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Производной функции  $y = f(x)$   
называется предел отношения  
приращения функции к  
приращению  
независимого аргумента, когда  
приращение аргумента  
стремится  
к нулю.

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

*Обозначения производной:*

$$y'; \quad f'(x); \quad \frac{dy}{dx}; \quad \frac{df(x)}{dx}$$

*Нахождение производной функции называется дифференцированием.*

*Если функция имеет конечную производную в некоторой точке, то она называется дифференцируемой в этой точке.*

Вернемся к рассматриваемым задачам.

Из задачи о касательной вытекает

## геометрический смысл производной

Производная  $f'(x_0)$  есть угловой коэффициент (тангенс угла наклона) касательной, проведенной к кривой  $y=f(x)$  в точке  $x_0$ :

$$k = f'(x_0)$$

Тогда уравнение касательной к кривой в данной точке будет иметь вид:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Из задачи о скорости движения вытекает

**механический смысл производной**

*Производная пути по времени  $S'(t_0)$  есть скорость точки в момент времени  $t_0$ :*

$$v(t_0) = S'(t_0)$$

Из задачи о производительности труда вытекает

**экономический смысл производной**

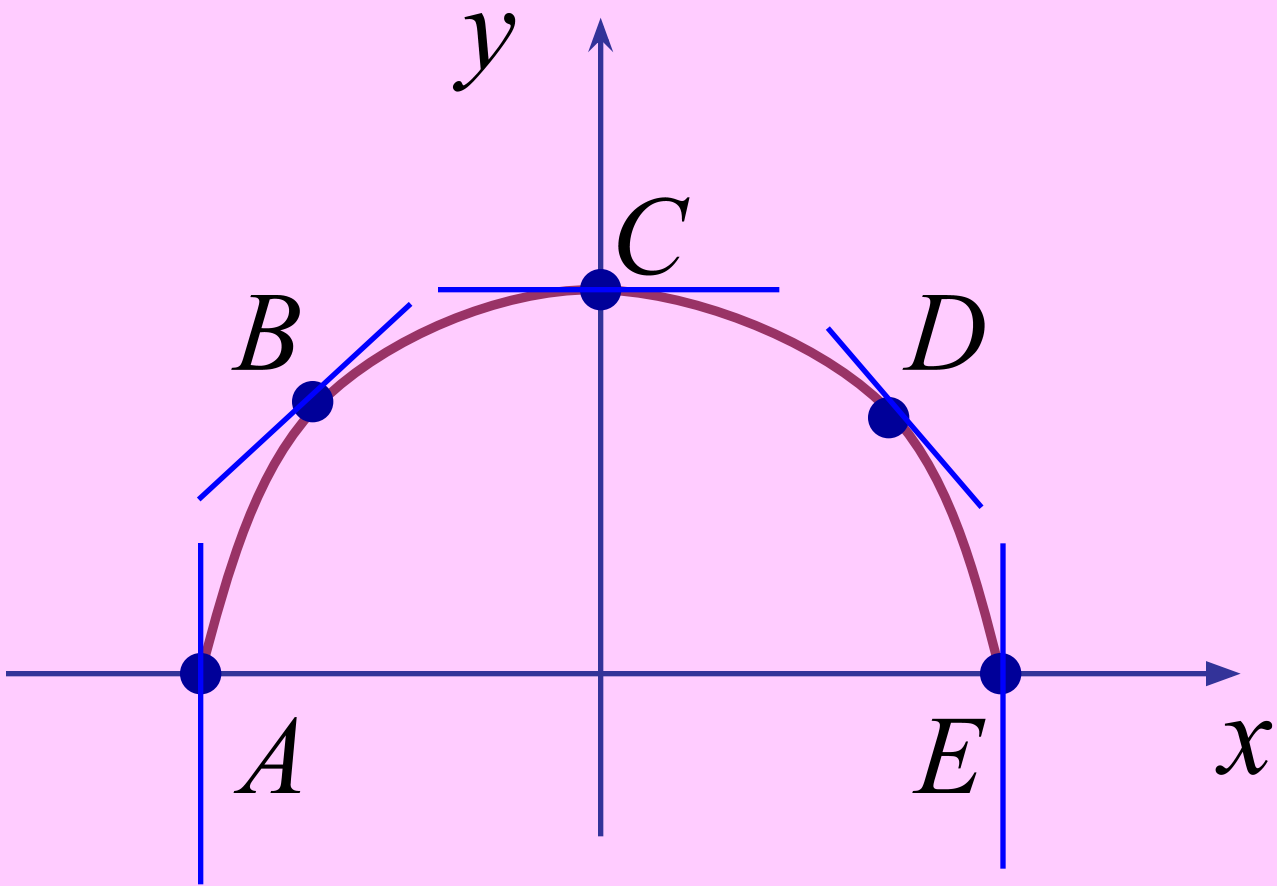
*Производная объема производимой продукции по времени  $u'(t_0)$  есть производительность труда в момент времени  $t_0$ :*

$$z(t_0) = u'(t_0)$$

# *ПРИМЕР.*

*График функции  $y=f(x)$  есть полуокружность.  
Найти  $f'(x)$  в точках A, B, C, D, E, делящих  
полуокружность на четыре равные части.*





Из геометрического смысла производной вытекает, что производная  $f'(x_0)$  есть тангенс угла наклона касательной, проведенной к кривой  $y=f(x)$  в точке  $x_0$ .

В точке  $B$  угол наклона касательной составляет  $45^\circ$ . Следовательно:

$$y'_B = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

В точке  $D$  угол наклона касательной составляет  $135^\circ$ . Следовательно:

$$y'_D = \operatorname{tg} 135^\circ = -1$$

**В точке  $C$  угол касательная параллельна оси  $x$ :**

$$y'_c = \operatorname{tg} 0 = 0$$

**В точках  $A$  и  $E$  угол наклона касательной составляет  $90^\circ$ .**

**Тангенс этого угла не существует, следовательно функция в этих точках не дифференцируема.**

# *ТЕОРЕМА*

*Если функция  $y=f(x)$   
дифференцируема в точке  $x_0$ ,  
то она непрерывна в этой  
точке.*

# Доказательство:

По условию теоремы функция  $y=f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$  :

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

На основании теоремы о связи бесконечно малых величин с пределами функций функцию, стоящую под знаком предела, можно представить как сумму этого предела и бесконечно малой величины:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$$

где  $\alpha(\Delta x)$  – бесконечно малая величина при  $\Delta x \rightarrow 0$

**Отсюда:**

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$$

При  $\Delta x \rightarrow 0$  и  $\Delta y \rightarrow 0$

Следовательно, по определению непрерывности функции, функция  $y=f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ .



**Обратная теорема, в общем случае, неверна.  
Например, функция**

$$y = |x|$$

**непрерывна в точке  $x=0$ :**

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$$

**Проверим, будет ли эта функция дифференцируема  
в данной точке.**

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|x + \Delta x| - |x|}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \Delta x > 0 \\ -1, & \Delta x < 0 \end{cases}$$

**Т.е. общего предела не существует и функция не дифференцируема в этой точке.**



*Непрерывность функции является необходимым,  
но не достаточным условием дифференцируемости  
функции.*

*Если функция имеет непрерывную производную на  
промежутке  $X$ , то она называется гладкой на  
этом промежутке.*

*Если производная функции имеет конечное число точек  
разрыва 1 рода, то такая функция называется  
кусочно-гладкой.*