

8.2. Определение производной

Пусть функция $y=f(x)$ определена на промежутке X .
Выберем точку $x \in X$

Дадим аргументу x приращение Δx , тогда функция получит приращение

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Производной функции $y = f(x)$
называется предел отношения
приращения функции к
приращению
независимого аргумента, когда
приращение аргумента
стремится
к нулю.

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Обозначения производной:

$$y'; \quad f'(x); \quad \frac{dy}{dx}; \quad \frac{df(x)}{dx}$$

Нахождение производной функции называется дифференцированием.

Если функция имеет конечную производную в некоторой точке, то она называется дифференцируемой в этой точке.

Вернемся к рассматриваемым задачам.

Из задачи о касательной вытекает

геометрический смысл производной

Производная $f'(x_0)$ есть угловой коэффициент (тангенс угла наклона) касательной, проведенной к кривой $y=f(x)$ в точке x_0 :

$$k = f'(x_0)$$

Тогда уравнение касательной к кривой в данной точке будет иметь вид:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Из задачи о скорости движения вытекает

механический смысл производной

Производная пути по времени $S'(t_0)$ есть скорость точки в момент времени t_0 :

$$v(t_0) = S'(t_0)$$

Из задачи о производительности труда вытекает

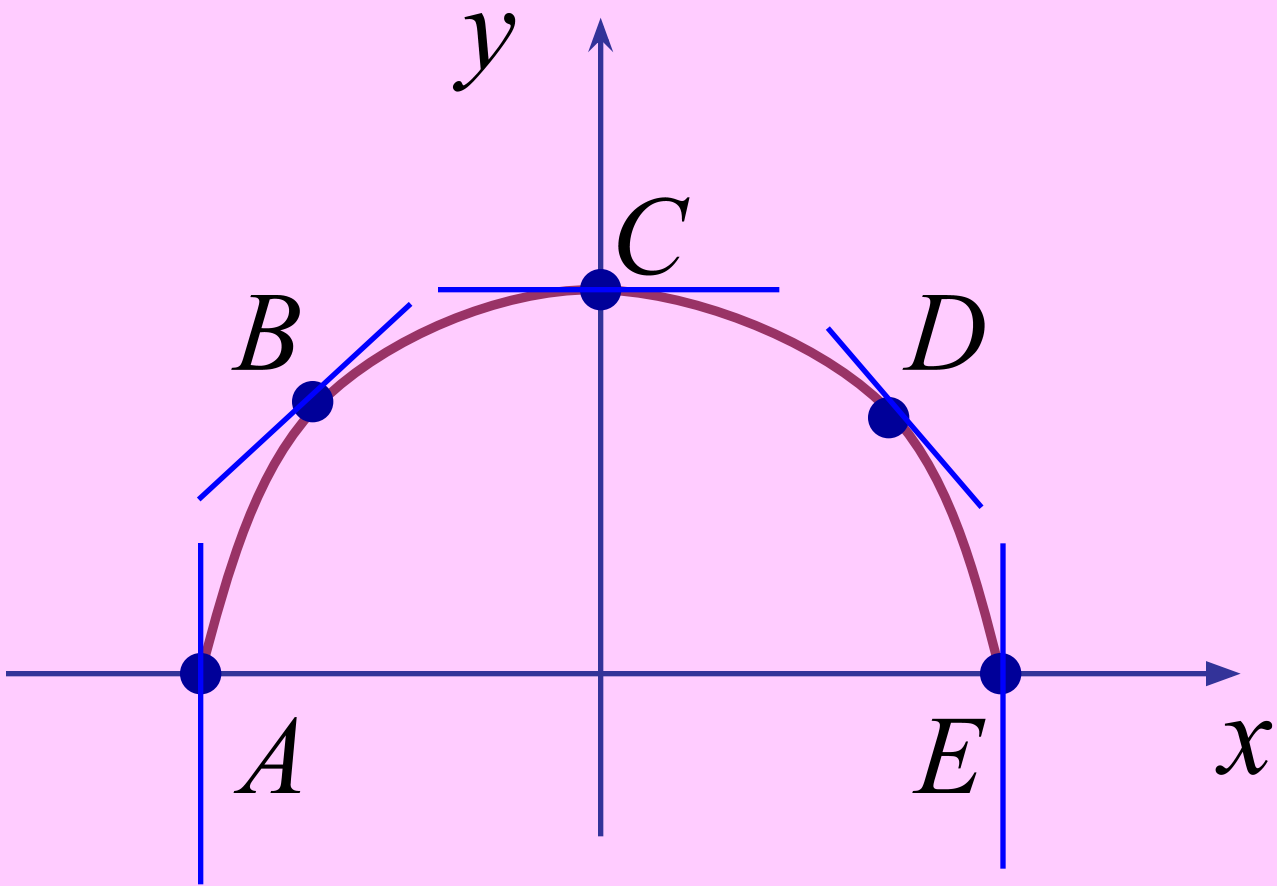
экономический смысл производной

Производная объема производимой продукции по времени $u'(t_0)$ есть производительность труда в момент времени t_0 :

$$z(t_0) = u'(t_0)$$

ПРИМЕР.

*График функции $y=f(x)$ есть полуокружность.
Найти $f'(x)$ в точках A, B, C, D, E, делящих
полуокружность на четыре равные части.*



Из геометрического смысла производной вытекает, что производная $f'(x_0)$ есть тангенс угла наклона касательной, проведенной к кривой $y=f(x)$ в точке x_0 .

В точке B угол наклона касательной составляет 45° . Следовательно:

$$y'_B = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

В точке D угол наклона касательной составляет 135° . Следовательно:

$$y'_D = \operatorname{tg} 135^\circ = -1$$

В точке C угол касательная параллельна оси x :

$$y'_c = \operatorname{tg} 0 = 0$$

В точках A и E угол наклона касательной составляет 90° .

Тангенс этого угла не существует, следовательно функция в этих точках не дифференцируема.

ТЕОРЕМА

*Если функция $y=f(x)$
дифференцируема в точке x_0 ,
то она непрерывна в этой
точке.*

Доказательство:

По условию теоремы функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0 :

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

На основании теоремы о связи бесконечно малых величин с пределами функций функцию, стоящую под знаком предела, можно представить как сумму этого предела и бесконечно малой величины:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$$

где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая величина при $\Delta x \rightarrow 0$

Отсюда:

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$$

При $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$

Следовательно, по определению непрерывности функции, функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0 .



**Обратная теорема, в общем случае, неверна.
Например, функция**

$$y = |x|$$

непрерывна в точке $x=0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$$

**Проверим, будет ли эта функция дифференцируема
в данной точке.**

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|x + \Delta x| - |x|}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \Delta x > 0 \\ -1, & \Delta x < 0 \end{cases}$$

Т.е. общего предела не существует и функция не дифференцируема в этой точке.

*Непрерывность функции является необходимым,
но не достаточным условием дифференцируемости
функции.*

*Если функция имеет непрерывную производную на
промежутке X , то она называется гладкой на
этом промежутке.*

*Если производная функции имеет конечное число точек
разрыва 1 рода, то такая функция называется
кусочно-гладкой.*