ОПРЕДЕЛЕННЫЙ И НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЫ.

Определенный интеграл.

Определенным интегралом функции

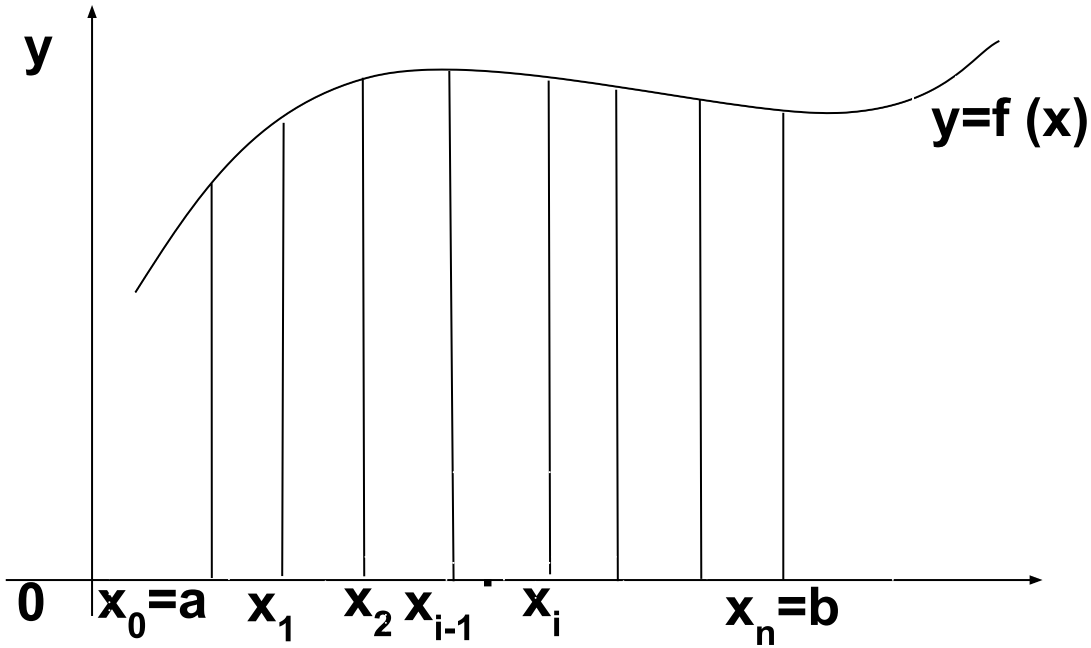
y=f(x) на [a,b] называется $\lim\limits_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot \Delta x_i$,

если этот предел существует и не зависит от способа разбиений [a,b] на Δx_i и от выбора точек ξ_i. Определенный интеграл

обозначается: $\int\limits_a^b f(x)dx.$ Числа *a* и *b*

называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования.

Геометрический смысл определённого интеграла.



$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Свойства определённого интеграла.

1. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$ 2. $\int\limits_a^a f(x) = 0$

3. $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^a f(x)dx$, *k*-любое число

4. $\int\limits_a^b (f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x))dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx +$

$$+\int\limits_a^b f_2(x)dx + ... + \int\limits_a^b f_n(x)dx$$

5.Аддитивность определённого интеграла. Для любых чисел a,b,c справедливо:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$$

Формула Ньютона-Лейбница.

Если *F(x)* есть какая-либо первообразная от непрерывной на $[a, b]$ функции f(x), то справедлива формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Пример.

$$\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^{0,5} = \arcsin 0,5 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}$$

Замена переменной в определённом интеграле.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$x = \sin t$$

$$t = \arcsin x$$

x	0	1
t	0	$\pi/2$

Интегрирование по частям в определённом интеграле.

$$\int_a^b u\,dv = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

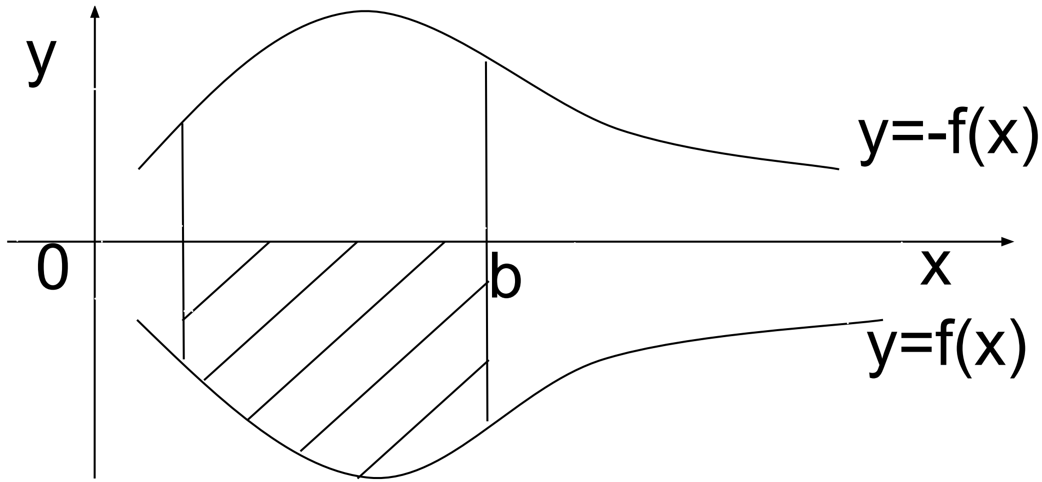
Пример.

$$\int_0^{\pi} x \cdot \cos x dx = x \cdot \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx = \cos x \Big|_0^{\pi} = -2$$

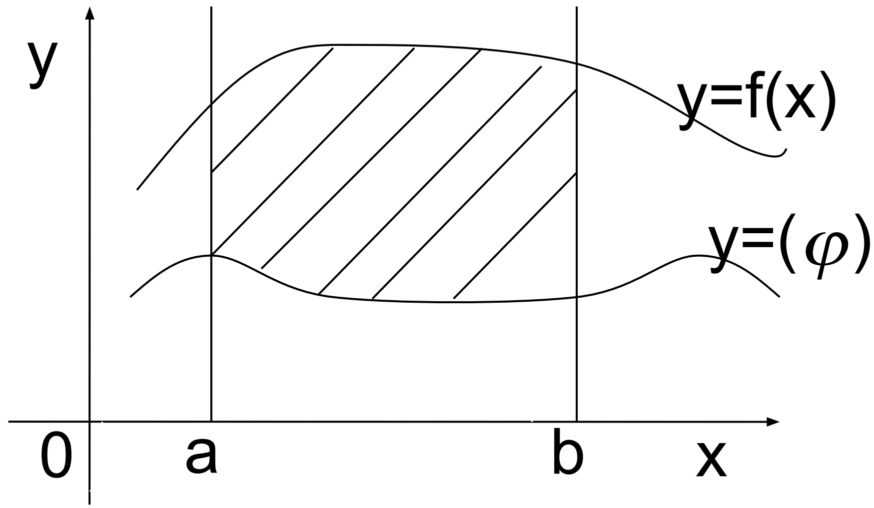
$$u = x, \cos x dx = dv$$

$$du = dx, v = \sin x$$

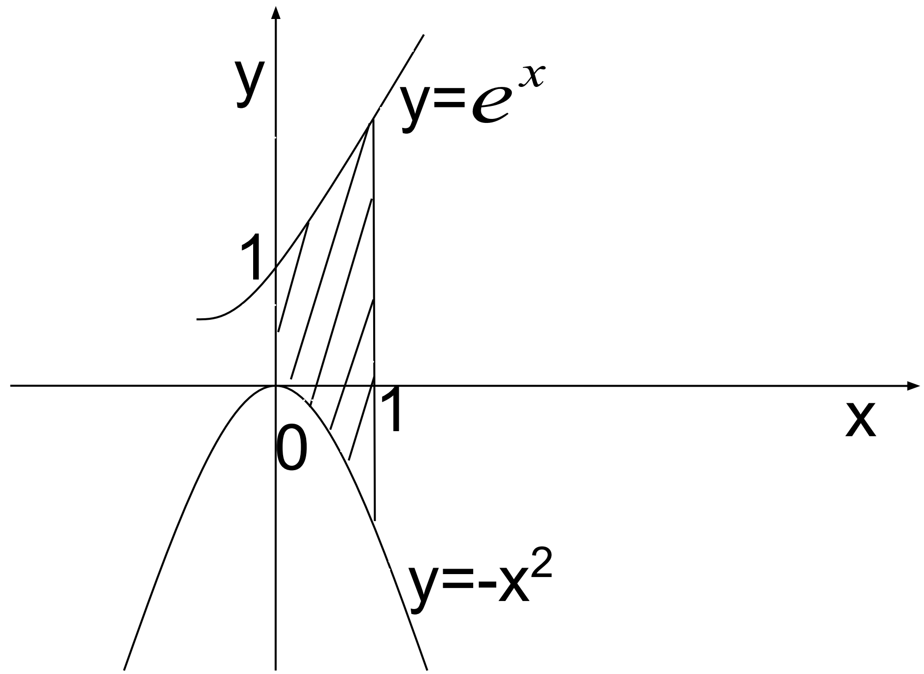
Геометрические приложения определенного интеграла.



$$S = \int_{a}^{b} \left| f(x) \right| dx$$



$$S = \int_{a}^{b} \left[f(x) - \varphi(x) dx \right]$$



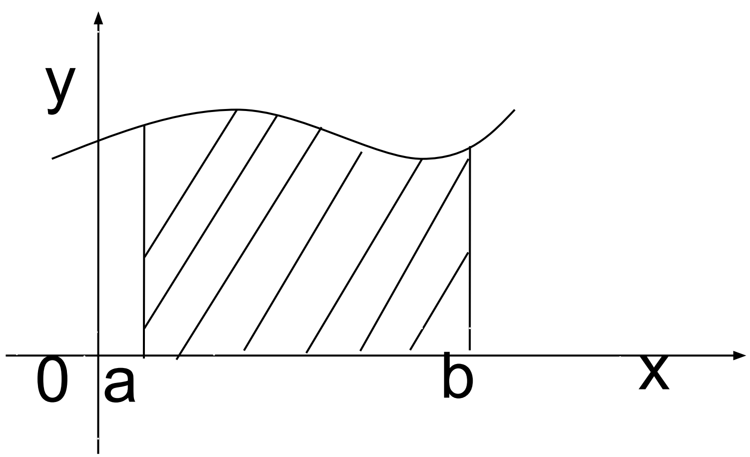
$$S=\int_0^1 (e^x+x^2)dx=(e^x+\frac{x^3}{3})\Big|_0^1=e-1+\frac{1}{3}=e-\frac{2}{3}$$

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой, заданной параметрически.

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$, где $\alpha \le t \le \beta$, $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$,

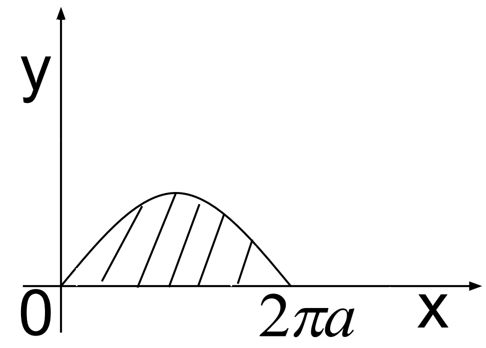
x(t), y(t), x'(t), y'(t) – непрерывны на $[\alpha, \beta]$.

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t) dt$$



Пример.

Найти площадь фигуры, ограниченной осью OX и одной аркой циклоиды: $x = a$ (t-sin t), $y = a$ (1-cos t).



$$S = \int_0^{2\pi} a\cdot(1-\cos x)\cdot a\cdot(t-\sin t)'\,dt = a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt =$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt = a^2(t-2\sin t)\Big|_0^{2\pi} +$$

$$+ a^2\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)dt = a^2\cdot 2\pi + \frac{a^2}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)\ \Big|_0^{2\pi} =$$

$$= 2\pi\cdot a^2 + \frac{a^2}{2}\cdot 2\pi = 3\pi a^2$$

Вычисление длины дуги кривой.

Пусть кривая задана уравнением y=f(x), где f(x) и f’(x) непрерывны на $[a,b]$.

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

Пусть кривая задана в параметрической форме x=x(t), y=y(t), t$\in\left[\alpha,\beta\right]$, причём x(t), y(t), x’(t)$\neq$0, y’(t) непрерывны на $\left[\alpha,\beta\right]$, $x(\alpha)=a, x(\beta)=b.$

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt$$

Несобственный интеграл.

Если существует конечный $\lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$

(b>a), то этот предел называется несобственным интегралом функции f(x) на промежутке [a;$+\infty$) и обозначают

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx.$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

Пример.

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} arctgx\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} arctgb - arctg0 = \frac{\pi}{2}$$

Функции нескольких переменных.

Определение

Функцией двух переменных называется правило, по которому каждой упорядоченной паре чисел $(x;y)$, принадлежащей множеству M, ставится в соответствие единственное действительное число z, принадлежащее множеству L. Множество M называется областью определения функции. Множество L называется областью значения функции при условии, что каждое $z \in L$ соответствует хотя бы одной паре $(x;y) \in M$.

Функцию двух переменных обозначают: $z=f(x; y)$.

Частные производные.

Частные производные по x.

Предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x},$

если он существует, называется частной производной (I порядка) функции z=f(x,y) по x в точке (x_0, y_0) и обозначается:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0); \quad f'_x(x_0, y_0); \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Частные производные по y.

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$$

называется частной производной (I порядка) функции z=f(x,y) по y в точке (x_0, y_0) и обозначается:

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0); \quad f'_y(x_0, y_0); \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Частные производные высших порядков.

$$\frac{\partial\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

Пример.

$z = x^2 y^3$. Вычислить частные производные II порядка функции.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \cdot y^3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 \cdot y^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x^2 \cdot y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6xy^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6xy^2.$$

Полный дифференциал.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$$

Скалярное поле.

Часть пространства или всё пространство, в каждой точке p(x,y,z) которого задана скалярная функция U=F(x, y, z)=F(p), называется скалярным полем, а функция U= F(p) называется функцией поля.

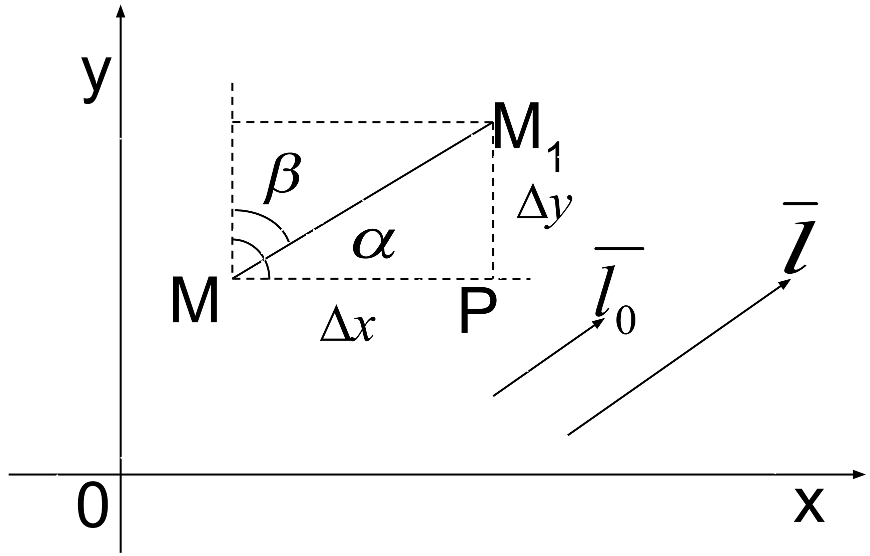
Пример.

Найти полный дифференциал функции $z = x\ y^2$ в произвольной точке.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy \cdot$$

Следовательно $dz = y^2 dx + 2xydy \cdot$

Производная по направлению.



$$\frac{\partial z}{\partial \bar{l}} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta$$

Градиент

$$gradU = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \bar{k}$$

Экстремумы функции двух переменных.

Необходимое условие существования экстремума.

Пусть функция z=f(x, y) в точке $P_0(x_0, y_0)$ имеет экстремум и пусть существует $f'_x(x_0, y_0)$ и $f'_y(x_0, y_0)$.

Тогда $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Достаточное условие существования экстремума.

Пусть для функции z=f(x, y) в критической точке $P_0(x_0, y_0)$ существуют производные $f_{xx}''(P_0)$, $f_{yy}''(P_0)$, $f_{xy}''(P_0)$. Выражение $f_{xx}''(P_0) \cdot f_{yy}''(P_0) - [f_{xy}''(P_0)]^2 = \Delta(P_0)$ назовём дискриминантом функции z=f(x, y) в точке $P_0(x_0, y_0)$.

Возможны три случая:

1) $\Delta(P_0)>0$, тогда точка P_0 – точка экстремума:

при $f_{xx}''(P_0)>0$ – точка минимума;

при $f_{xx}''(P_0)<0$ – точка максимума.

2) $\Delta(P_0)<0$, тогда P_0 не является точкой экстремума.

Пример исследовать на экстремум функцию

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$$

Решение. $f'_x = 3x^2 + y^2 - 15$; $f'_y = 6xy - 12$.

Решая систему $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$ получим четыре

стационарные точки $P_1(1,2)$; $P_2(2,1)$; $P_3(-1,-2)$; $P_4(-2,-1)$.

Продолжение примера.

Проверим достаточное условие экстремума в каждой из точек.

$f''_{xx} = 6x$; $f''_{xy} = 6y$; $f''_{yy} = 6x$.

$\Delta = A \cdot C - B^2$.

1) Для точки $P_1(1,2)$: $A = f''_{xx}(P_1) = 6$;

$B = f''_{xy}(P_1) = 12$; $C = f''_{yy}(P_1) = 6$; $\Delta = 6 \cdot 6 - 12^2 < 0$.

Значит, в точке P_1 экстремума нет.

1) Для точки $P_2(2,1)$: $\Delta > 0$, $A > 0$.

В точке P_2 функция имеет минимум.

$f_{\min} = f(P_2) = -28$

Аналогично, проверяют точки P_3 и P_4.