

Определённый интеграл. Его применение



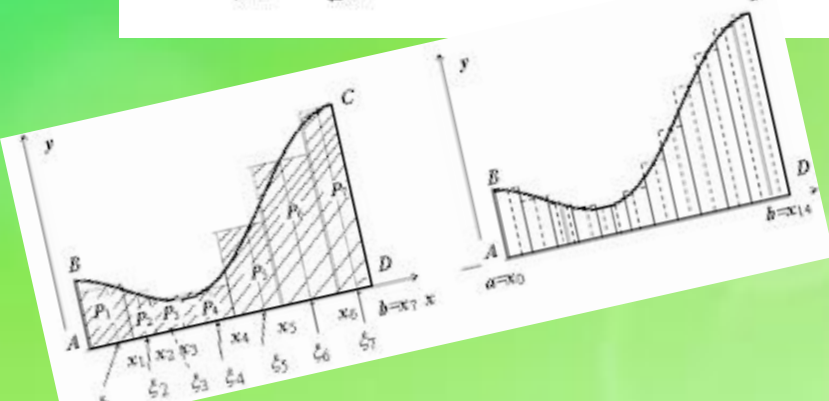
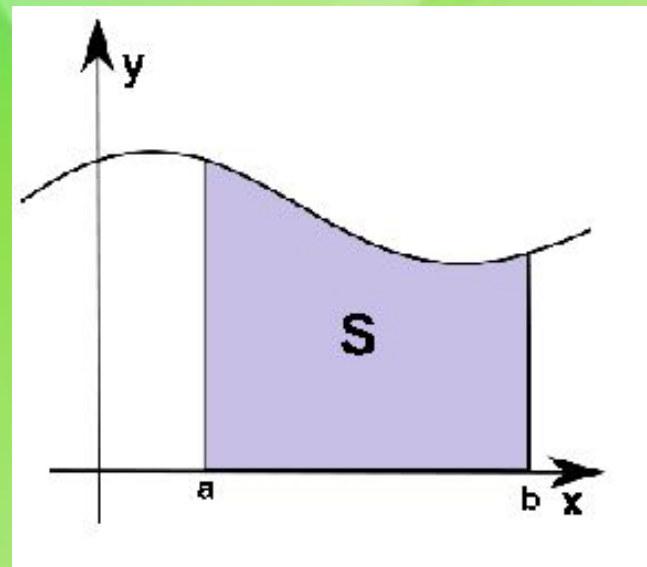
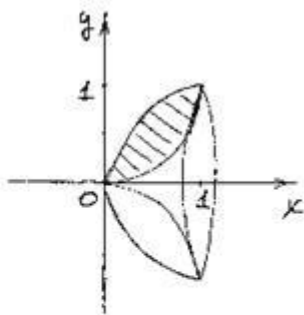
$$= \sin \frac{\pi x}{2}, y = x^2$$

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^1 (\sin^2 \frac{\pi x}{2} - x^4) dx =$$

$$= \pi \int_0^1 (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \pi x - x^4) dx =$$

$$= \pi (\frac{1}{2}x - \frac{1}{2\pi} \sin \pi x - \frac{1}{5}x^5) \Big|_0^1 = \pi (\frac{1}{2} - \frac{1}{5}) = \frac{3\pi}{10}$$



Выполнила:

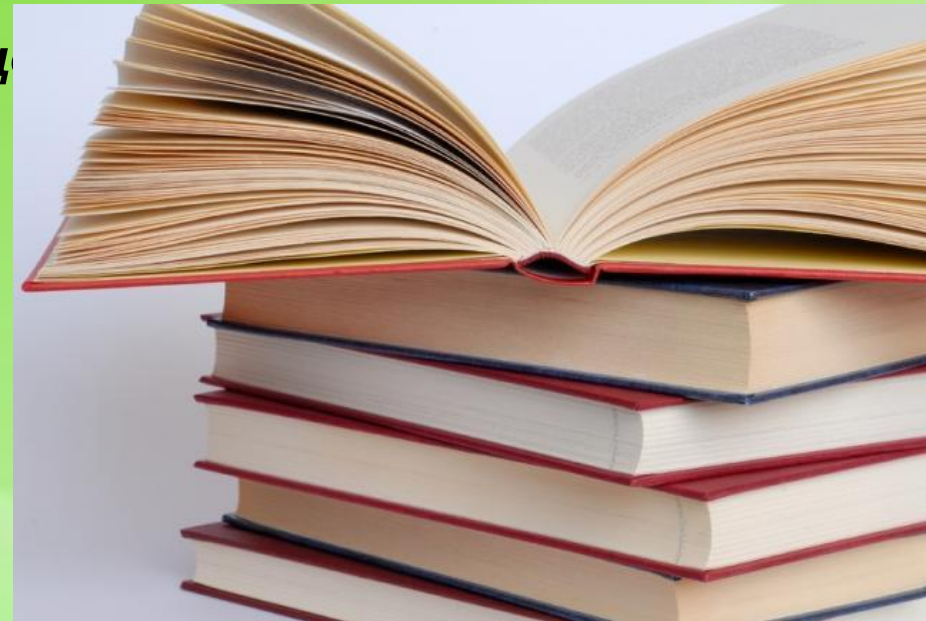
Студентка группы К-11

ХК ДУТ

Шкурко Виктория

План

1. Понятие определённого интеграла
 2. Пример
 3. Свойства определённого интеграла
 4. Определённый интеграл с переменным верхним пределом
 5. Применение определенного интеграла
- ❖ *Площадь криволинейной трапеции*
 - ❖ *Длина кривой*
 - ❖ *Площадь поверхности вращения*
 - ❖ *Объем тела вращения*



Понятие определённого интеграла

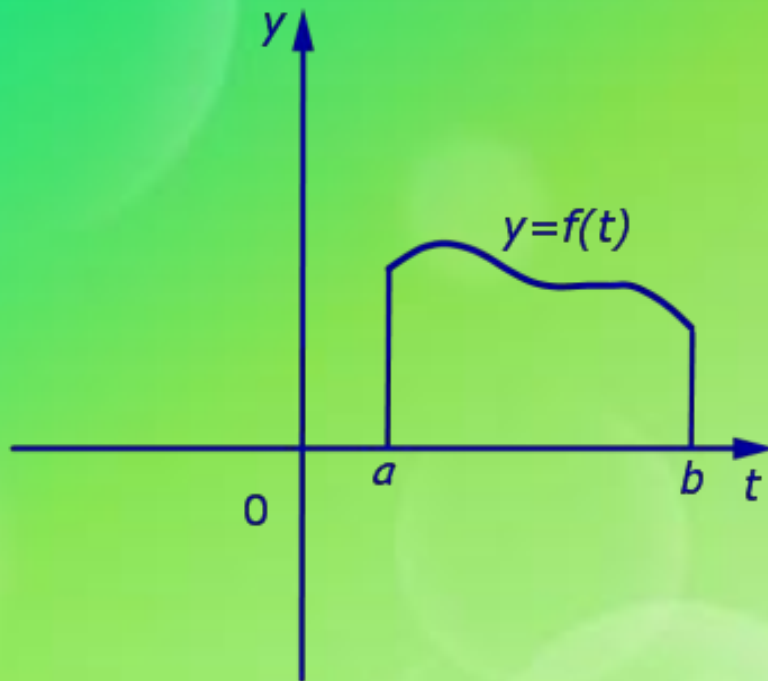
Определённым интегралом от непрерывной функции $f(x)$ на конечном отрезке $[a, b]$ (где называется приращение какой-нибудь её первообразной на этом отрезке. При этом употребляется



запись

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, а отрезок $[a, b]$ – отрезком интегрирования.



Таким образом, если $F(x)$ – какая-нибудь первообразная функция для $f(x)$, то, согласно определению:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Равенство называется формулой Ньютона-Лейбница



При $a = b$ по определению

принимается

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$



Разность $F(b) - F(a)$ кратко записывают так:

$$F(x) \Big|_a^b$$



Поэтому формулу Ньютона-Лейбница
будем записывать и так:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b.$$



Пример

- ❖ Вычислить определённый интеграл: $\int_4^5 x\sqrt{x^2-16} dx$
- ❖ Решение. Произведём замену переменной, полагая: $t = x^2 - 16$.
- ❖ Тогда $dt = 2x dx$, откуда $x dx = (1/2) dt$, и подынтегральное выражение преобразуется так:

$$x\sqrt{x^2-16} dx = \sqrt{x^2-16} \cdot x dx = (1/2)\sqrt{t} dt.$$

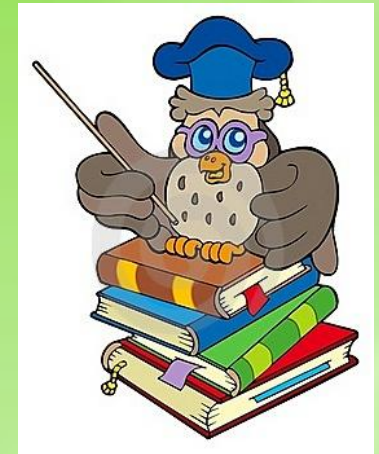


❖ Найдём новые пределы интегрирования. Подстановка значений $x = x^2 - 16$ и $x = 5$ в уравнение $x^2 - 16 = 9$ даёт $x = 5$ а $x = -3$.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

❖ Используя теперь формулу получим:

$$I = \int_0^9 \frac{1}{2} \sqrt{t} dt = \frac{1}{2} \int_0^9 t^{1/2} dt = \frac{1}{2} \frac{t^{3/2}}{3/2} \Big|_0^9 = \frac{1}{3} t \sqrt{t} \Big|_0^9 = \frac{1}{3} \cdot 9 \sqrt{9} = 9.$$



❖ После замены переменной мы не возвращались к старой переменной, а применили формулу Ньютона-Лейбница к полученной

Свойства определённого интеграла

- ❖ Теорема 1. *Определённый интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю, т.е.*

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

Это свойство содержится в самом определении определённого интеграла. Однако его можно получить и по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^a f(x) dx = F(a) - F(a) = 0.$$



Теорема 2. Величина определённого интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования, т.е.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$$

Пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$. Для $f(t)$ первообразной служит та же функция $F(t)$, в которой лишь иначе обозначена независимая переменная. Следовательно:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b.$$

На основании формулы последнее равенство означает равенство интегралов

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$$

и



Теорема 3. Постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла, т.е.

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$



Теорема 4. Определённый интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме определённых интегралов от этих функций.

$$\int_a^b [f(x) + \varphi(x) - \psi(x)] dx =$$
$$= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b \varphi(x) dx - \int_a^b \psi(x) dx.$$



Теорема 5. Если отрезок интегрирования разбит на части, то определённый интеграл по всему отрезку равен сумме определённых интегралов по его частям, т.е. если

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$



Теорема 6. При перестановке пределов интегрирования абсолютная величина определённого интеграла не меняется, а изменяется лишь его знак, т.е. $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$.



Теорема 7 (теорема о среднем). Определённый интеграл равен произведению длины отрезка интегрирования на значение подынтегральной функции в некоторой точке внутри его, т.е.

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(\xi), \quad a < \xi < b.$$



Теорема 8. Если верхний предел интегрирования больше нижнего и подынтегральная функция неотрицательна (положительна), то и определённый интеграл неотрицателен (положителен) — то есть:

$$f(x) \geq 0, \text{ то и } \int_a^b f(x) dx \geq 0,$$

$$\text{а если } f(x) > 0, \text{ то и } \int_a^b f(x) dx > 0.$$



Теорема 9. Если верхний предел интегрирования больше нижнего и функции и непрерывны, то неравенство

$$f(x) \geq \varphi(x)$$

можно почленно интегрировать, т.е.

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b \varphi(x) dx.$$



Определённый интеграл с переменным верхним пределом

Пусть $f(x)$ – непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция, а $F(x)$ – её первообразная. Рассмотрим определённый интеграл:

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a), \quad x \in [a, b]$$



А через t обозначена переменная интегрирования, чтобы не путать её с верхней границей. При изменении x меняется и определённый интеграл т.е. он является функцией верхнего предела интегрирования x , которую обозначим через $\Phi(x)$,

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt.$$



Докажем, что функция $\Phi(x)$ является первообразной для $f(x) = f(t)$. Действительно, дифференцируем

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= \left(\int_a^x f(t) dt \right)' = \\ &= [F(x) - F(a)]' = F'(x) - F'(a) = f(x),\end{aligned}$$

так как $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, а $F(a)$ – постоянная величина.

Функция $\Phi(x)$ – одна из бесконечного множества первообразных для $f(x)$, а именно та, которая при $x = a$ обращается в ноль.



Вычисление определённых интегралов методом интегрирования по частям и методом замены переменной

При выводе формулы
интегрирования по частям было
получено равенство $u dv = d(uv) - v du$.
Проинтегрировав его в пределах
от a до b и учитывая теорему 4
параграфа о свойствах
определённого интеграла

$$\int_a^b u dv = \int_a^b d(uv) - \int_a^b v du.$$



Как это следует из теоремы 2 параграфа о свойствах неопределённого интеграла, первый член в правой части равен разности значений произведения uv при верхнем и нижнем пределах интегрирования. Записав эту разность кратко в виде:

$$uv \Big|_a^b,$$

получаем формулу интегрирования по частям для вычисления определенного интеграла:

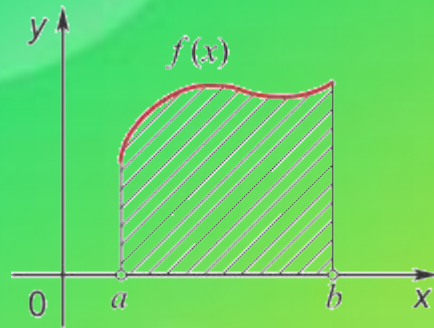
$$\int_a^b u \, dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \, du.$$



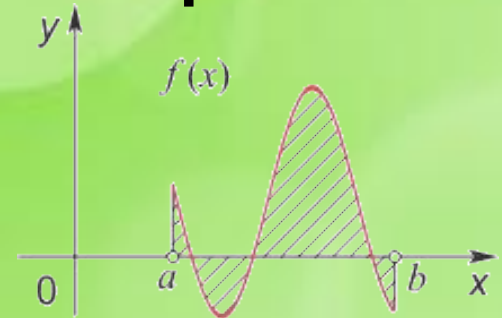
Применение определенного интеграла

❖ Площадь криволинейной трапеции

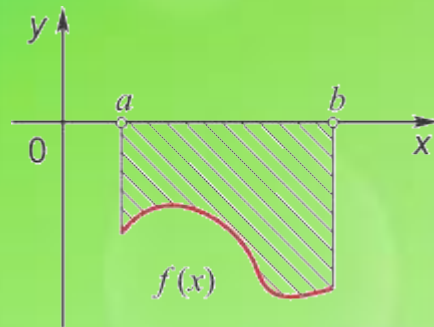
$$S = \int_a^b f(x) dx$$



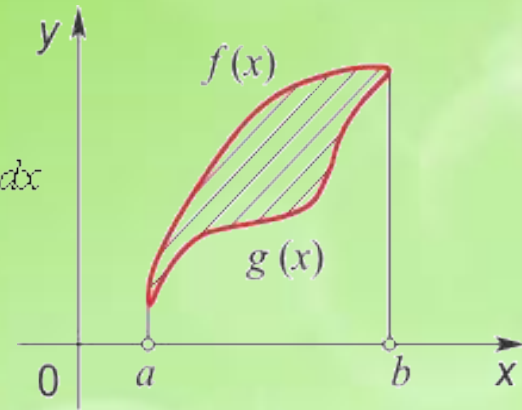
$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$



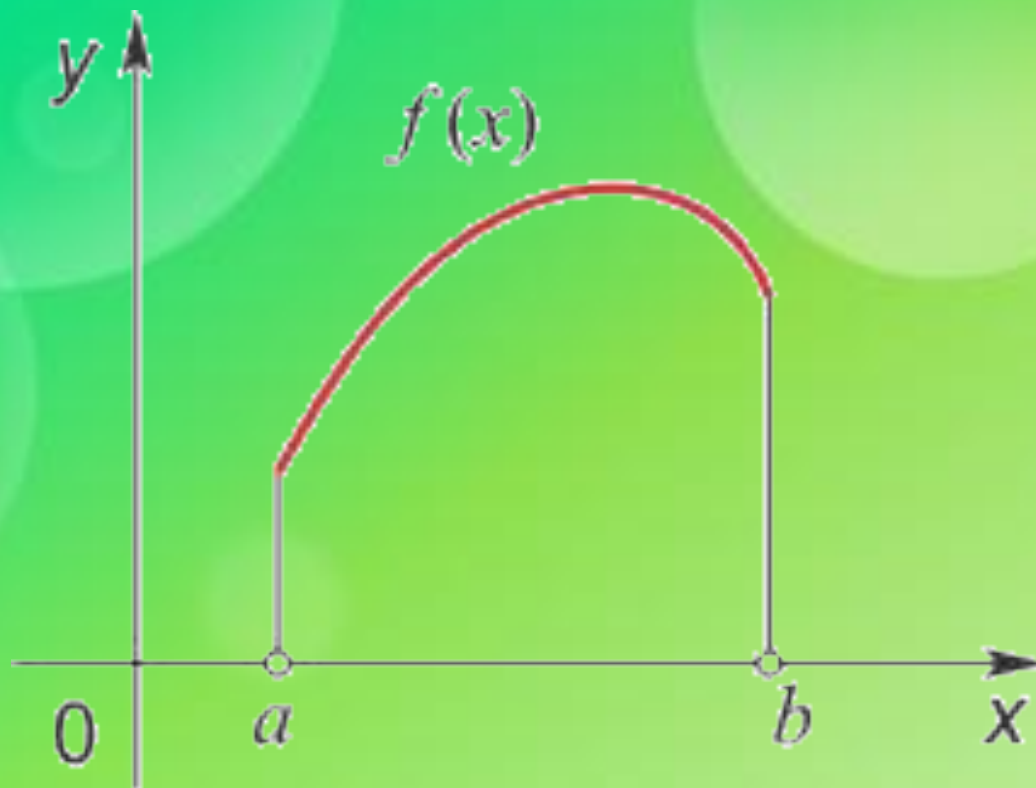
$$S = -\int_a^b f(x) dx$$



$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

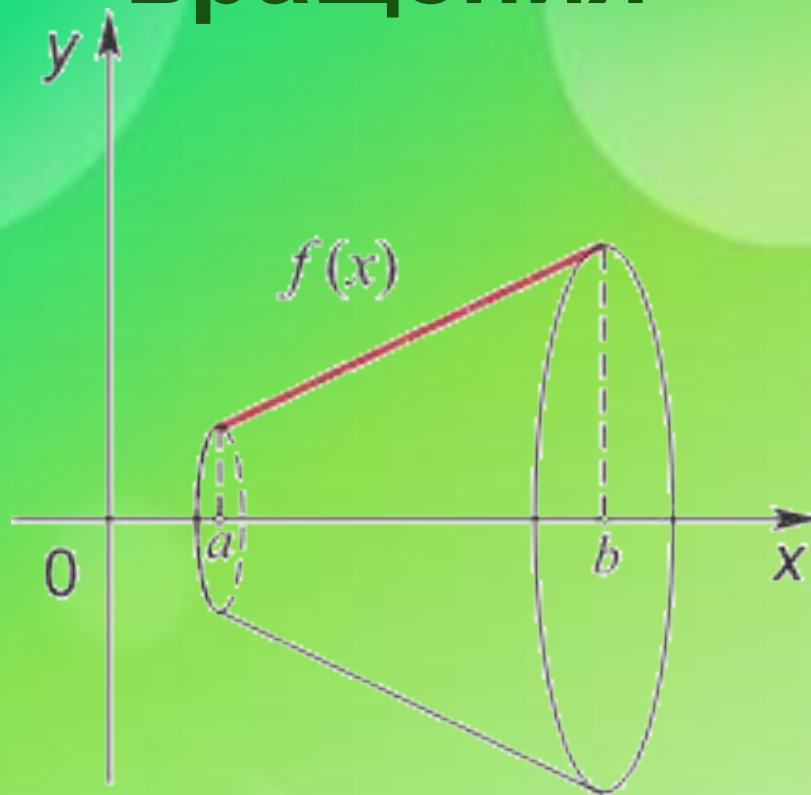


Длина кривой



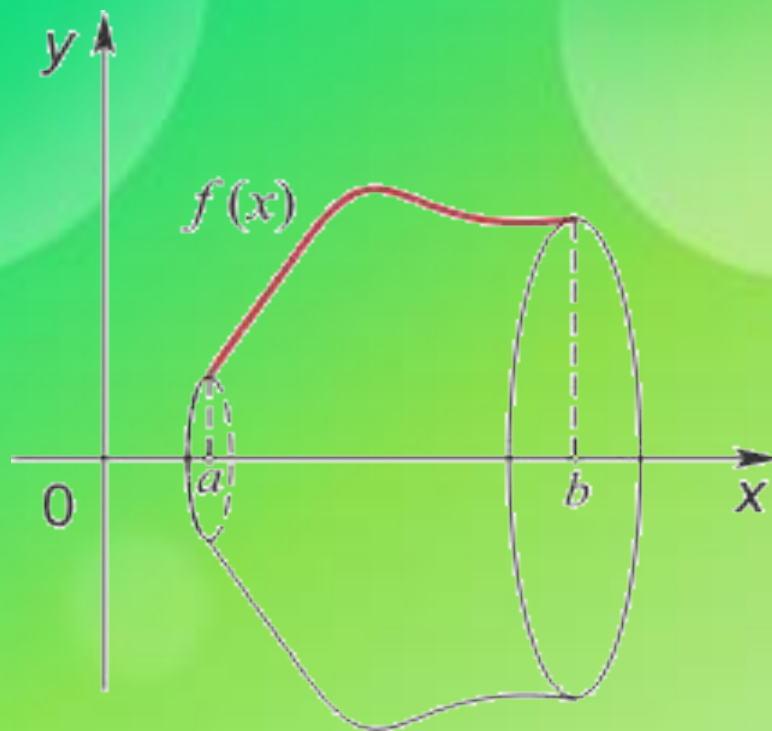
$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Площадь поверхности вращения



$$S = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Объем тела вращения



$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Источники информации:

1. <http://function-x.ru/integral4.html>
2. Конспект лекций
3. <http://uztest.ru/abstracts/?idabstract=68542>
4. <http://osiktakan.ru/alg10.html>





СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!