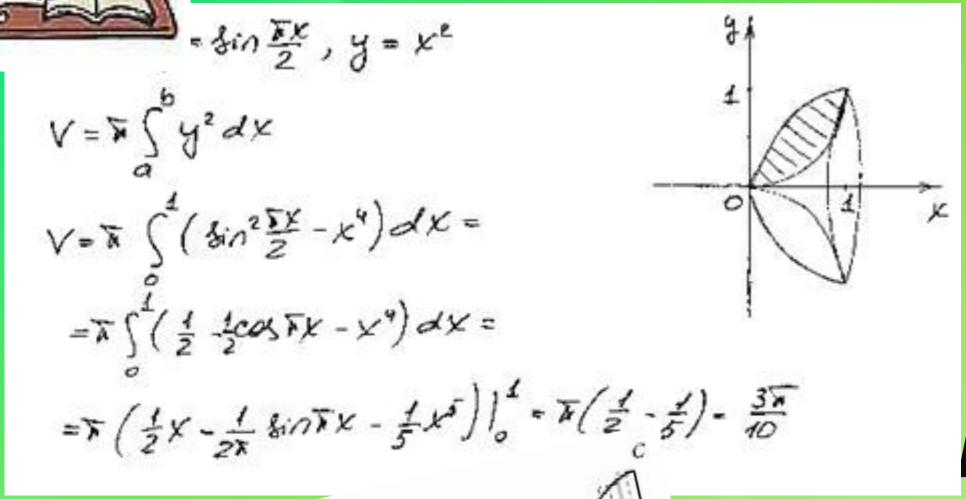
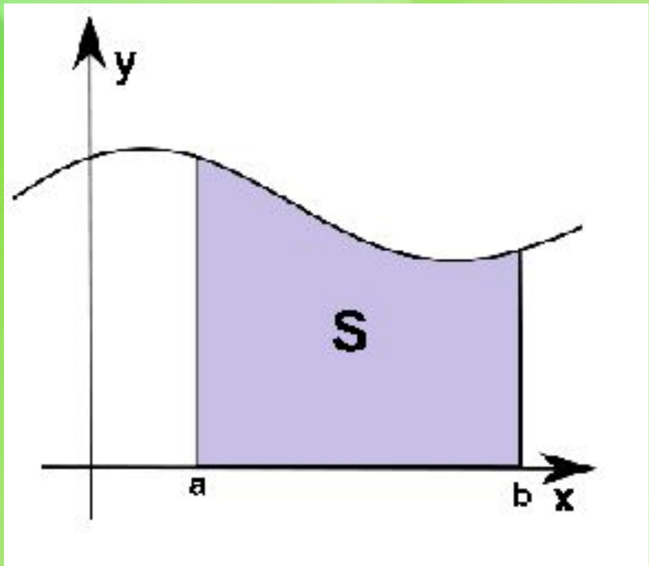
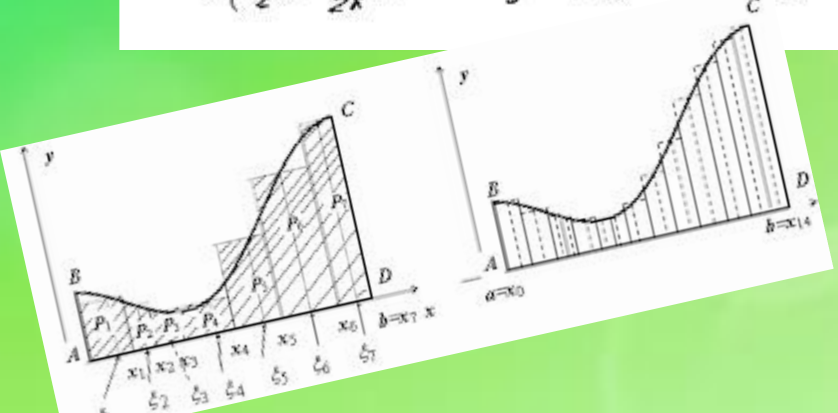
Определённый интеграл. Его применение





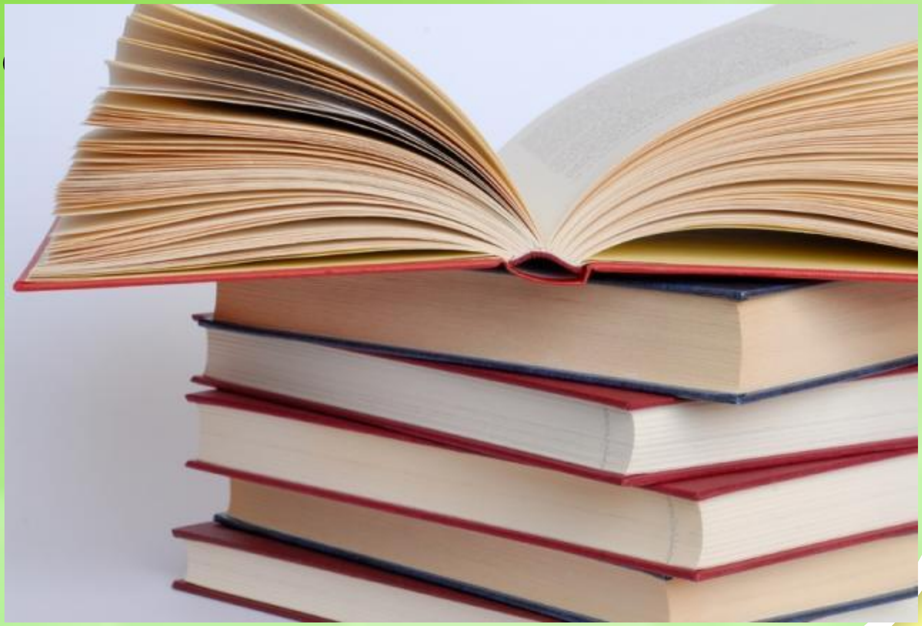


Выполнила:
Студентка группы К-11
ХК ДУТ
Шкурко Виктория

План

1. **Понятие определённого интеграла**
2. **Пример**
3. **Свойства определённого интеграла**
4. **Определённый интеграл с переменным верхним пределом**
5. **Применение определенного интеграла**

- ***Площадь криволинейной трапеции***
- ***Длина кривой***
- ***Площадь поверхности вращ***
- ***Объем тела вращения***

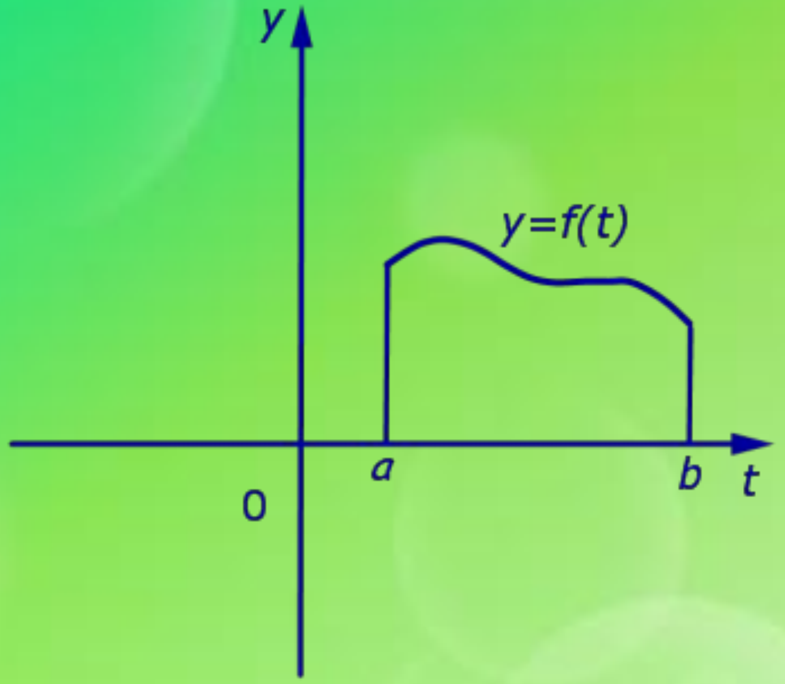


Понятие определённого интеграла

Определённым интегралом от непрерывной функции f(x) на конечном отрезке [a, b] (где) называется приращение какой-нибудь её первообразной на этом отрезке. При этом употребляется запись

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Числа *a* и *b* называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, а отрезок [*a*, *b*] – отрезком интегрирования.



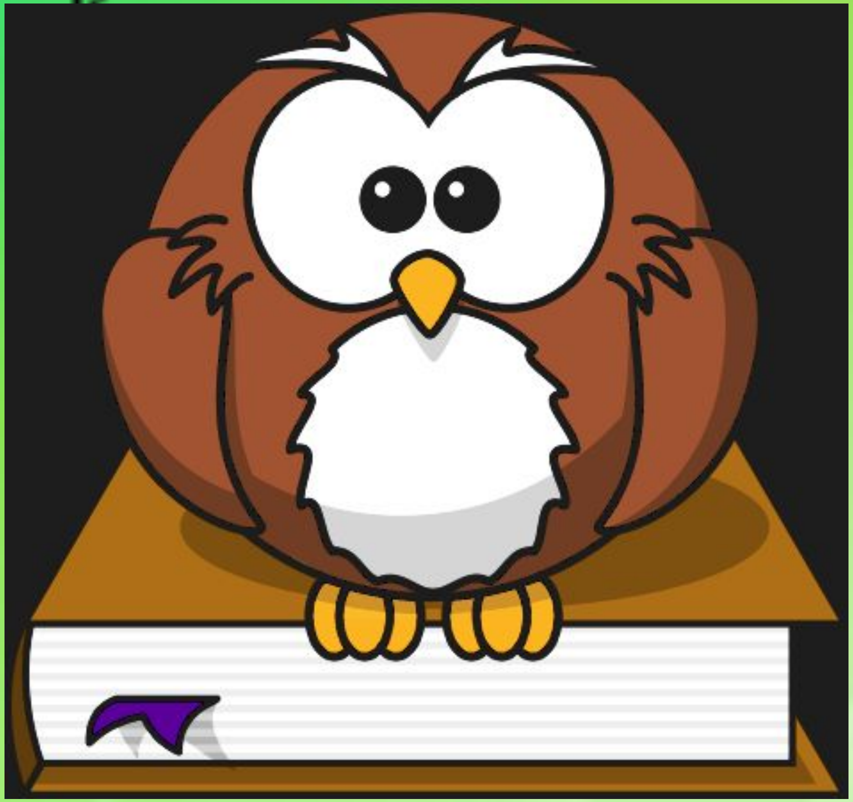
Таким образом, если *F*(*x*) – какая-нибудь первообразная функция для *f*(*x*), то, согласно определению:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Равенство называется формулой Ньютона-Лейбница

При *a = b* по определению принимается

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$



Разность $F(b) - F(a)$ кратко записывают так:

$$F(x)\Big|_a^b.$$

Поэтому формулу Ньютона-Лейбница будем записывать и так:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Пример

- Вычислить определённый интеграл: $\int_4^5 x\sqrt{x^2-16}\,dx.$
- Решение. Произведём замену переменной, полагая: $t = x^2 - 16.$
- Тогда *dt* = 2*x dx*, откуда *x dx* = (1/2) *dt*, и подынтегральное выражение преобразуется так:

$$x\sqrt{x^2-16}\,dx = \sqrt{x^2-16}\bullet x\,dx = (1/2)\sqrt{t}\,dt.$$

- **Найдём новые пределы интегрирования. Подстановка значений *x* = 4 и *x* = 5 в уравнение** $t = x^2 - 16$ **даёт** $\alpha = 4^2 - 16 = 0$, а $\beta = 5^2 - 16 = 9$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\,\varphi'(t)\,dt\right].$$

- **Используя теперь формулу получим:**

$$I = \int_0^9 \frac{1}{2}\sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^9 t^{1/2}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{t^{3/2}}{3/2}\Big|_0^9 = \frac{1}{3}t\sqrt{t}\Big|_0^9 = \frac{1}{3}\bullet 9\sqrt{9} = 9.$$

- **После замены переменной мы не возвращались к старой переменной, а применили формулу Ньютона-Лейбница к полученной**

Свойства определённого интеграла

- **Теорема 1.** ***Определённый интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю,*** **т.е.**

$$\int_a^a f(x)\ dx = 0.$$

Это свойство содержится в самом определении определённого интеграла. Однако его можно получить и по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^a f(x)\ dx = F(a) - F(a) = 0.$$

Теорема 2. ***Величина определённого интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования***, т.е.

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b f(t)\ dt.$$

Пусть ***F***(***x***) – первообразная для ***f***(***x***). Для ***f***(***t***) первообразной служит та же функция ***F***(***t***)***,*** в которой лишь иначе обозначена независимая переменная. Следовательно:

$$F(x)\Big|_a^b = F(t)\Big|_a^b$$

На основании формулы

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b.$$

последнее равенство означает равенство интегралов

$$\int_a^b f(x)\ dx \quad \text{и} \quad \int_a^b f(t)\ dt.$$

Теорема 3. ***Постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла,*** т.е.

$$\int_a^b kf(x)\ dx = k\int_a^b f(x)\ dx.$$

Теорема 4. ***Определённый интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме определённых интегралов от этих функций, т.е.***

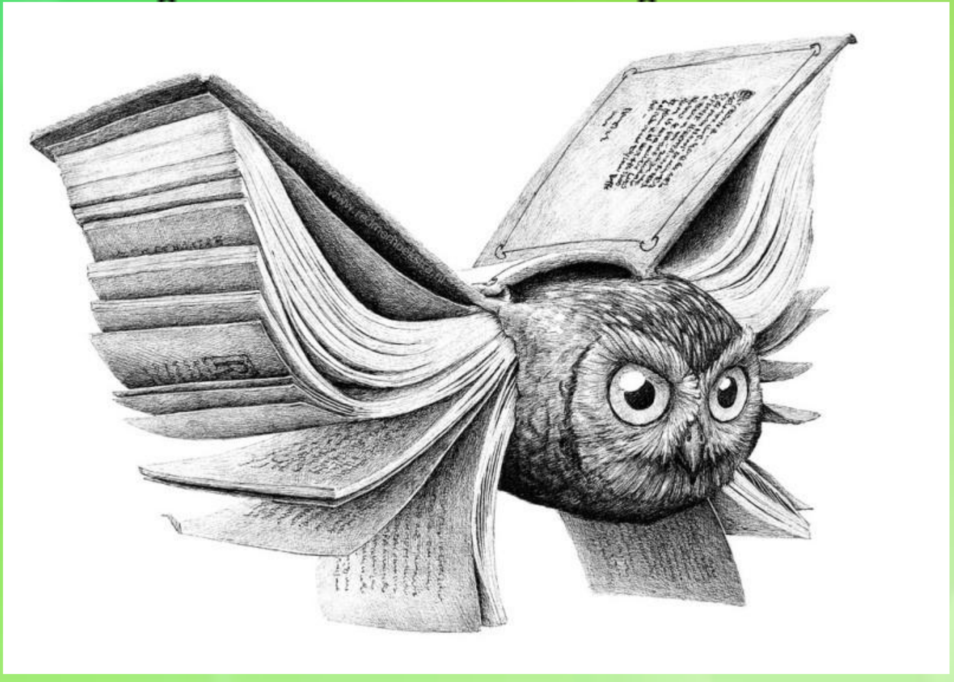
$$\int_a^b \left[f(x) + \varphi(x) - \psi(x)\, dx \right] =$$

$$= \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b \varphi(x)\, dx - \int_a^b \psi(x)\, dx.$$

Теорема 5. ***Если отрезок интегрирования разбит на части, то определённый интеграл по всему отрезку равен сумме определённых интегралов по его частям,*** т.е. если $c \in [a;b]$, то:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Теорема 6. ***При перестановке пределов интегрирования абсолютная величина определённого интеграла не меняется, а изменяется лишь его знак,*** т.е. $\int_b^a f(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx.$

- 

Теорема 7 (теорема о среднем). ***Определённый интеграл равен произведению длины отрезка интегрирования на значение подынтегральной функции в некоторой точке внутри его,*** **т.е.**

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi),\quad a<\xi<b.$$

Теорема 8. ***Если верхний предел интегрирования больше нижнего и подынтегральная функция неотрицательна (положительна), то и определённый интеграл неотрицателен (положителен), т.е. если***

$$f(x) \ge 0, \quad \textit{то и} \quad \int_a^b f(x)\,dx \ge 0,$$

$$\textit{а если} \quad f(x) > 0, \quad \textit{то и} \quad \int_a^b f(x)\,dx > 0.$$

Теорема 9. ***Если верхний предел интегрирования больше нижнего и функции и непрерывны, то неравенство***

$f(x) \geq \varphi(x)$

можно почленно интегрировать, т.е.

$$\int_a^b f(x)\ dx \geq \int_a^b \varphi(x)\ dx.$$

Определенный интеграл с переменным верхним пределом

Пусть *f*(*x*) – непрерывная на отрезке [*a*, *b*] функция, а *F*(*x*) – её первообразная. Рассмотрим определённый интеграл:

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a), \qquad x \in [a, b]$$

А через *t* обозначена переменная интегрирования, чтобы не путать её с верхней границей. При изменении *x* меняется и определённый интеграл $\int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a)$, т.е. он является функцией верхнего предела интегрирования *x*, которую обозначим через *Ф*(*x*), т

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Докажем, что функция *Φ*(*x*) является первообразной для *f*(*x*) = *f*(*t*). Действительно, диффере

$$\Phi'(x)=\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'=$$

$$=\left[F(x)-F(a)\right]'=F'(x)-F'(a)=f(x),$$

так как *F*(*x*) – первообразная для *f*(*x*), а *F*(*a*) – постояная величина.

Функция *Φ*(*x*) – одна из бесконечного множества первообразных для *f*(*x*), а именно та, которая при *x* = *a* обращается в ноль.

Вычисление определённых интегралов методом интегрирования по частям и методом замены переменной

При выводе формулы интегрирования по частям было получено равенство *u dv = d*(*uv*) – *v du*. Проинтегрировав его в пределах от *a* до *b* и учитывая теорему 4 параграфа о свойствах определённого интеграл

$$\int_a^b u\,dv = \int_a^b d\,(uv) - \int_a^b v\,du.$$

Как это следует из теоремы 2 параграфа о свойствах неопределённого интеграла, первый член в правой части равен разности значений произведения *uv* при верхнем и нижнем пределах интегрирования. Записав эту разность кратко в виде:

$$uv\Big|_a^b,$$

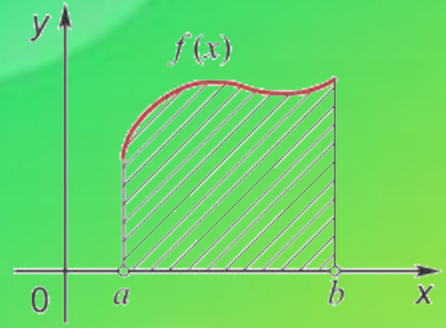
получаем формулу интегрирования по частям для вычисления определенного интеграла:

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

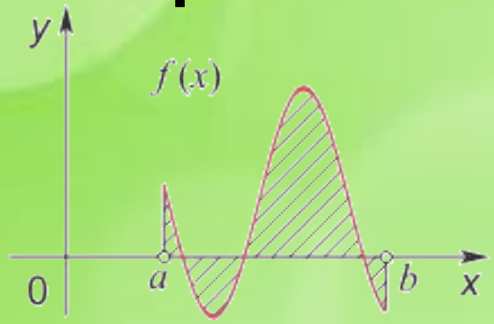
Применение определенного интеграла

❖ **Площадь криволинейной трапеции**

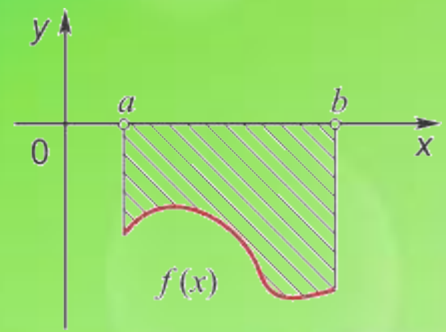
$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$



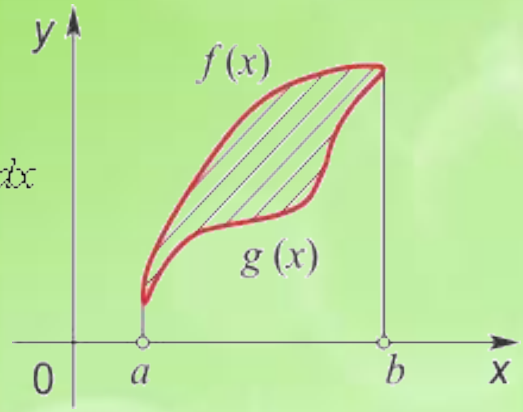
$$S=\int_a^b \left|f(x)\right|dx$$



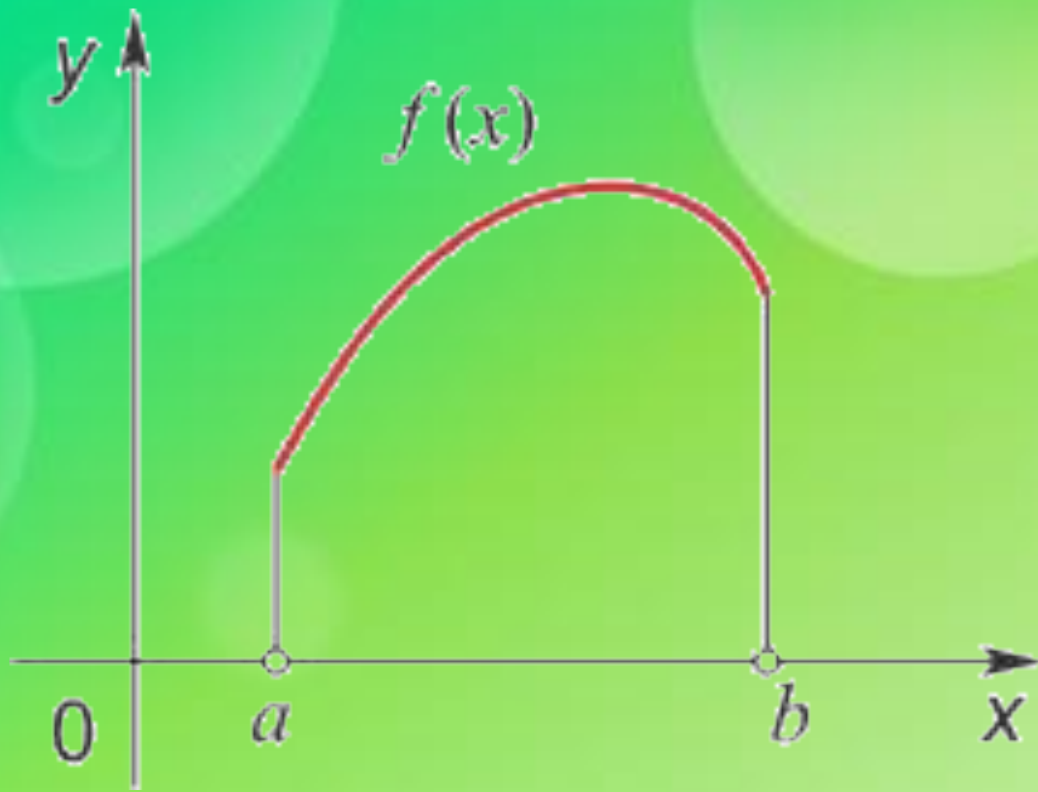
$$S=-\int_a^b f(x)\,dx$$



$$S=\int_a^b \left[f(x)-g(x)\right]dx$$

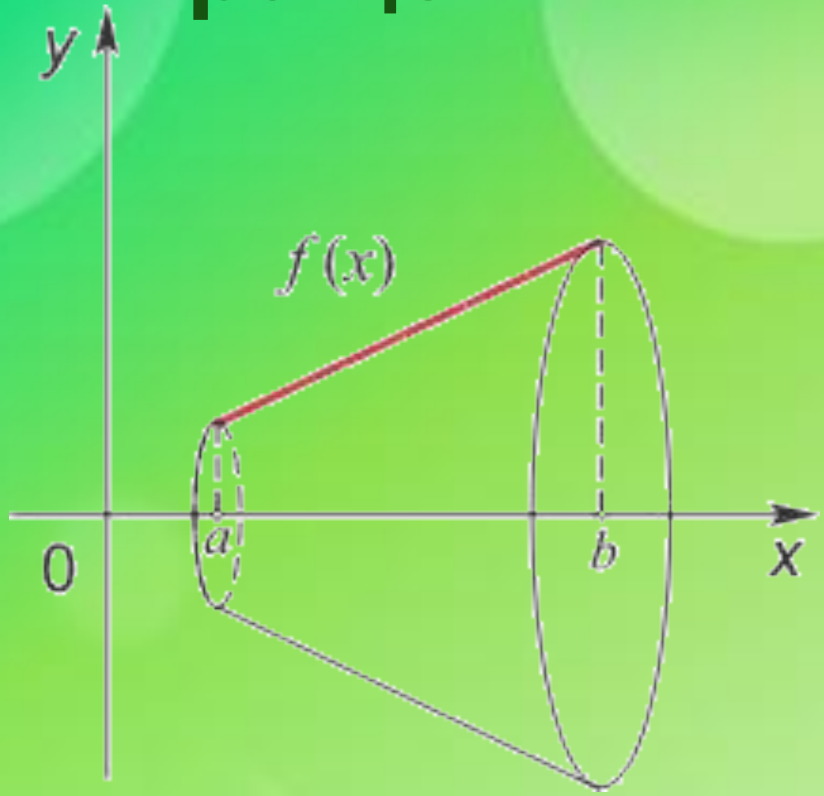


Длина кривой



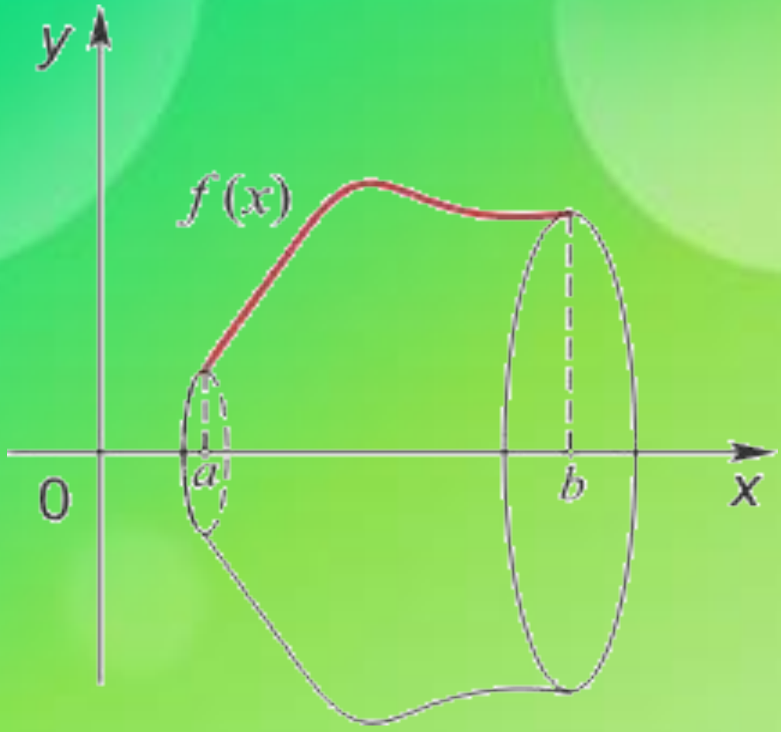
$$\ell = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

Площадь поверхности вращения



$$S = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

Объем тела вращения



$$V = \pi \cdot \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$$

Источники информации:

1. http://function-x.ru/integral4.html
2. Конспект лекций
3. http://uztest.ru/abstracts/?idabstract=68542
4. http://osiktakan.ru/alg10.html


СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ !