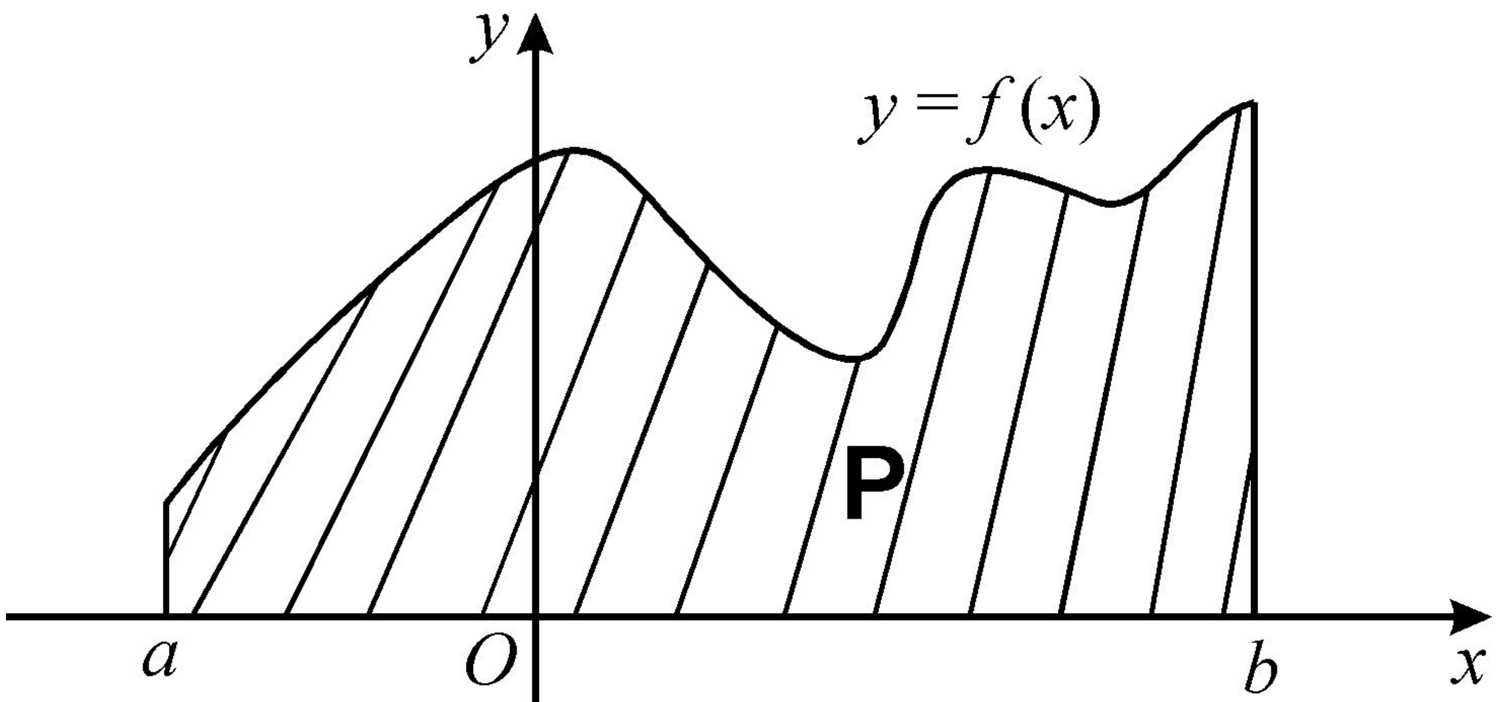
Глава 2. Определенный интеграл

§ 1. Площадь криволинейной трапеции.

Определение 1. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и неотрицательна на $[a,b]$. Криволинейной трапецией будем называть фигуру на плоскости, ограниченную прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и кривой $y = f(x)$.



Задача (о площади криволинейной трапеции). Вычислить площадь криволинейной трапеции **Р**. Вопрос: что такое площадь криволинейной трапеции? Что такое площадь многоугольника мы знаем.

<u>Схема «Т»</u>

1. Разобьём $[a,b]$ точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n\text{-}1} < x_n = b$$

на конечное число частей. Точки берем произвольно. Таким образом, получаем разбиение

$$\mathrm{T} = \{[x_0,x_1], [x_1,x_2], \ldots, [x_{n\text{-}1},x_n]\}$$

отрезка $[a,b]$ на более мелкие отрезки.

Точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ называются точками разбиения, а полученные отрезки – отрезками разбиения.

2. Обозначим через

$\Delta x_1 = x_1 - x_0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1$, …, $\Delta x_n = x_n - x_{n\text{-}1}$,
где Δx_i – длина i-того отрезка (i =1, 2, …, n).

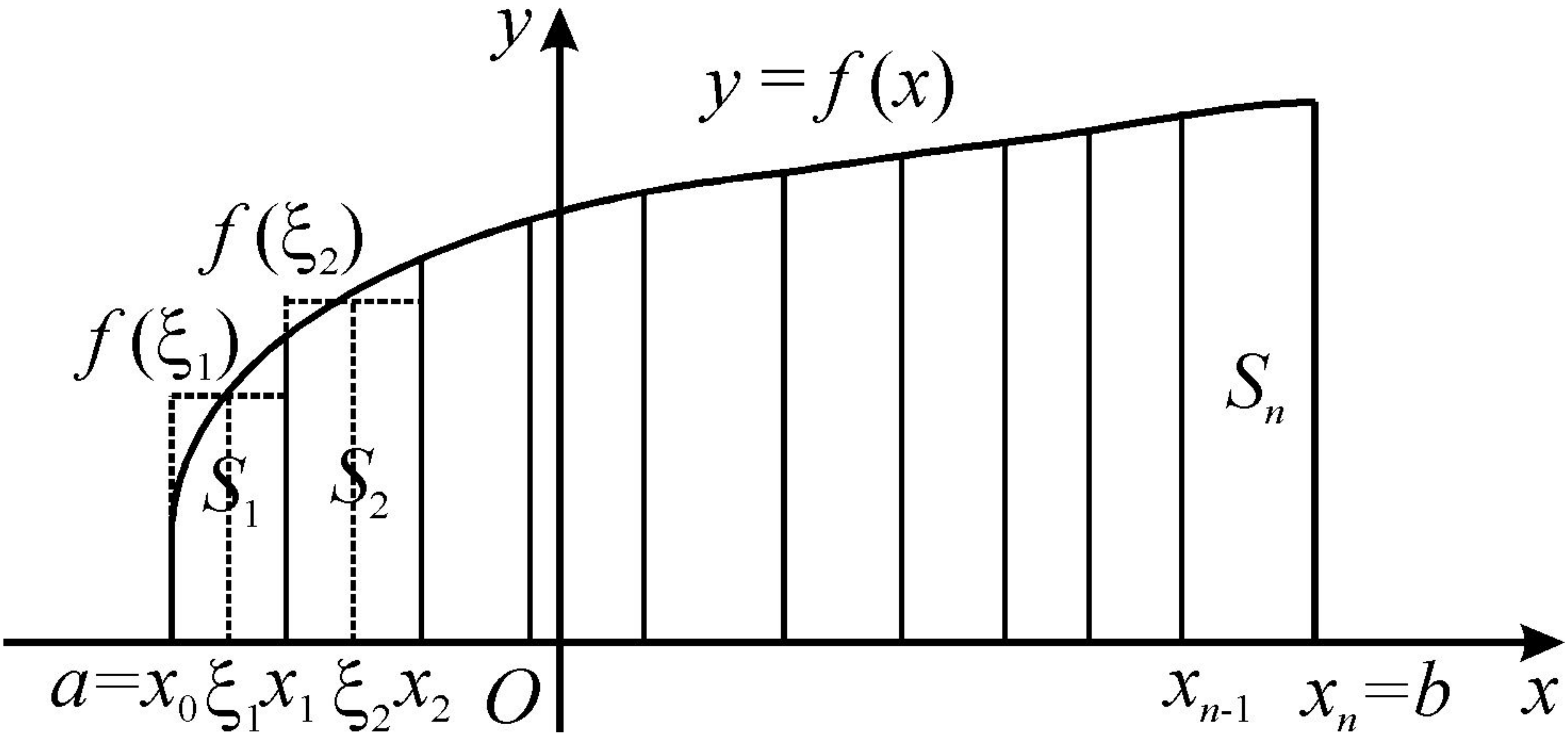
Введем по определению:

$$\lambda(T) = \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i$$

Назовем $\lambda(T)$ рангом разбиения T. Это наибольшая из длинн отрезков разбиения.

3. Выберем в каждом из отрезков разбиения произвольно по точке:

$$\xi_1 \in [x_0, x_1],\ \xi_2 \in [x_1, x_2],\ \ldots,\ \xi_n \in [x_{n-1}, x_n]$$



Вычисляем значения функции в этой точке:
$f(\xi_1), f(\xi_2),\ \ldots, f(\xi_n)$.

Строим интегральную сумму:

$$S(T) = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$S(T)$ называется интегральной суммой функции f по данному разбиению T.

Таким образом, геометрически $S(T)$ – площадь ступенчатой фигуры (сумма площадей прямоугольников).

$S(T)$ – это <u>число</u>.

Разбивая по другому отрезок $[a,b]$ на части и выбирая по другому точки ξ_i всякий раз будем получать новые интегральные суммы вида $S(T)$. Таким образом, можно говорить о переменной интегральной суммы на данном отрезке. Но эта переменная величина более сложной природы, нежели те, что были до сих пор. Введем понятие предела этой переменной величины.

Определение 2. Число I называется пределом переменной интегральной суммы $S(T)$ функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ при $\lambda(T) \to 0$ если:

$$\forall \varepsilon \in R_+ \ \exists \ \delta \in R_+ \ \forall \ T\,(\lambda(T) < \delta \Rightarrow |\ S(T) - I| < \varepsilon)$$

Обозначают: $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} S(T) = \lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

Этот предел не зависит от характера разбиения и выбора точек ξ_i.

<u>Конец схемы «Т»</u>

<u>Замечание 1.</u> Высказывание в определении 2 означает, что когда $\lambda(T) \to 0 \Rightarrow S(T) \to I$.

<u>Замечание 2.</u> Если $\lambda(T) \to 0$, то очевидно, что число отрезков разбиения n стремится к бесконечности.

<u>Определение 3.</u> Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a,b]$ и **P** – ее криволинейная трапеция. Если существует конечный предел

$$I = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

то он называется площадью криволинейной трапеции.

Замечание 3. Введенный нами предел переменной интегральной суммы обладает всеми обычными свойствами предела.

§ 2. Понятие определенного интеграла. Условие его существования.

Пусть $y = f(x)$ произвольная функция на отрезке $[a,b]$. Применим к этой функции схему «Т» (разбиение Т, $\lambda(T)$, ξ_i, $f(\xi_i)$, $S(T)$, $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} S(T)$).

Определение 4. Если существует конечный предел I переменной интегральной суммы, не зависящий от вида разбиения и выбора точек ξ_i, то этот предел называется определенным интегралом (или интегралом Римана) функции f на отрезке $[a,b]$.

Обозначается: $\int\limits_a^b f(x)dx.$

Таким образом: $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

где: $f(x)$ – подынтегральная функция,

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение,

a – нижний предел интегрирования,
b – верхний предел интегрирования,
$[a,b]$ – отрезок интегрирования.
Функция $f(x)$ называется интегрируемой по Риману на данном отрезке.

Геометрический смысл определенного интеграла.

Возвращаясь к задаче о площади криволинейной трапеции, можем утверждать, что для неотрицательной и непрерывной функции $y=f(x)$ на отрезке $[a,b]$, $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади соответствующей криволинейной трапеции

Замечание 4. В отличие от неопределенного интеграла, который представляет собой семейство функций, определенный интеграл

$\int_a^b f(x)dx$ представляет собой вещественное число.

Теорема 1. (Необходимое условие интегрируемости по Риману). Если функция $y = f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Без доказательства.