

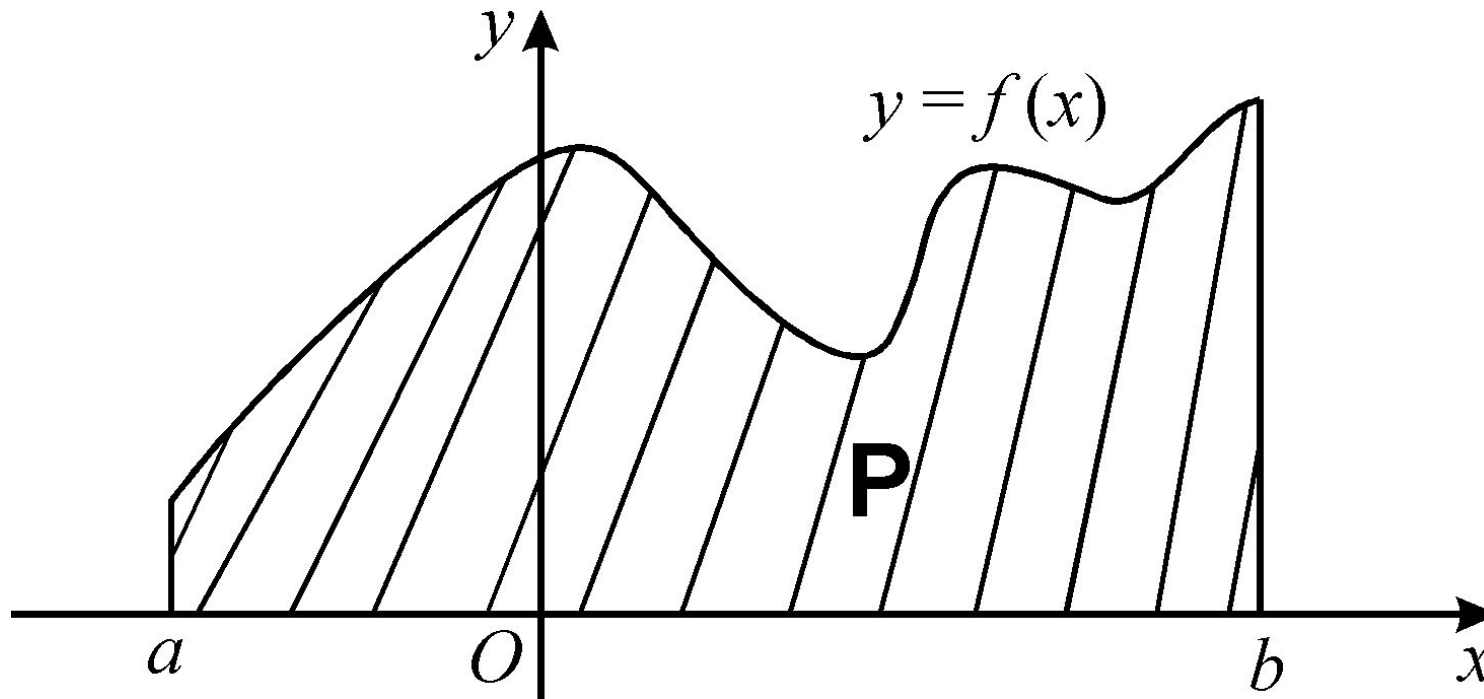
Глава 2. Определенный интеграл

§ 1. Площадь криволинейной трапеции.

Определение 1. Пусть функция $y = f(x)$

непрерывна и неотрицательна на $[a, b]$.

Криволинейной трапецией будем называть фигуру на плоскости, ограниченную прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и кривой $y = f(x)$.



Задача (о площади криволинейной трапеции).
Вычислить площадь криволинейной трапеции P .
Вопрос: что такое площадь криволинейной трапеции? Что такое площадь многоугольника мы знаем.

Схема «Т»

1. Разобьём $[a, b]$ точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

на конечное число частей. Точки берем произвольно. Таким образом, получаем разбиение

$$T = \{[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]\}$$

отрезка $[a, b]$ на более мелкие отрезки.

Точки x_0, x_1, \dots, x_n называются точками разбиения, а полученные отрезки – отрезками разбиения.

2. Обозначим через

$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \dots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$,
где Δx_i – длина i -того отрезка ($i = 1, 2, \dots, n$).

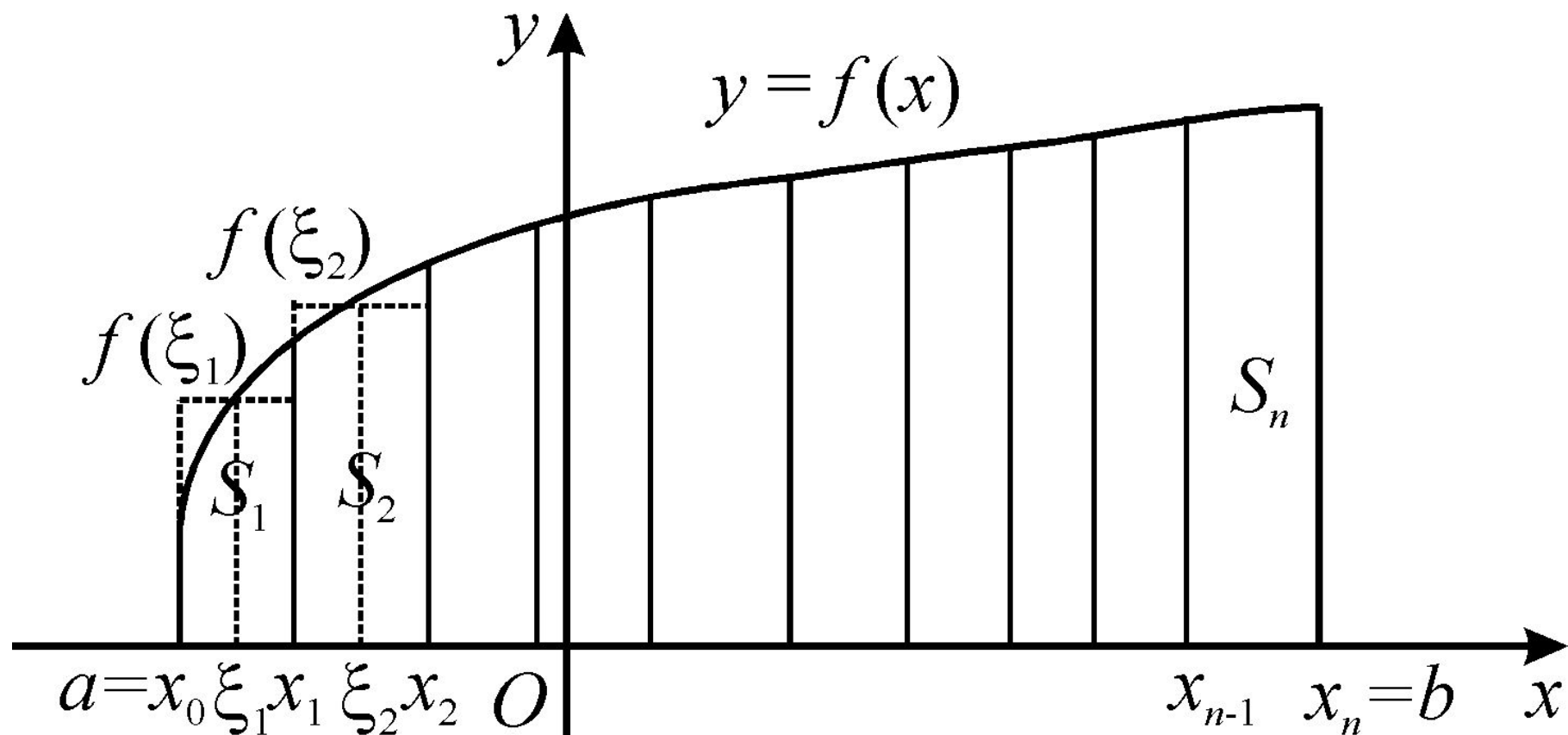
Введем по определению:

$$\lambda(T) = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$$

Назовем $\lambda(T)$ рангом разбиения T . Это наибольшая из длин отрезков разбиения.

3. Выберем в каждом из отрезков разбиения произвольно по точке:

$$\xi_1 \in [x_0, x_1], \xi_2 \in [x_1, x_2], \dots, \xi_n \in [x_{n-1}, x_n]$$



Вычисляем значения функции в этой точке:

$$f(\xi_1), f(\xi_2), \dots, f(\xi_n).$$

Строим интегральную сумму:

$$\begin{aligned} S(T) &= f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \\ &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \end{aligned}$$

$S(T)$ называется интегральной суммой функции f по данному разбиению T .

Таким образом, геометрически $S(T)$ – площадь ступенчатой фигуры (сумма площадей прямоугольников).

$S(T)$ – это число.

Разбивая по другому отрезок $[a, b]$ на части и выбирая по другому точки ξ_i всякий раз будем

получать новые интегральные суммы вида $S(T)$. Таким образом, можно говорить о переменной интегральной суммы на данном отрезке. Но эта переменная величина более сложной природы, нежели те, что были до сих пор. Введем понятие предела этой переменной величины.

Определение 2. Число I называется пределом переменной интегральной суммы $S(T)$ функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ при $\lambda(T) \rightarrow 0$ если:

$$\forall \varepsilon \in R_+ \exists \delta \in R_+ \forall T (\lambda(T) < \delta \Rightarrow |S(T) - I| < \varepsilon)$$

Обозначают: $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S(T) = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$

Этот предел не зависит от характера разбиения и выбора точек ξ_i .

Конец схемы «Т»

Замечание 1. Высказывание в определении 2 означает, что когда $\lambda(T) \rightarrow 0 \Rightarrow S(T) \rightarrow I$.

Замечание 2. Если $\lambda(T) \rightarrow 0$, то очевидно, что число отрезков разбиения n стремится к бесконечности.

Определение 3. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a, b]$ и P – ее криволинейная трапеция. Если существует конечный предел

$$I = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

то он называется площадью криволинейной трапеции.

Замечание 3. Введенный нами предел переменной интегральной суммы обладает всеми обычными свойствами предела.

§ 2. Понятие определенного интеграла.

Условие его существования.

Пусть $y = f(x)$ произвольная функция на отрезке $[a, b]$. Применим к этой функции схему «Т» (разбиение T , $\lambda(T)$, ξ_i , $f(\xi_i)$, $S(T)$, $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S(T)$).

Определение 4. Если существует конечный предел I переменной интегральной суммы, не зависящий от вида разбиения и выбора точек ξ_i , то этот предел называется определенным интегралом (или интегралом Римана) функции f на отрезке $[a, b]$.

Обозначается: $\int_a^b f(x)dx$.

Таким образом: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$

где: $f(x)$ – подынтегральная функция,
 $f(x)dx$ – подынтегральное выражение,

a – нижний предел интегрирования,
 b – верхний предел интегрирования,
 $[a, b]$ – отрезок интегрирования.

Функция $f(x)$ называется интегрируемой по Риману на данном отрезке.

Геометрический смысл определенного интеграла.

Возвращаясь к задаче о площади криволинейной трапеции, можем утверждать, что для неотрицательной и непрерывной функции

$y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$, $\int_a^b f(x) dx$ численно равен

площади соответствующей криволинейной трапеции

Замечание 4. В отличие от неопределенного интеграла, который представляет собой семейство функций, определенный интеграл

$\int_a^b f(x)dx$ представляет собой вещественное

число.

Теорема 1. (Необходимое условие интегрируемости по Риману). Если функция $y = f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Без доказательства.