



# Определитель

Линейная алгебра

- Каждой квадратной матрице  $A$  можно поставить в соответствие число, называемое **определителем** (**детерминантом**) этой матрицы

$$\det A \quad |A|$$

- Каждой квадратной матрице  $A$  можно поставить в соответствие число, называемое **определителем** (**детерминантом**) этой матрицы

$$\det A \quad |A| \quad \Delta$$

# Вычисление определителей

1.  $n = 1$

$$|a_{11}| = a_{11} \quad |5| = 5$$

2.  $n = 2$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = 4 - 6 = -2$$

# Вычисление определителей

3.  $n = 3$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

# Правило треугольников



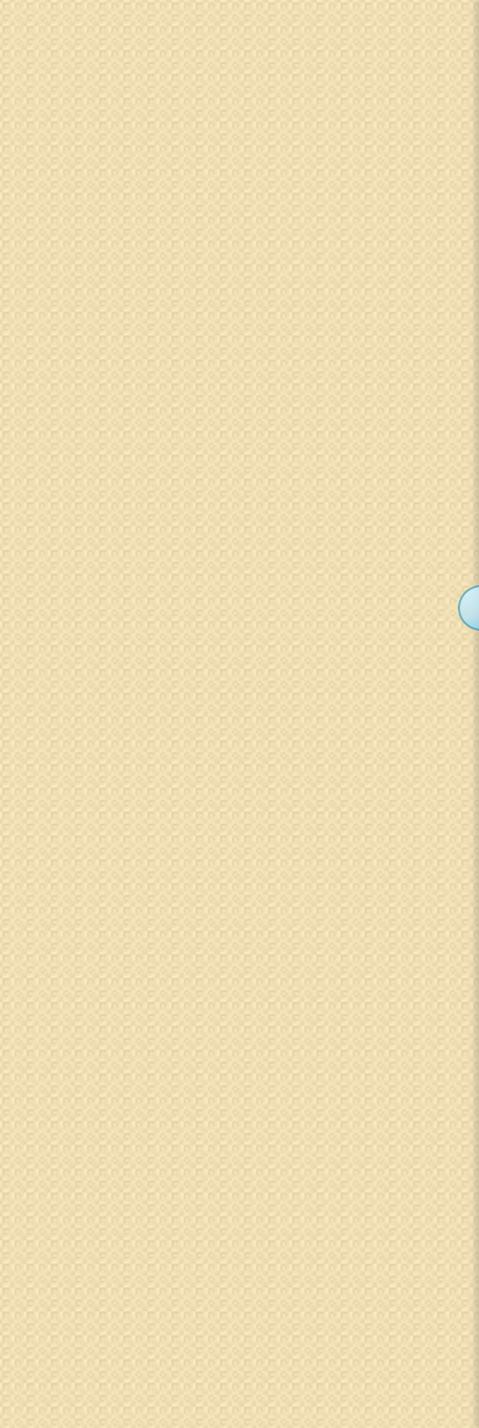
# Пример

$$\begin{vmatrix} -3 & 7 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -6 \end{vmatrix} = -3 \times 0 \times (-6) + 2 \times 4 \times (-1) + \\ + 7 \times 2 \times 1 - 1 \times 0 \times 1 - \\ - 2 \times 7 \times (-6) - 4 \times 2 \times (-3) = \\ = 0 - 8 + 14 - 0 + 84 + 24 = 114$$

# Задания

- Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0$$



**СВОЙСТВА  
ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ**

# I. Равноправность строк и столбцов

- Определитель матрицы не изменится при её транспонировании

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

## 2. При перестановке двух строк или столбцов определитель меняет знак

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{12} \times a_{21} - a_{11} \times a_{22} =$$

$$= -(a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21}) = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

**3. Определитель, имеющий два одинаковых столбца (две одинаковых строки), равен нулю**

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 1 \times 0 \times (-6) + 2 \times 4 \times (-6) + \\ + 4 \times 2 \times 1 - (-6) \times 0 \times 1 - \\ - 2 \times 4 \times (-6) - 4 \times 2 \times 1 = 0$$

**4. Общий множитель  
элементов строки (столбца)  
можно вынести за знак  
определителя**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \times (3 \cdot 3) - 2 \times (3 \cdot 1) =$$

$$= 3 \cdot (1 \times 3 - 2 \times 1) = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

**5. Если элементы строки (столбца) представляют собой суммы двух слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму двух определителей**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + b \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b \\ a_{21} & a_{22} & c \\ a_{31} & a_{32} & d \end{vmatrix}.$$

**6. Определитель не изменится, если к элементам строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на любое число**

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + k \cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + k \cdot a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + k \cdot a_{32} \end{vmatrix}$$

# Определения

- **Минором** некоторого элемента  $a_{ij}$   $n$ -го порядка называется определитель порядка  $n-1$ , полученный из исходного вычёркиванием строки  $i$  и столбца  $j$ .

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$m_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad m_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

# Определения

- **Алгебраическим дополнением** некоторого элемента  $a_{ij}$  называется его минор, взятый со знаком «+», если сумма  $i+j$  – чётное число, и со знаком «минус» в противном случае.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$$

## 7. Разложение определителя по строке или столбцу

- Определитель равен сумме произведений элементов некоторой строки (столбца) на соответствующие им алгебраические дополнения

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}.$$

# Пример

- Найти определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

# Пример

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+ 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 122.$$

**8. Сумма произведений элементов некоторой строки (столбца) на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю**

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0.$$