

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Лекция 2. **ОПРЕДЕЛИТЕЛИ.** ВЫЧИСЛЕНИЕ
ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ.
СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ.
АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДОПОЛНЕНИЯ И
МИНОРЫ.

§ 1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

- Понятие определителя вводится только для квадратных матриц.
- Пусть дана квадратная матрица A порядка n . Сопоставим ей число, которое называется определителем (детерминантом) матрицы A , обозначается $\det A$, Δ или $|A|$ и вычисляется по определенному правилу. Число n определяет порядок определителя.
- В частных случаях это правило имеет вид:

$$1. \quad n = 1, A = \|a_1\|, \det A = a_1.$$

$$2. \quad n = 2, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Пример 1. Найти определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение.

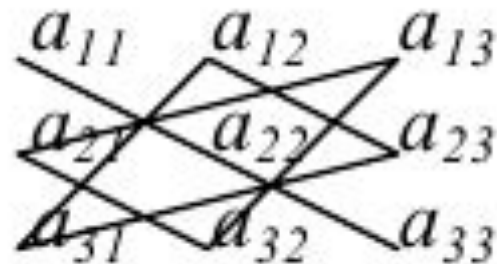
$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) = 4 - (-6) = 10.$$

$$3. \quad n = 3, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Определители третьего порядка обычно вычисляются с помощью правила Саррюса, которое символически можно определить так.

Произведение элементов матрицы, которые берутся со **знаком плюс** –



Решение.

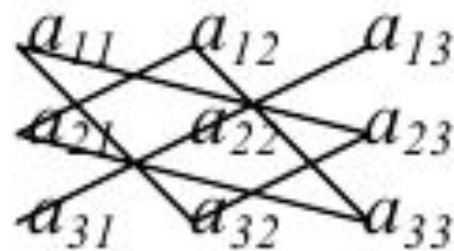
$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) = 4 - (-6) = 10.$$

$$3. \quad n = 3, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{21} a_{32} a_{13} - a_{31} a_{22} a_{13} - a_{21} a_{12} a_{33} - a_{32} a_{23} a_{11}.$$

Определители третьего порядка обычно вычисляются с помощью правила Саррюса, которое символически можно определить так.

Произведение элементов матрицы, которые берутся со **знаком минус** –



- Пример 2. Вычислить определитель:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

- Решение.

$$\begin{aligned} \det A &= 3 \cdot 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-4) \cdot 2 + 2 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot (-4) \cdot (0) - 1 \cdot (-2) \cdot (-2) = \\ &= -6 + 16 - 4 - 4 = 16 - 14 = 2. \end{aligned}$$

Рассмотрим квадратную матрицу порядка n

$m=n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

- Дадим определение определителя n -го порядка матрицы A

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

- В дальнейшем, под элементами, строками и столбцами определителя матрицы будем подразумевать элементы, строки и столбцы этой матрицы.
- Определителем n -го порядка квадратной матрицы называется число, равное алгебраической сумме $n!$ слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение n элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца определителя. Произведения отличаются одно от другого набором элементов.

- Перед каждым произведением ставится знак "+" или "-".
- Определим знак перед произведением. Поскольку в каждом произведении присутствует один элемент из 1-й строки, один элемент из 2-ой и т.д., то произведение можно записать так:
 - $a_{1i} \cdot a_{2j} \cdot a_{3k} \cdot \dots \cdot a_{ns}$.
 - Здесь i, j, k, \dots, s – номера столбцов, в которых стоят элементы, выбранные из 1-й, 2-й, 3-й, ... n -й строк, соответственно. Из сказанного выше ясно, что каждое из различных чисел i, j, k, \dots, s равно какому-либо из чисел $1, 2, \dots, n$.
 - Расположенные в данном порядке номера столбцов i, j, k, \dots, s , образуют *перестановку* из чисел $1, 2, \dots, n$. Всего существует $n!$ различных перестановок из n натуральных чисел.

- *Инверсией* называется взаимное расположение двух чисел в перестановке, когда большее предшествует меньшему. Например, в перестановке 4,1,3,6,5 три инверсии, а в перестановке 3,7,4,2,5,6 – шесть инверсий.
- Перестановка называется *четной*, если в ней четное число инверсий и *нечетной*, если число инверсий нечетное.
- Тогда произведение $a_{1i} \cdot a_{2j} \cdot a_{3k} \cdot \dots \cdot a_{ns}$ берется со знаком "+", если индексы столбцов образуют четную перестановку, и со знаком "-", если - нечетную.

§2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

- Рассмотрим некоторые наиболее важные свойства определителей.
- **Свойство 1.** При перестановке местами двух параллельных строк или столбцов определителя его знак меняется на обратный.
- **Свойство 2.** Определитель, содержащий две одинаковые строки или столбца, равен нулю.
- **Свойство 3.** Если одну из строк определителя умножить на какое-либо число, то получится определитель, равный исходному определителю, умноженному на это число.
- **Свойство 4.** При транспонировании матрицы её определитель не меняет своего значения.

- **Свойство 5.** Если в определителе вместо любой строки записать сумму этой строки и любой другой строки, умноженной на некоторое число, то полученный новый определитель будет равен исходному.
- **Свойство 6.** Если каждый элемент какой-либо строки или столбца определителя представим в виде суммы двух слагаемых, то этот определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей.
- **Свойство 7.** Общий множитель элементов какой-либо строки или столбца определителя можно выносить за знак определителя.
- **Свойство 8.** Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов.
- Введем основные понятия, используемые при вычислении определителей различных порядков.

- **Минором** любого элемента a_{ij} квадратной матрицы A порядка n называется определитель матрицы порядка $n-1$, которая получается из матрицы A вычеркиванием i -й строки и j -го столбца. Обозначение - M_{ij} .
- **Алгебраическим дополнением** любого элемента a_{ij} квадратной матрицы A порядка n называется его минор, взятый со знаком «плюс», если сумма $i + j$ - четное число, и со знаком «минус», если эта сумма нечетная. Обозначается
- $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \text{ то } M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- **Свойство 9.** Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов некоторой строки или столбца на их алгебраические дополнения.
- Докажем данное свойство на примере определителя 3-го порядка.
- Имеем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31}$$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot \left(- \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \right) + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) - a_{12} (a_{21} a_{33} - a_{23} a_{31}) + a_{13} (a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31}) =$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} = \Delta.$$

Пример 3. Вычислить определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для вычисления определителя выберем первый столбец, поскольку в нём есть нулевые элементы.

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -4 & -2 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \\ -1 & -4 & -2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-18 + 5 - 16 + 3 - 8 + 60) - 2(0 + 0 + 6 - 0 - 0 + 10) = -26 - 32 = -58.$$

Свойство 10. Сумма произведений элементов какой-либо строки или столбца определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки или столбца равна нулю.

Свойство 11. Определитель произведения $C = A \cdot B$ двух квадратных матриц A и B порядка n равен произведению их определителей, т.е. $|C| = |A| \cdot |B|$.