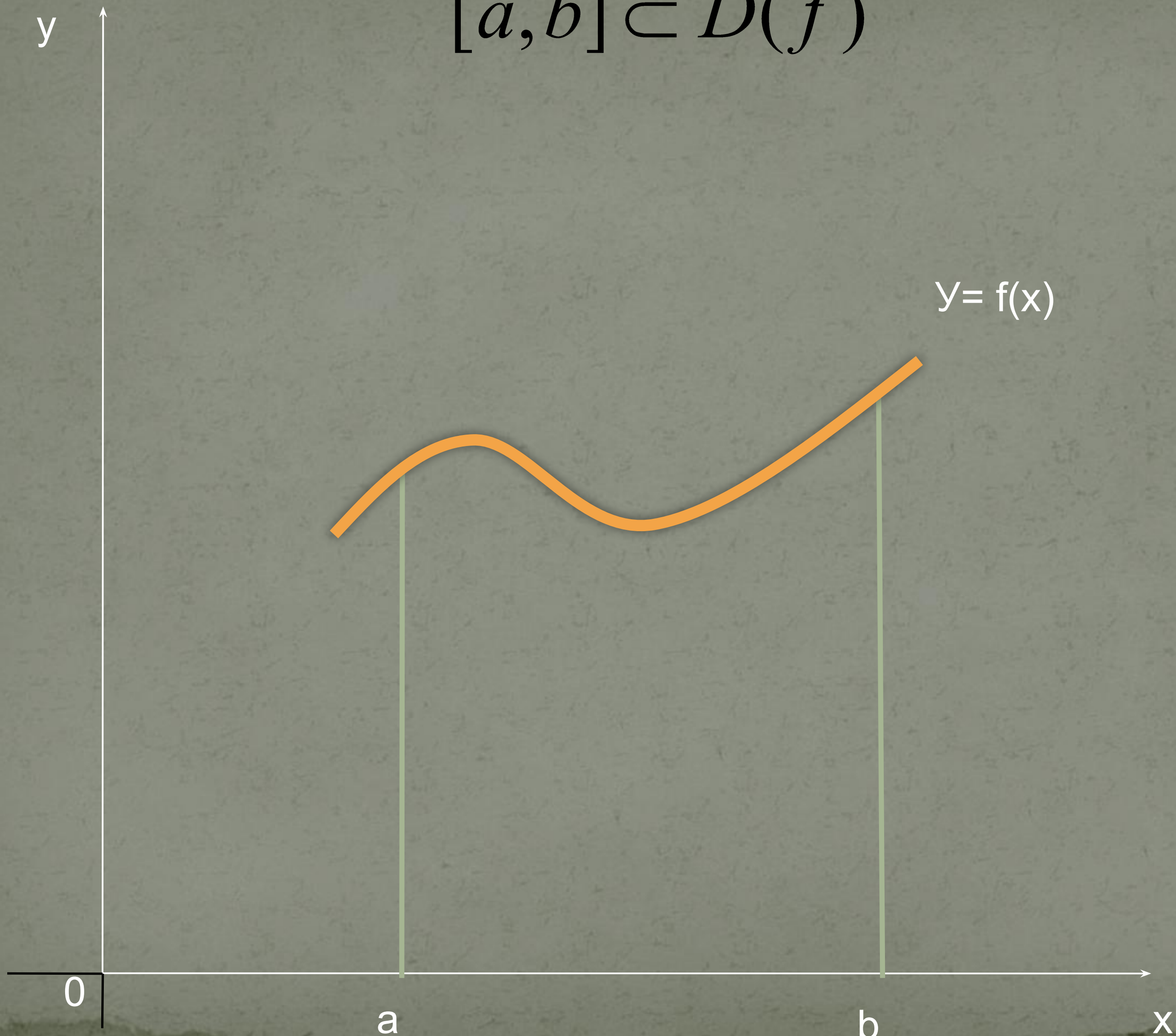
Определённый интеграл. Введение и некоторые его приложения.

Введение определённого интеграла

Пусть графически задана функция f(x), непрерывная на своей области определения D(f)

Будем рассматривать её на отрезке

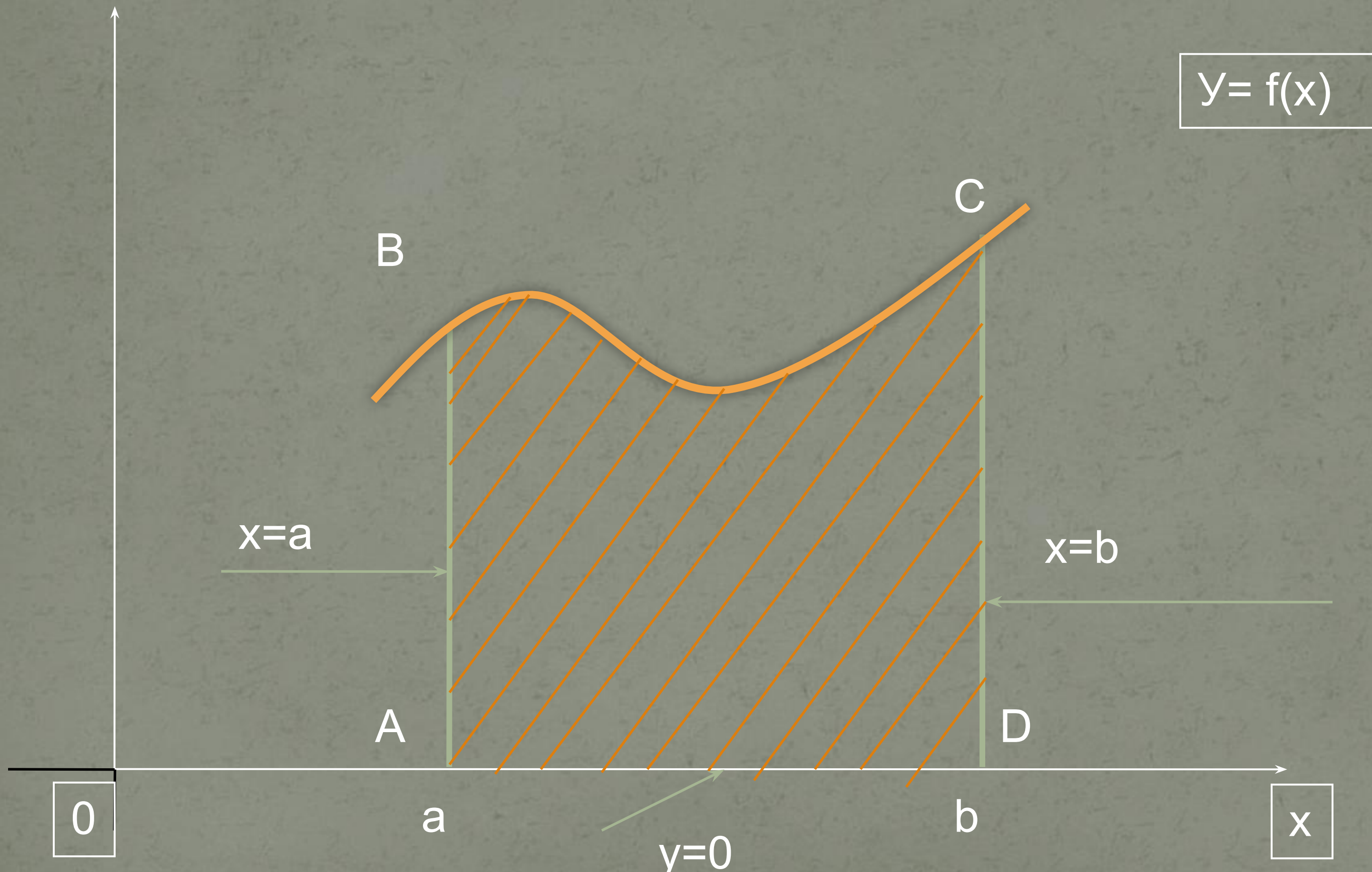
$$[a,b] \subset D(f)$$



Построим фигуру, ограниченную графиком функции у = f(x),

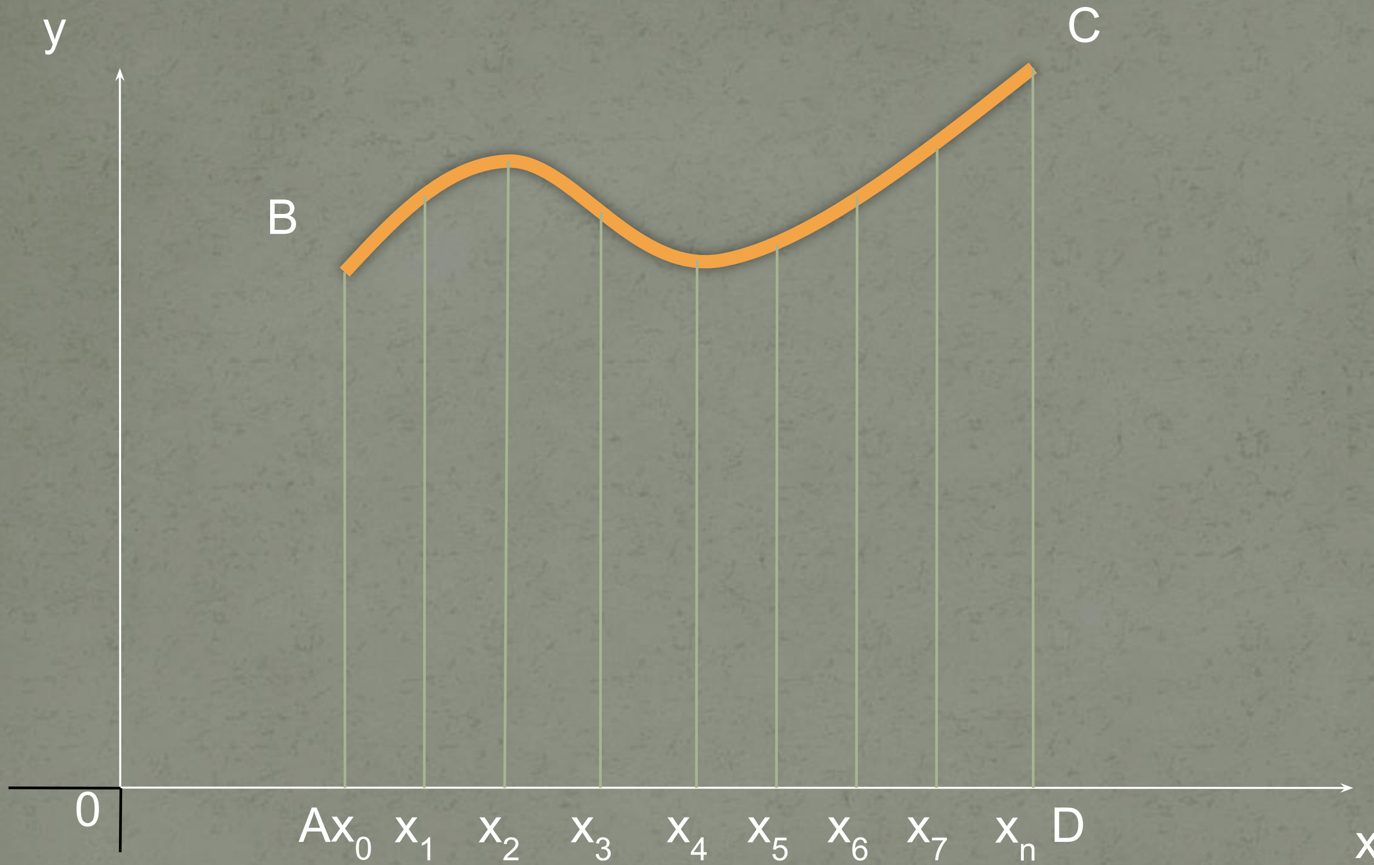
прямыми x = a, x = в и у = 0. Назовём её криволинейной

трапецией ABCD



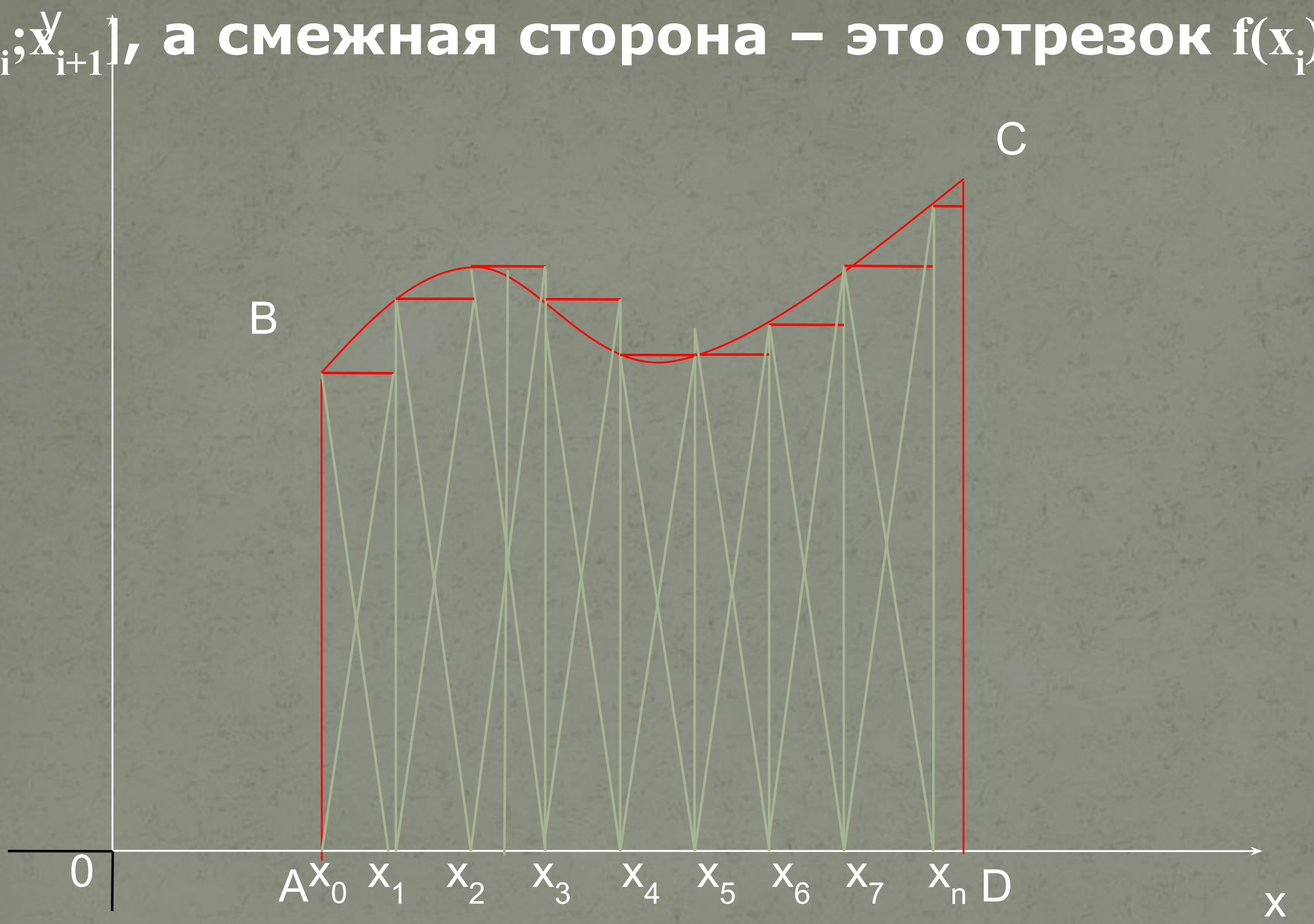
Поставим задачу нахождения её площади S

Разделим основание [AD] трапеции ABCD точками $x_0=a; x_1; x_2; \ldots; x_n = b$ ($x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < x_n = b$) произвольным образом

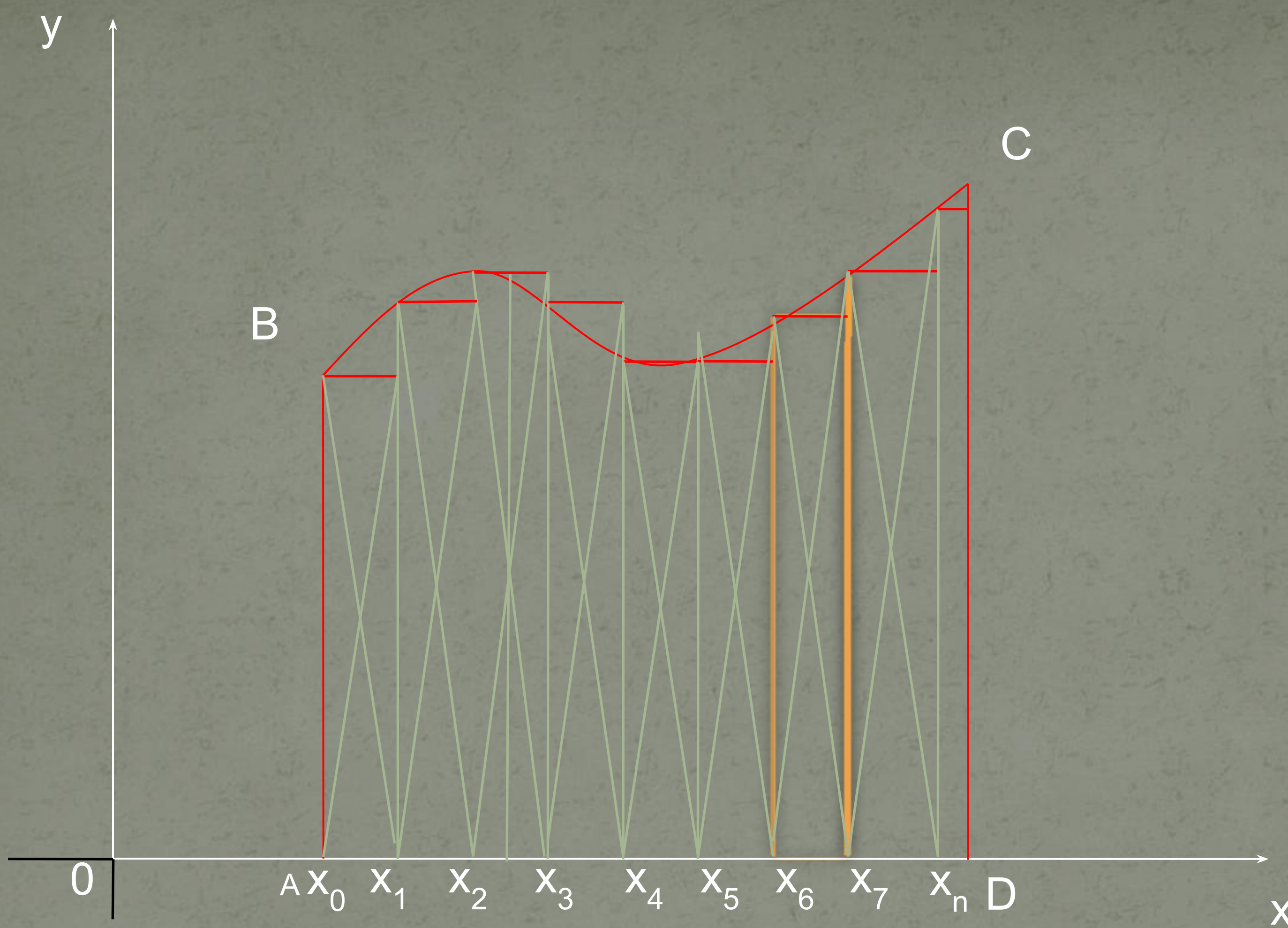


Через точки деления проведём прямые $y = a$, $y=x_1$, $y = x_2$, … $y = x_i$, $y= x_{i+1}$,…, $y= b$. Этими прямыми трапеция ABCD разбивается на полосы.

Каждой полосе поставим в соответствие прямоугольник, одна сторона которого есть отрезок $[x_i;x_{i+1}]$, а смежная сторона – это отрезок $f(x_i)$ $(i=0…n-1)$



Криволинейная трапеция заменится некоторой ступенчатой фигурой, составленной из отдельных прямоугольников



Основание i-го прямоугольника равно разности **$x_{i+1}-x_i$, которую мы будем обозначать через** $\triangle x_i$ Высота i-го прямоугольника равна $f(x_i)$

Площадь i-го прямоугольника равна:

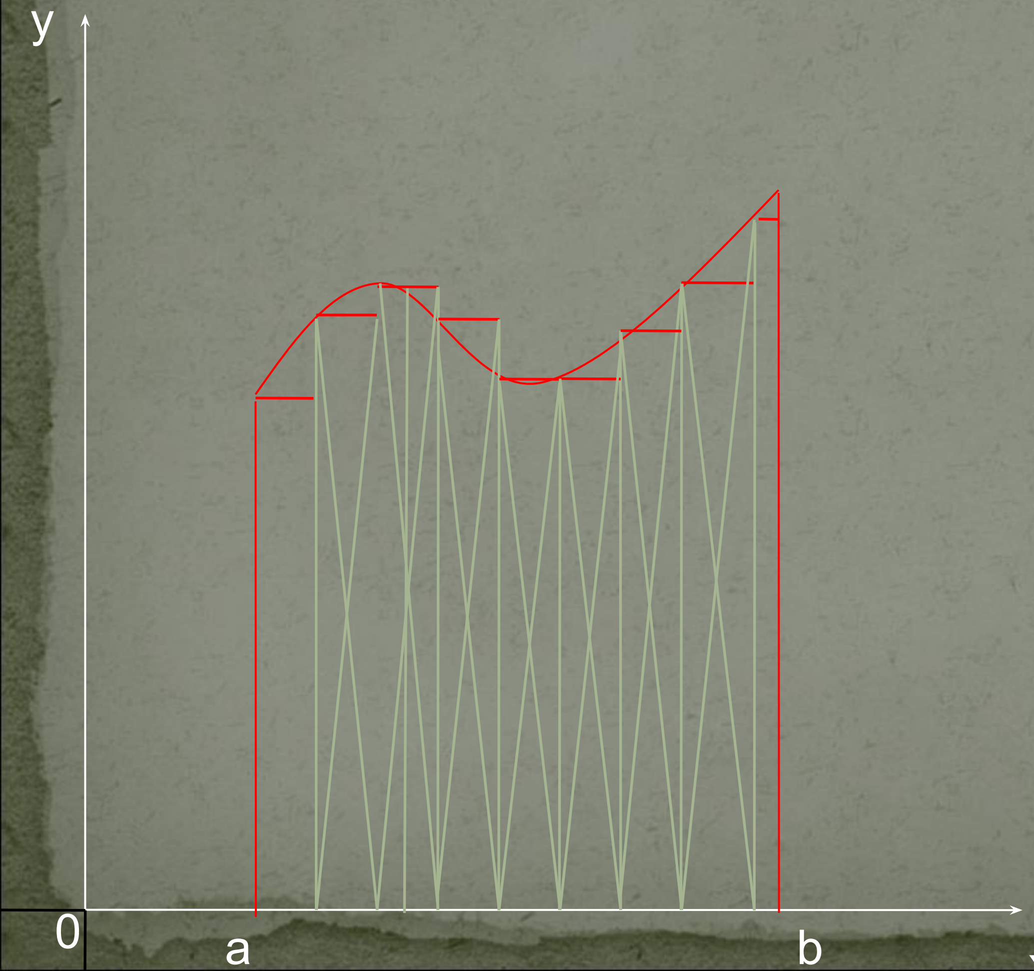
$$S_i = f(x_i)x_i$$

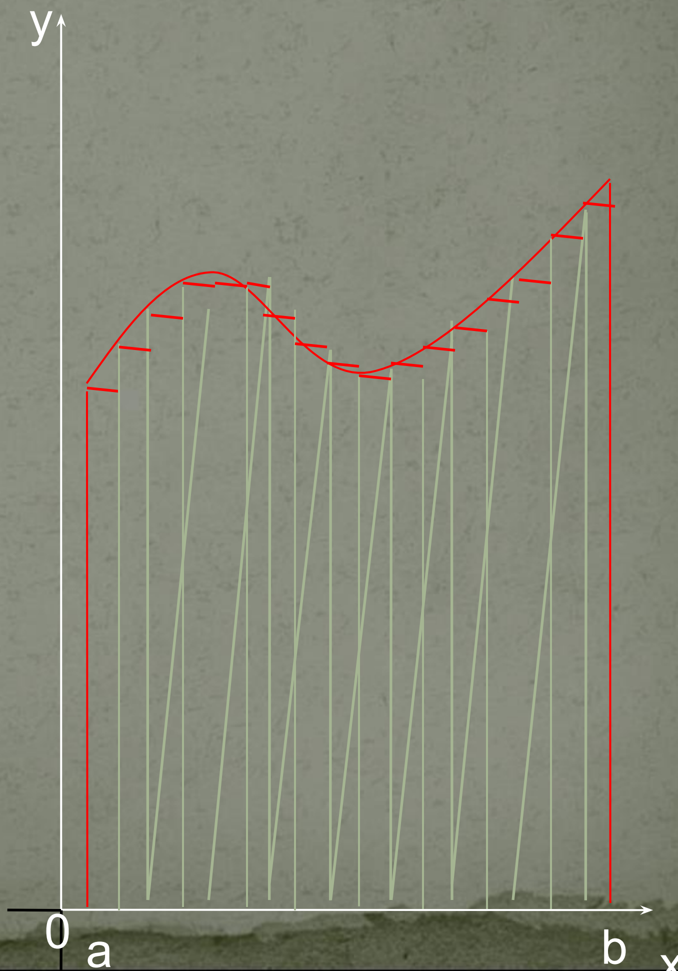
Сложив площади всех прямоугольников, получаем приближенное значение площади S криволинейной трапеции:

$$S \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)x_i$$

При $\triangle x_i \to 0$ $\qquad \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\triangle x_i \xrightarrow[\triangle x_i \to 0]{} S$

т.к площадь ступенчатой фигуры почти совпадает с площадью криволинейной трапеции:





Точное значение площади S получается как предел суммы площадей всех прямоугольников

$$S = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

Для обозначения предельных сумм вида

f(xi) xi немецкий учёный В.Лейбниц ввёл символ $\int_a^b f(x)dx$ - интеграл функции f(x) от a до b

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

Если предел функции f(x) существует, то f(x) называется интегрируемой на отрезке [a,b]. Числа a и b называются нижним и верхним пределом интегрирования. При постоянных пределах интегрирования определённый интеграл
представляет собой определённое число.

Некоторые приложения определённого интеграла

1) Площадь плоской фигуры

Задача

Вычислить площадь фигуры F, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$ и $y = x^2 - 2x$

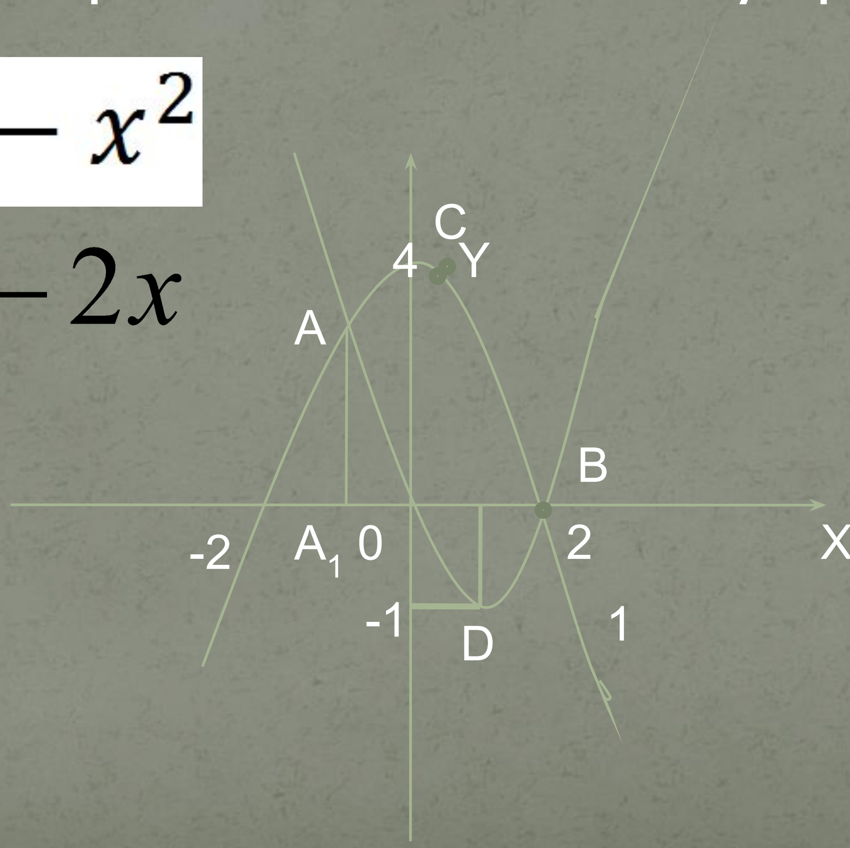
$$F: \begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{cases}$$

Решим задачу по следующему алгоритму:

1) Построим фигуру F. Для этого построим линии, ограничивающие эту фигуру

$$y = 4 - x^2$$

$$y = x^2 - 2x$$



Найдем точки пересечения этих парабол

A(-1;3); B(2;0)

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = 4 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$S_f = S_{A_1ACB} + S_{OBD} - S_{A_1AO}$$

Искомую площадь S_f можно найти как алгебраическую сумму площадей криволинейных трапеций

$$S_{A_1ACB}=\int_{-1}^{2}(4-x^2)dx=\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2}=8-\frac{8}{3}+4-\frac{1}{3}=9$$

$$S_{OBD}=\int_{2}^{0}(x^2-2x)dx=\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Bigg|_{2}^{0}=-\frac{8}{3}+4=\frac{4}{3}$$

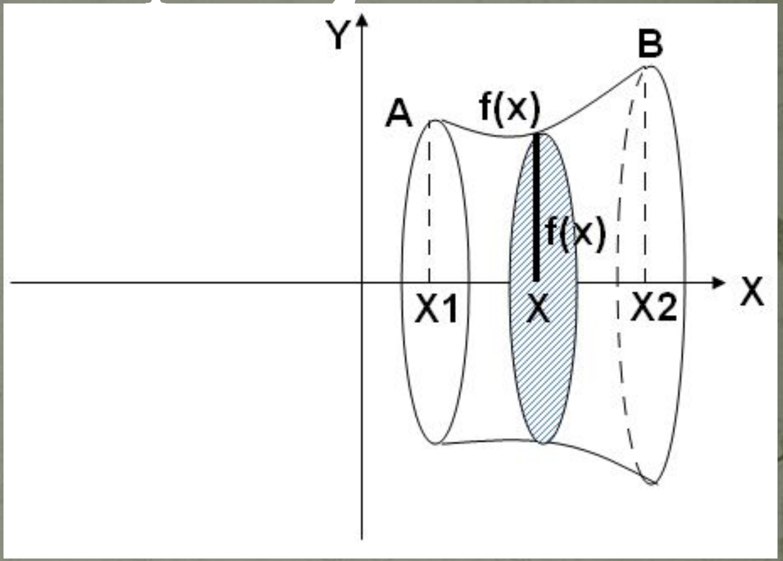
$$S_{A_1AO}=\int_{-1}^{0}(x^2-2x)dx=\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Bigg|_{-1}^{0}=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$$

$$S_f=9+\frac{4}{3}-\frac{4}{3}=9(кв.ед.)$$

$$Ответ: S_f=9 кв.ед.$$

2) Объем тела вращения

Пусть тело образуется при вращении вокруг оси ОХ криволинейной трапеции x_1ABx_2



Любое сечение этого тела плоскостью, перпендикулярной к оси Ох будет круг, радиус которого равен соответствующей ординате точки кривой Y=f(x)

Площадь сечения S(x) равна π y^2, т.е.

$S(x)=\pi f^2(x)$

Объем тела вращения может быть вычислен по формуле

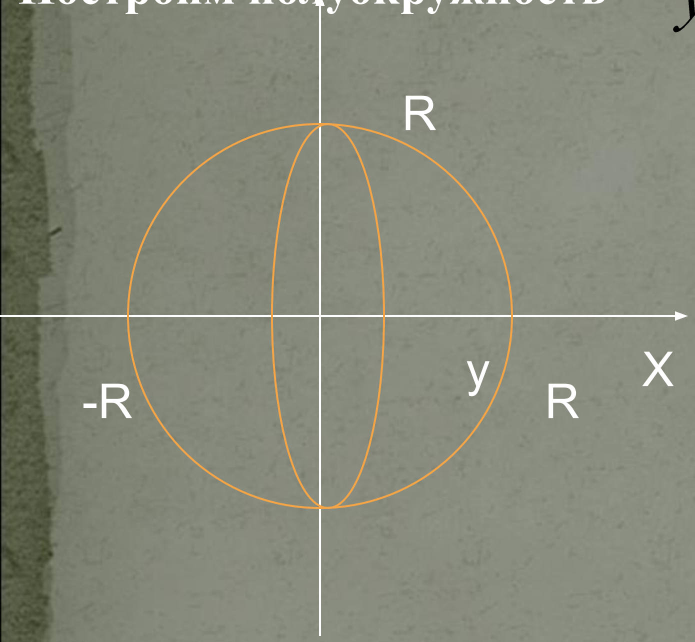
$$V=\int_{x_1}^{x_2}\pi f^2(x)dx \qquad при \qquad x_1<x_2$$

ЗАДАЧА

Вычислить объем шара, получаемого вращением полуокружности $y=\sqrt{R^2-x^2}$

вокруг оси ОХ

Построим полуокружность $y=\sqrt{R^2-x^2}$



При вращении этой полуокружности вокруг ОХ получается сфера, ограничивающая шар.

Объем шара найдем по формуле

$$V=\int_{-R}^{R}\Pi f^2(x)\ dx=\Pi\int_{-R}^{R}(\sqrt{R^2-x^2})^2dx=$$

$$=\Pi\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)dx=\Pi(R^2x-\frac{x^3}{3})\Big|_{-R}^{R}=$$

$$=\Pi(R^3-\frac{R^3}{3}+R^3-\frac{R^3}{3})=\frac{4}{3}\Pi R^3$$

Ответ: Объем шара $V=\frac{4}{3}\Pi R^3$ (куб.ед.)

Прикладная математика