



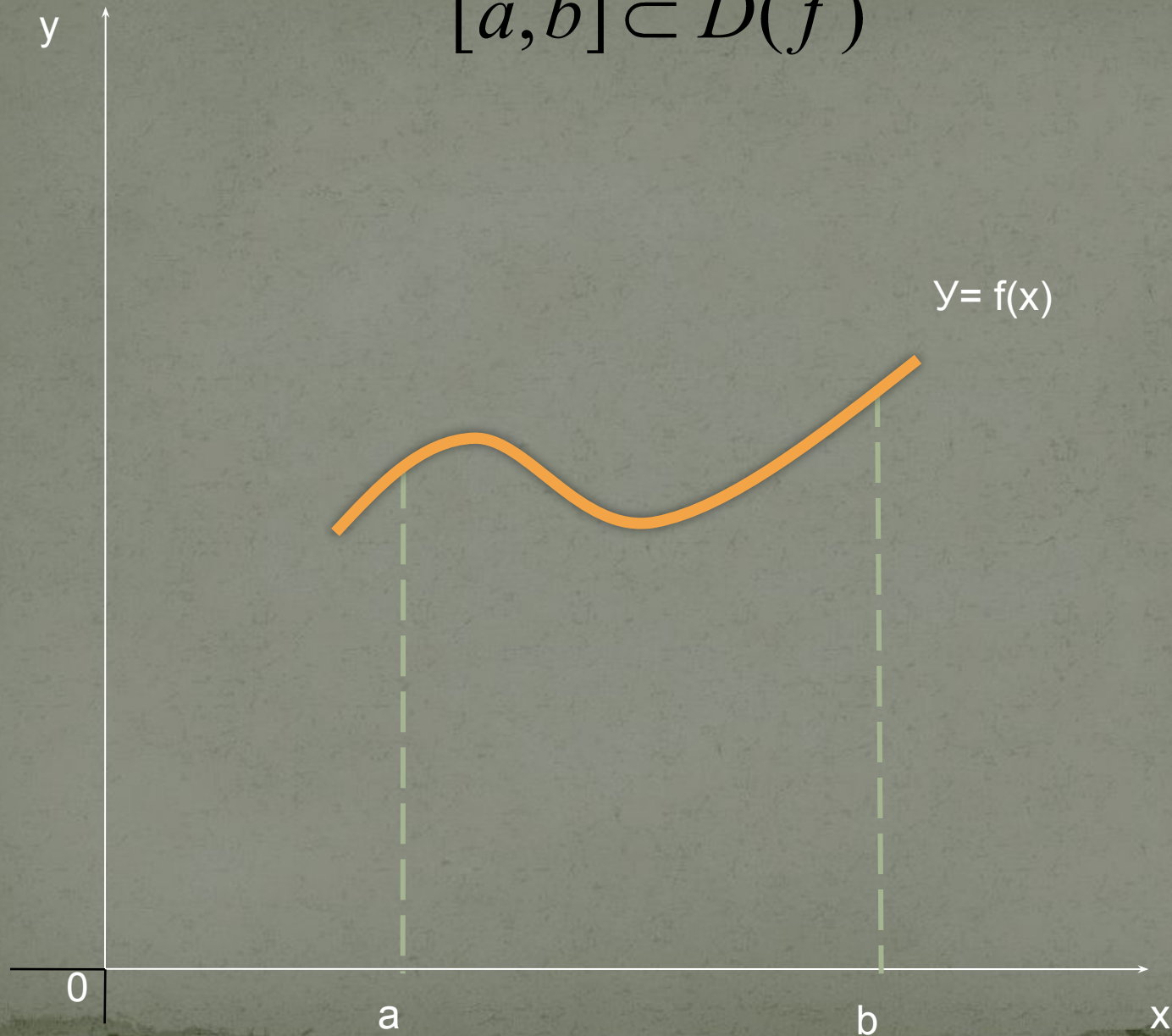


Пусть графически задана функция $f(x)$, непрерывная на своей области определения $D(f)$



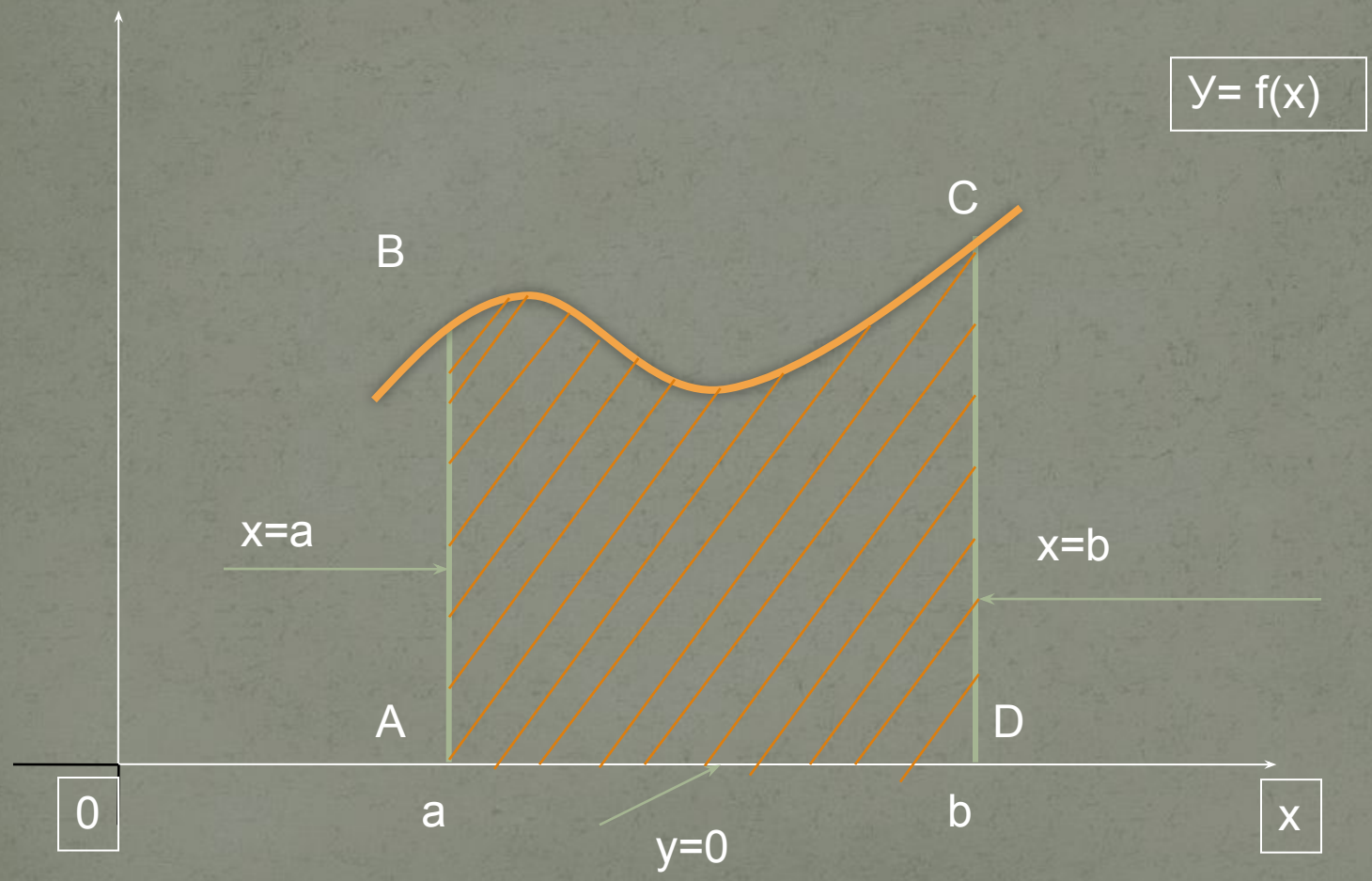
Будем рассматривать её на отрезке

$$[a, b] \subset D(f)$$



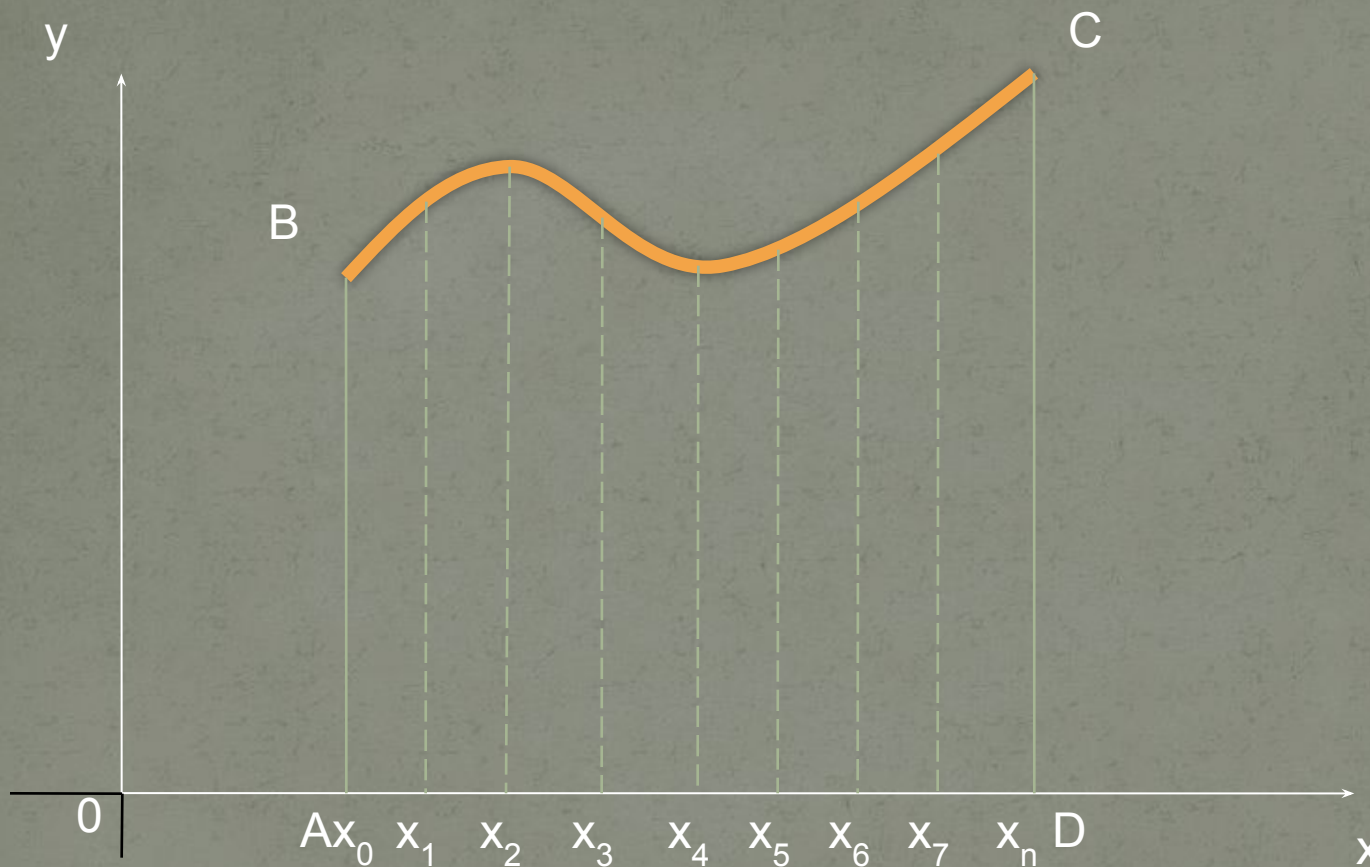
Построим фигуру, ограниченную графиком функции $y = f(x)$,

прямыми $x = a$, $x = b$ и $y = 0$. Назовём её криволинейной трапецией ABCD



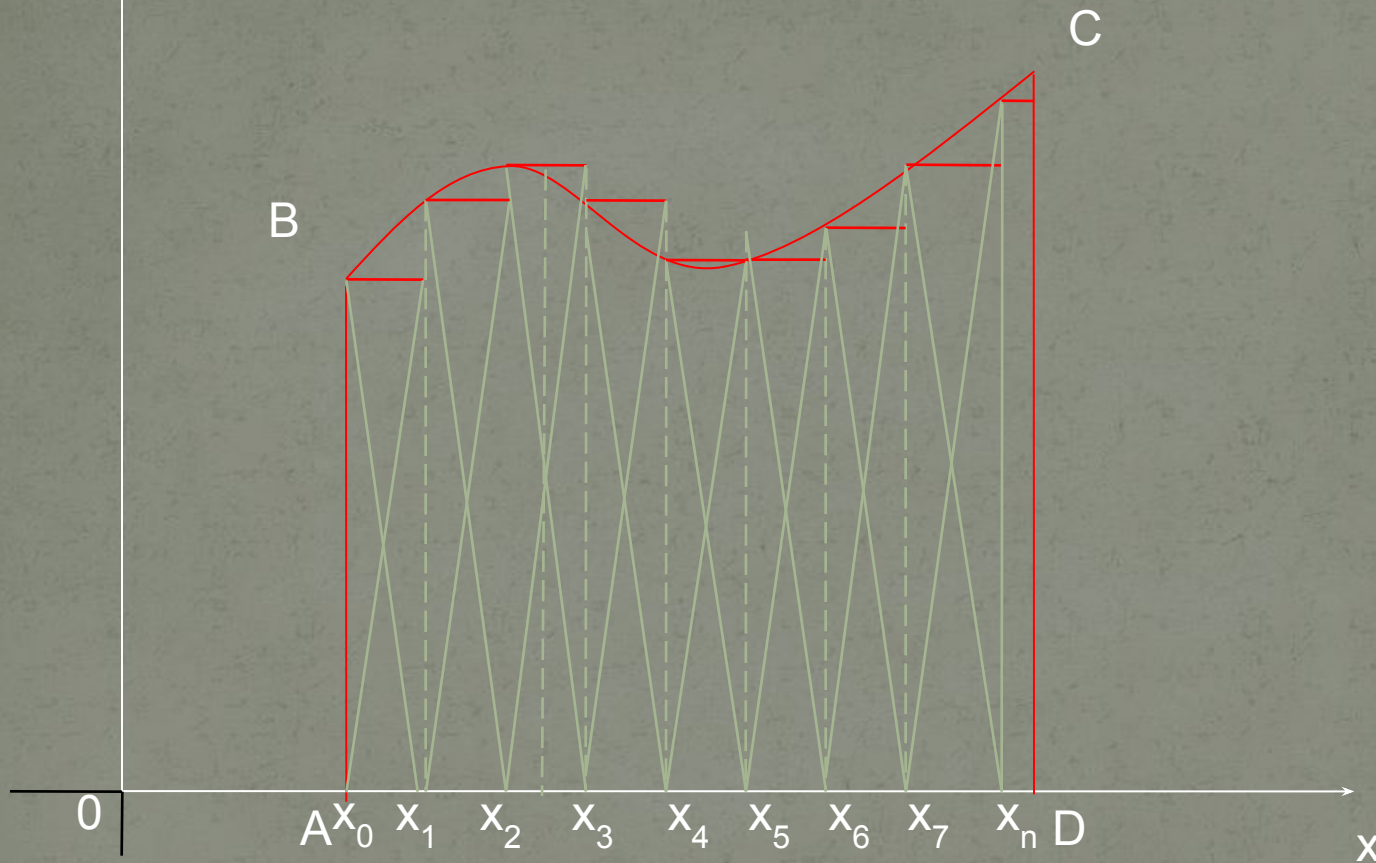
Поставим задачу нахождения её площади S

**Разделим основание [AD] трапеции ABCD
точками $x_0 = a; x_1; x_2; \dots; x_n = b$ ($x_0 =$
 $a < x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < x_n = b$) произвольным образом**

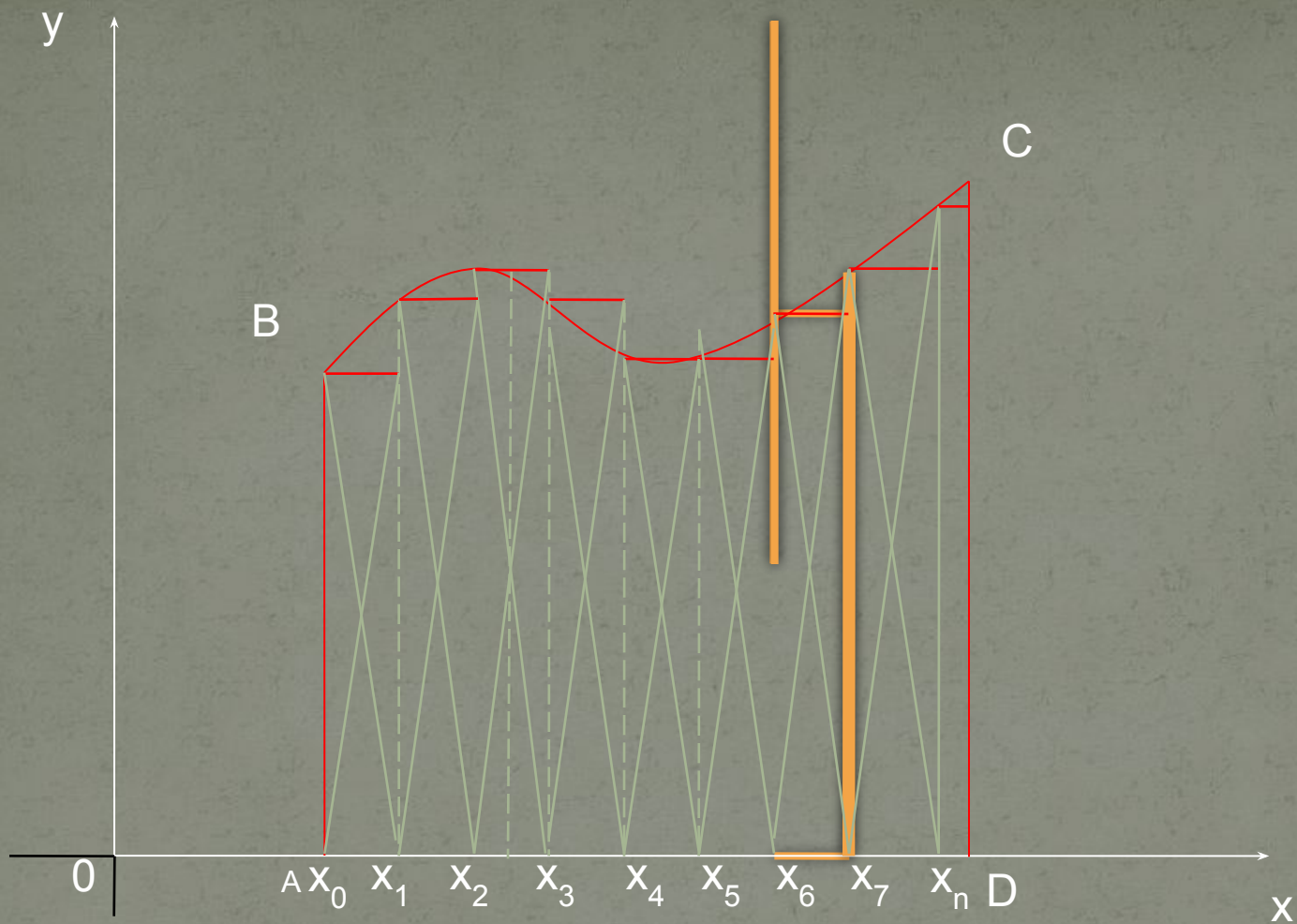


**Через точки деления проведём прямые $y = a, y = x_1, y = x_2, \dots$
 $y = x_i, y = x_{i+1}, \dots, y = b$. Этими прямыми трапеция ABCD
разбивается на полосы.**

Каждой полосе поставим в соответствие прямоугольник, одна сторона которого есть отрезок $[x_i; x_{i+1}^y]$, а смежная сторона – это отрезок $f(x_i)$ ($i=0...n-1$)



Криволинейная трапеция заменится некоторой ступенчатой фигурой, составленной из отдельных прямоугольников



Основание i -го прямоугольника равно разности $x_{i+1} - x_i$, которую мы будем обозначать через Δx_i . Высота i -го прямоугольника равна $f(x_i)$.

Площадь i -го прямоугольника равна:

$$S_i = f(x_i)x_i$$

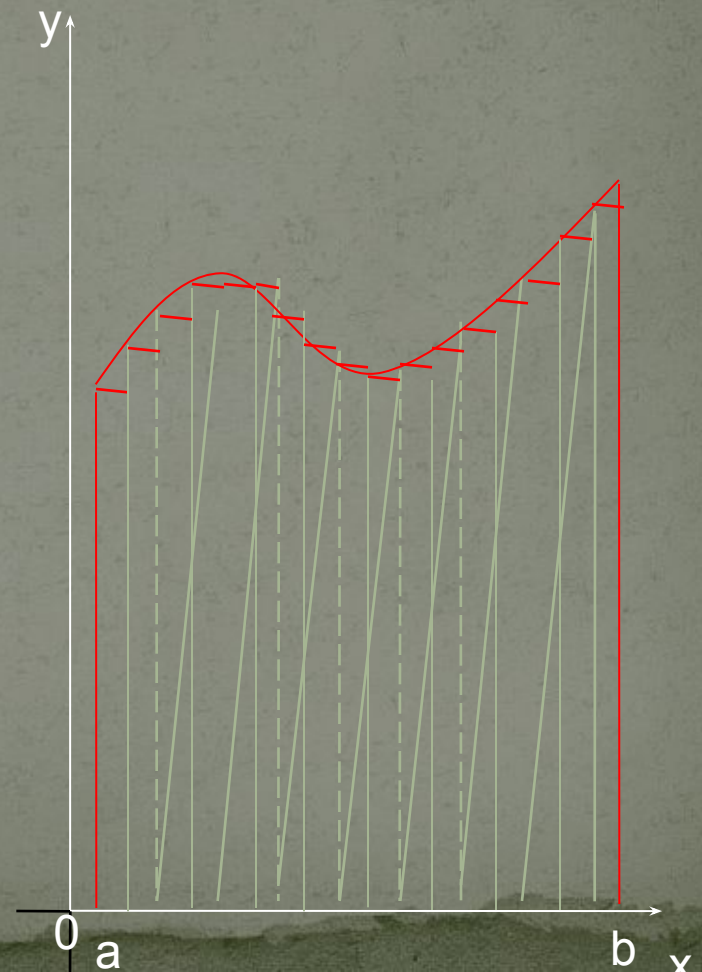
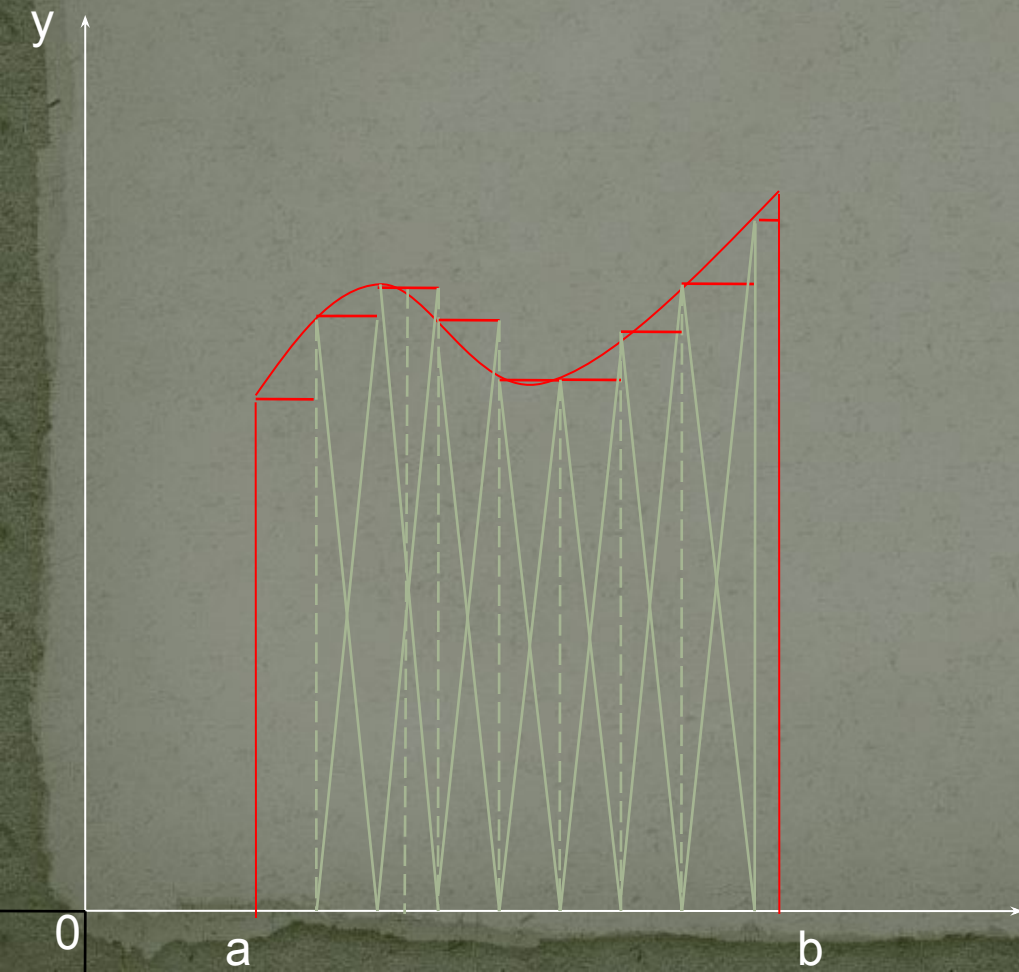
Сложив площади всех прямоугольников, получаем приближенное значение площади S криволинейной трапеции:

$$S \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)x_i$$

При $\Delta x_i \rightarrow 0$

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \Delta x_i \xrightarrow{\Delta x_i \rightarrow 0} S$$

т.к. площадь ступенчатой фигуры почти совпадает с площадью криволинейной трапеции:



Точное значение площади S получается как предел суммы площадей всех прямоугольников

$$S = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n f(x_i) \Delta x_i$$

Для обозначения предельных сумм вида

$f(x_i)$ x_i немецкий учёный В.Лейбниц ввёл
СИМВОЛ $\int_a^b f(x) dx$ - интеграл функции $f(x)$ от a до b

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n f(x_i) \Delta x_i$$

Если предел функции $f(x)$ существует, то $f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a, b]$. Числа \underline{a} и \underline{b} называются нижним и верхним пределом интегрирования. При постоянных пределах интегрирования определённый интеграл представляет собой определённое число.



1) Площадь плоской фигуры

Задача

Вычислить площадь фигуры F , ограниченной линиями $y = 4 - x^2$ и $y = x^2 - 2x$

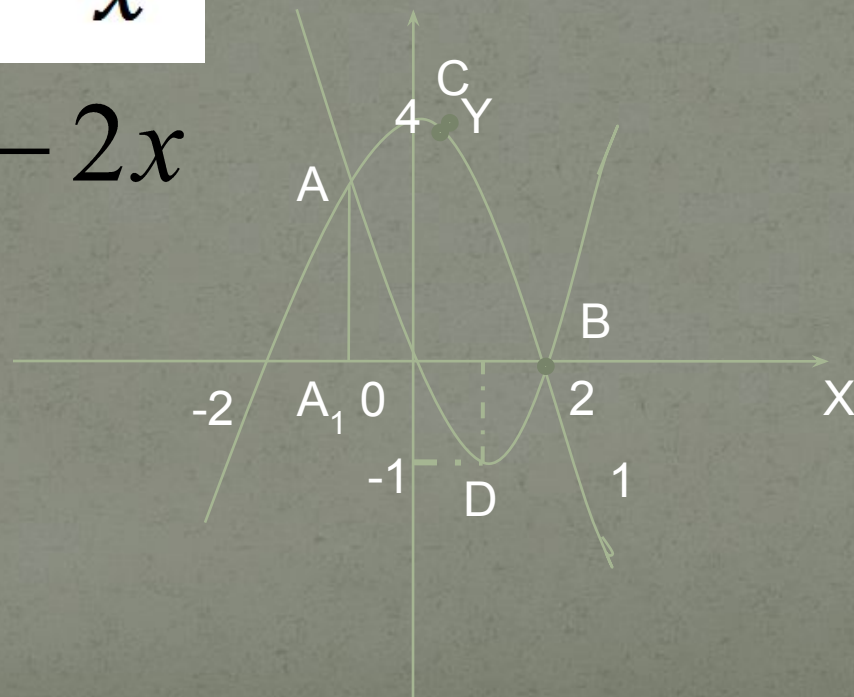
$$F: \begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{cases}$$

Решим задачу по следующему алгоритму:

- 1) Построим фигуру F. Для этого построим линии, ограничивающие эту фигуру

$$y = 4 - x^2$$

$$y = x^2 - 2x$$



Найдем точки пересечения этих парабол

A(-1;3); B(2;0)

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = 4 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \\ x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \quad S_f = S_{A_1ACB} + S_{OBD} - S_{A_1AO}$$

Искомую площадь S_f
можно найти как
алгебраическую
сумму площадей
криволинейных
трапеций

$$S_{A_1ACB} = \int_{-1}^2 (4 - x^2) dx = \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 = 8 - \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{3} = 9$$

$$S_{OBD} = \int_2^0 (x^2 - 2x) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_2^0 = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}$$

$$S_{A_1A_0} = \int_{-1}^0 (x^2 - 2x) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

$$S_f = 9 + \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = 9 \text{ (кв.ед.)}$$

Ответ: $S_f = 9$ кв.ед.

2) Объем тела вращения

Пусть тело образуется при вращении вокруг оси Ox криволинейной трапеции x_1ABx_2

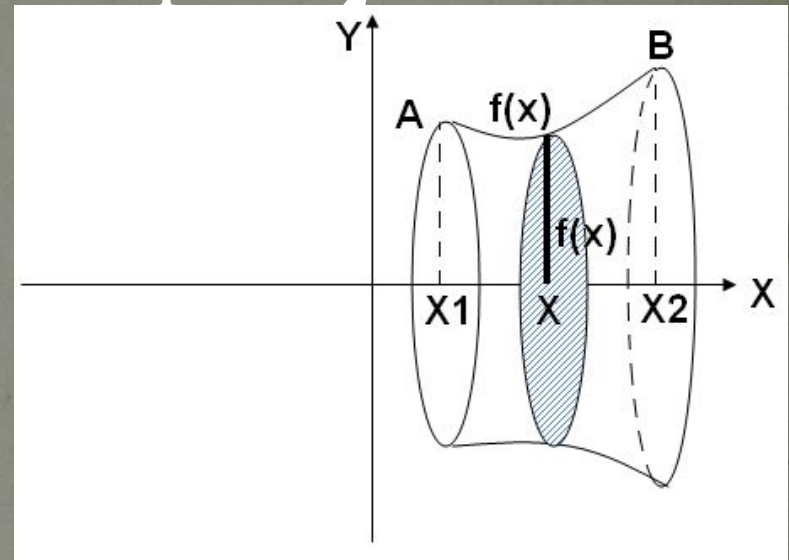
Любое сечение этого тела плоскостью, перпендикулярной к оси Ox будет круг, радиус которого равен соответствующей ординате точки кривой $Y=f(x)$

Площадь сечения $S(x)$ равна πy^2 , т.е.

$$S(x) = \pi f^2(x)$$

Объем тела вращения может быть вычислен по формуле

$$V = \int_{x_1}^{x_2} \pi f^2(x) dx \quad \text{при} \quad x_1 < x_2$$



ЗАДАЧА

Вычислить объем шара, получаемого вращением полуокружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ вокруг оси OX

Построим полуокружность

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

При вращении этой полуокружности вокруг OX получается сфера, ограничивающая шар.

Объем шара найдем по формуле

$$\begin{aligned} V &= \int_{-R}^R \Pi f^2(x) dx = \Pi \int_{-R}^R (\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx = \\ &= \Pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \Pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-R}^R = \\ &= \Pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \Pi R^3 \end{aligned}$$

Ответ: Объем шара $V = \frac{4}{3} \Pi R^3$ (куб.ед.)

