Муниципальное общеобразовательное учреждение
«Лицей № 230»

Ортотреугольник и его свойства

Работу выполнила
ученица 9 «А» класса МОУ «Лицей» № 230
Волкова Екатерина Евгеньевна.
Руководитель:
Редкина Елена Ивановна

г.Заречный, Пензенская область
2008 г.

Италия, начало XVIII века

Инженер и математик Фаньяно Дей Тоски (1682—1766)

Задача: вписать в данный остроугольный треугольник *ABC* треугольник наименьшего периметра так, чтобы на каждой стороне треугольника *ABC* лежала одна вершина треугольника.

Существует единственный вписанный треугольник наименьшего периметра - **ортотреугольник.**

Цель данной работы:

описание дополнительных геометрических свойств треугольника.

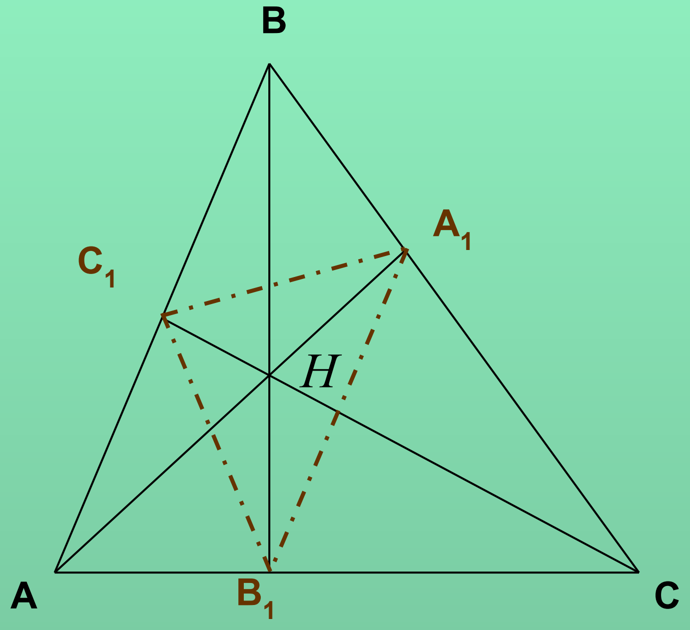
Задачи:

1) выяснить, что такое ортотреугольник;

2) изучить его свойства;

3) рассмотреть возможное применение этих свойств к решению задач.

Определение ортотреугольника



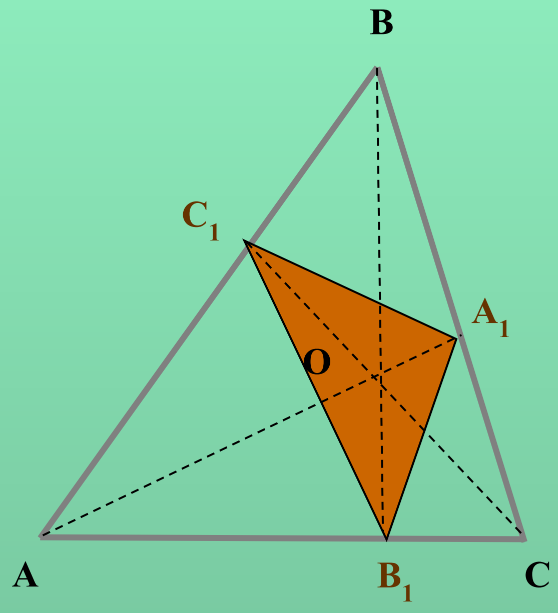
ΔABC – остроугольный

AA_1, BB_1, CC_1 – высоты

$\Delta A_1B_1C_1$ – ортотреугольник

H – ортоцентр

Свойства ортотреугольника



1. Ортотреугольник отсекает треугольники, подобные данному.
2. Две смежные стороны ортотреугольника образуют равные углы с соответствующей стороной исходного треугольника.
3. Высоты треугольника являются биссектрисами ортотреугольника.
4. Ортотреугольник – это треугольник с наименьшим периметром, который можно вписать в этот треугольник .
5. Периметр ортотреугольника равен удвоенному произведению высоты треугольника на синус угла, из которого она исходит.

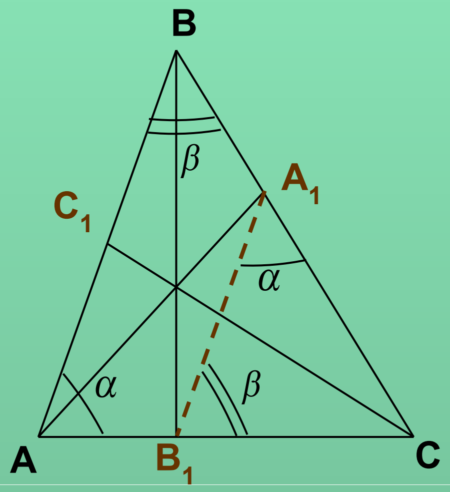
2.1 Теорема о подобии треугольников

Ортотреугольник отсекает треугольники, подобные данному.

$$\Delta ACB \Rightarrow \angle B_1A_1C = \alpha,.\angle A_1B_1C = \beta.$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle C - общий \\ \angle AA_1C = \angle BB_1C\end{array}\right| \Rightarrow \Delta AA_1C \sim \Delta BB_1C \Rightarrow \frac{A_1C}{AC} = \frac{B_1C}{BC}$$

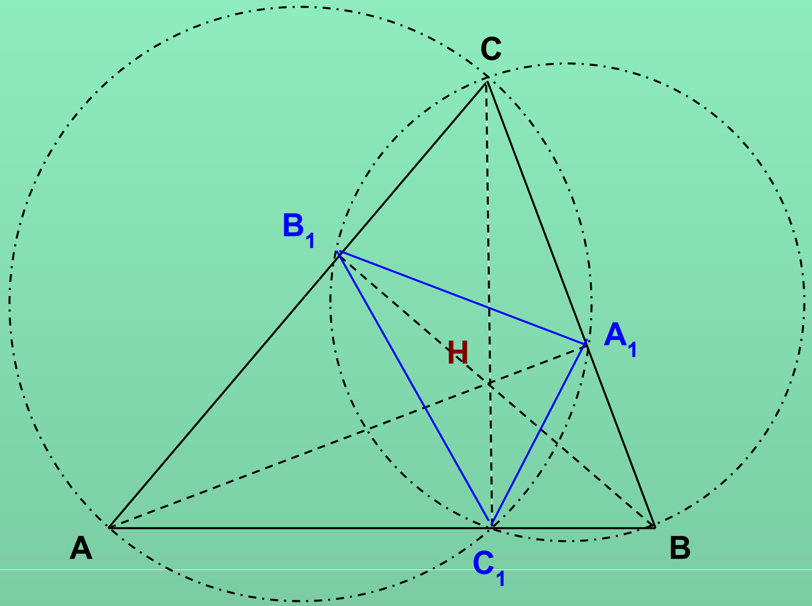
$$\Rightarrow \Delta A_1CB_1 \sim \Delta ACB \Rightarrow \left|\begin{array}{l}\angle B_1A_1C = \angle BA_1C_1 = \alpha \\ \angle A_1B_1C = \angle AB_1C_1 = \beta\end{array}\right.$$



$$\Delta A_1BC_1 \sim \Delta ABC \Rightarrow \left|\begin{array}{l}\angle BA_1C_1 = \angle BAC = \alpha \\ \angle BC_1A = \angle C\end{array}\right.$$

$$\Delta AB_1C_1 \sim \Delta ABC \Rightarrow \left|\begin{array}{l}\angle AC_1B_1 = \angle C \\ \angle AB_1C_1 = \angle ABC = \beta\end{array}\right.$$

2.2 Теорема о свойстве биссектрис ортотреугольника



$\angle B_1C_1C = \angle B_1BC$

$\angle B_1BC = \angle CAA_1$

$\angle CAA_1 = \angle CC_1A_1$

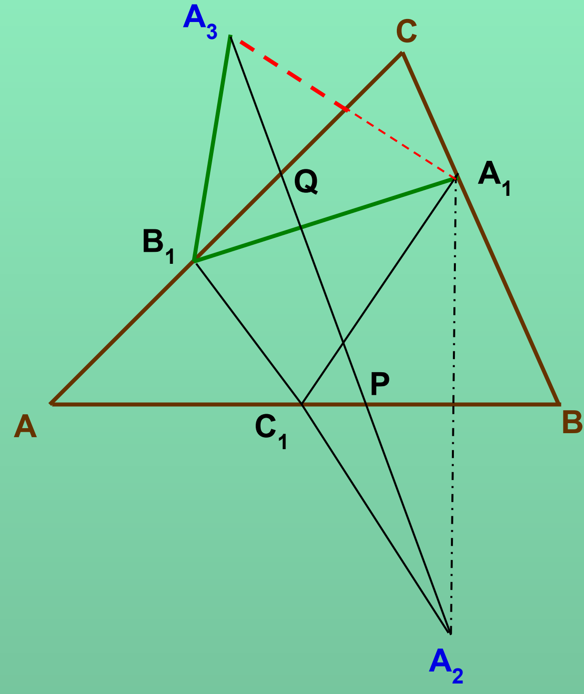
$\angle B_1C_1C = \angle CC_1A_1 \Rightarrow$

CC_1 – *биссектриса* $\angle B_1C_1A_1$;

AA_1 – *биссектриса* $\angle B_1A_1C_1$;

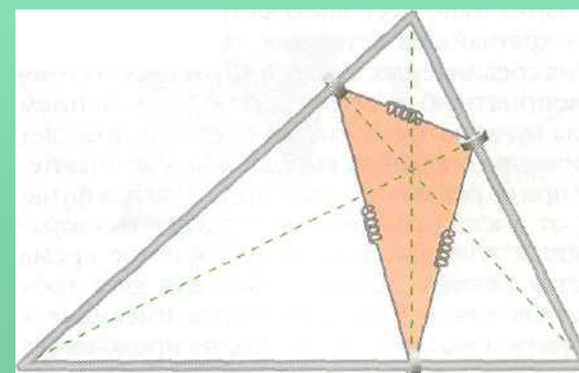
BB_1 – *биссектриса* $\angle A_1B_1C_1$.

2.3 Теорема Фаньяно

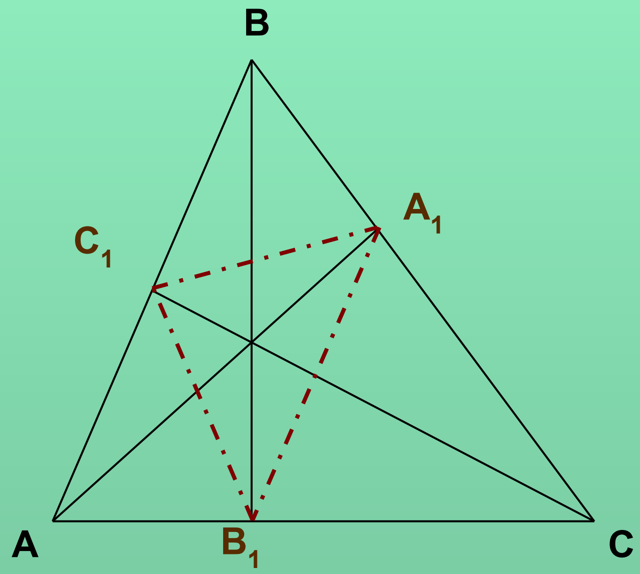


Среди всех треугольников, вписанных в данный остроугольный треугольник, наименьший периметр имеет ортотреугольник.

2.4 Физический смысл
и механическая модель задачи Фаньяно



2.5 Периметр ортотреугольника



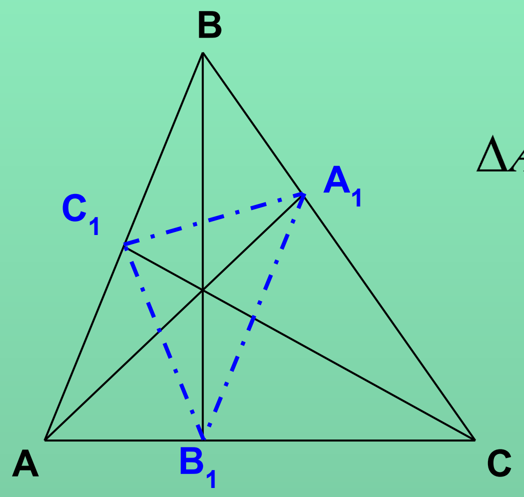
$$P_{A_1B_1C_1} = 2AA_1 \cdot \sin A$$

$$P_{A_1B_1C_1} = 2BB_1 \cdot \sin B$$

$$P_{A_1B_1C_1} = 2CC_1 \cdot \sin C$$

$$P_{A_1B_1C_1} = \frac{2S_{ABC}}{R}$$

Задача 1. Пусть AA_1 и BB_1 – высоты треугольника *ABC*. Докажите, что треугольник ΔA_1B_1C подобен треугольнику *ABC*. Чему равен коэффициент подобия?



$$\Delta A_1B_1C \sim \Delta ABC \Rightarrow k = \frac{A_1C}{AC} = \frac{B_1C}{BC}$$

$$\Delta AA_1C - \textit{прямоугольный} \Rightarrow A_1C = AC \cdot \cos C$$

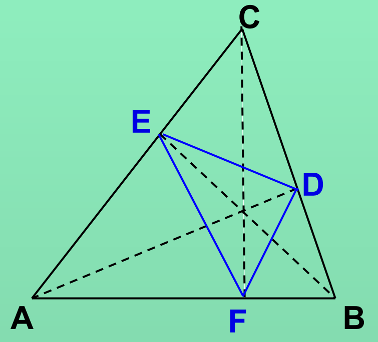
$$k = \frac{A_1C}{AC} = \frac{AC \cdot \cos C}{AC} = \cos C$$

$$A_1B_1 = AB \cdot \cos C$$

$$A_1C_1 = AC \cdot \cos B$$

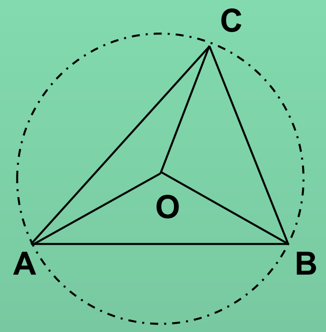
$$B_1C_1 = BC \cdot \cos A$$

Задача 3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD, BE и CF.Докажите, что pR=Pr, где p-периметр треугольника EDF, P – периметр треугольника ABC.



$$\left.\begin{aligned} FE &= BC\cdot\cos A \\ FD &= AC\cdot\cos B \\ ED &= AB\cdot\cos C \end{aligned}\right| \Rightarrow p = BC\cdot\cos A + AC\cdot\cos B + AB\cdot\cos C$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2}R\cdot R\cdot\sin BOC = \frac{1}{2}R\cdot R\cdot\sin 2A = \frac{1}{2}R\cdot R\cdot 2\sin A\cdot\cos A$$



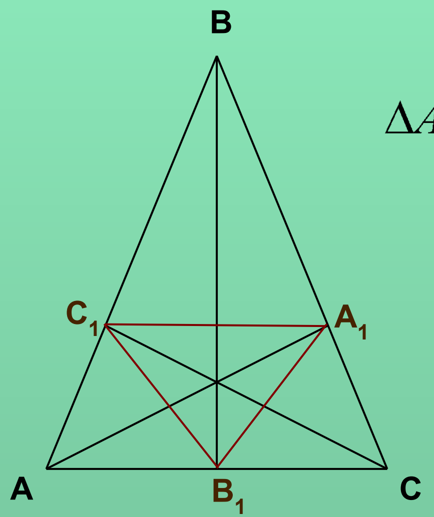
$$\frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow \sin A = \frac{BC}{2R} \qquad S_{BOC} = \frac{1}{2}R\cdot BC\cdot\cos A$$

$$S_{AOC} = \frac{1}{2}R\cdot AC\cdot\cos B \qquad S_{AOB} = \frac{1}{2}R\cdot AB\cdot\cos C$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}R\cdot(BC\cdot\cos A + AC\cdot\cos B + AB\cdot\cos C) = \frac{1}{2}Rp \qquad pR = 2S_{ABC} = \mathrm{Pr}$$

Задача 5. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием $AC = 4$ и боковой стороной $AB = 8$ проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Найти периметр треугольника $A_1B_1C_1$ и длину высоты CC_1.

$$\Delta ABC - \text{равнобедренный} \Rightarrow AB_1 = B_1C = 2; \angle ABB_1 = \angle B_1BC$$



$$\Delta A_1B_1C \sim \Delta ABC \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{B_1C}{BC} \Rightarrow A_1B_1 = \dfrac{AB \cdot B_1C}{BC} = \dfrac{8 \cdot 2}{8} = 2 \\ \dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{A_1C}{AC} \Rightarrow A_1C = \dfrac{A_1B_1 \cdot AC}{AB} = \dfrac{2 \cdot 4}{8} = 1 \end{array} \right.$$

$$\Delta AC_1B_1 = \Delta CA_1B_1 \Rightarrow B_1C_1 = 2$$

$$\Delta A_1BC_1 \sim \Delta CBA \Rightarrow \frac{C_1A_1}{AC} = \frac{BA_1}{BC} \Rightarrow \frac{C_1A_1}{4} = \frac{7}{8} \Rightarrow C_1A_1 = \frac{7}{2}$$

$$P_{\Delta ABC} = A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1 = \frac{15}{2} = 7{,}5$$

$$AC^2 = AC_1^2 + CC_1^2 \Rightarrow CC_1 = \sqrt{AC^2 - AC_1^2} = \sqrt{4^2 - 1} = \sqrt{15}$$