

Основные понятия теории вероятности

О.В. Кулик - преподаватель математики
КГТК – филиал НГГТИ

Теория вероятностей

Введение

Основные комбинаторные объекты

Элементы теории вероятности

Основные комбинаторные объекты

Задачи в которых производится подсчет всех возможных комбинаций составленных по некоторому правилу, называются комбинаторными. Раздел математики занимающийся их решением называется комбинаторикой.

Правило умножения

Размещения

Правило сложения

Перестановка

Сочетания



Элементы теории вероятности

Основные понятия теории вероятностей

Теоремы сложения и умножения вероятностей

Повторение испытаний



Основные понятия теории вероятностей

Случайные события. Операции над событиями

Классическая формула вероятности

Статистическая и геометрическая вероятности



Теоремы сложения и умножения вероятностей

Теорема сложения вероятностей

Теорема умножения вероятностей.
Условная вероятность

Формула полной вероятности.
Формула Байеса



Повторение испытаний

Формула Бернулли

Асимптотические формулы



Введение

Теория вероятностей возникла как наука из убеждения, что в основе массовых случайных событий лежат детерминированные закономерности, теория вероятностей изучает эти закономерности.

Математическая статистика это наука изучающая методы обработки результатов наблюдения массовых случайных явлений, обладающих статистической устойчивостью, с целью выявления этих закономерностей



Правило умножения

Если требуется выполнить одно за другим какие то K действий при чем 1 действие можно выполнить a_1 способами, 2 действие – a_2 способами, и так до K -го действия, которое можно выполнить a_k способами, то все K действий вместе могут быть выполнены $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_k$ способами.

4 мальчика 4 девочки садятся на 8 расположенных подряд стульев, причем мальчики садятся на места с четными номерами, а девочки – на места с нечетными номерами. Сколькими способами это можно сделать ?

Первый мальчик может сесть на любое из четырех четных мест, второй - на любое из оставшихся трех мест, третий – на любое оставшихся двух мест. Последнему мальчику предоставляется всего одна возможность. Согласно правилу умножения, мальчики могут занять четыре места $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ способами. Столько же возможностей имеют и девочки. Таким образом, согласно правилу умножения, мальчики и девочки могут занять все стулья

$$24 \cdot 24 = 576$$



Правило сложения

Если **два действия** взаимно исключают друг друга, при чем одно из них можно выполнить **m** способами, а другое – **n** способами, то выполнить одно любое из этих действий можно **$m+n$** способами.

Это правило легко распространить на любое конечное число действий



Размещения

Размещением из n элементов по m называется любое упорядоченное подмножество из m элементов множества, состоящего из n различных элементов

Теорема: число размещений из n по m равно

$$A_n^m = \frac{n!}{(n - m)!}$$

Пример
задачи



1) В журнале 10 страниц , необходимо на страницах поместить 4 фотографии. Сколькими способами это можно сделать , если ни одна страница газеты не должна содержать более одной фотографии ?

$$A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040_{СП}$$

2) Сколько можно записать четырехзначных чисел , используя без повторения все десять цифр?

$$A_{10}^4 = \frac{10!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040_{СП}$$

$$A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504_{СП}$$

Ответ : 5040 – 504 = 4536 способов



Перестановки

Перестановкой из n элементов называется любое упорядоченное множество, в которое входят по одному разу все n различных элементов данного множества

Теорема: Число перестановок n различных элементов равно $n!$

$$P_n = n!$$

Пример
задачи



1) Записать все возможные перестановки для чисел 3,5,7

3,5,7 ; 3,7,5 ; 5,3,7 ; 5,7,3 ; 7,3,5 ; 7,5,3

2) Сколькими способами можно расставить девять различных книг на полке, чтобы определенные четыре книги стояли рядом?

$$P_6 = 6! = 720$$

$$P_4 = 4! = 24$$

$$P_6 \cdot P_4 = 720 \cdot 24 = 17280$$



Сочетания

Сочетанием из n элементов по m называется любое подмножество из m элементов, которые принадлежат множеству, состоящему из n различных элементов

Теорема: Число сочетаний из n по m

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Пример
задачи

Следствие: Число сочетаний из n элементов по $n-m$ равно числу сочетаний из n элементов по m

$$C_n^{n-m} = C_n^m$$



1) Имеется 10 белых и 5 черных шаров. Сколькими способами можно выбрать 7 шаров, что бы среди них были 3 черных ?

Решение: среди выбранных шаров 4 белых и 3 черных.

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = 210 \quad \text{Способов выбора белых шаров}$$

$$C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10 \quad \text{Способов выбора черных шаров}$$

По правилу умножения искомое число способов равно

$$C_{10}^4 \cdot C_5^3 = 2100$$

2) Сколькими способами можно группу из 12 человек разбить на две подгруппы, в одной из которых должно быть не более 5, а во второй - не более 9 человек ?

$$C_{12}^3 = 220 \quad \text{Подгруппа из 3}$$

$$C_{12}^4 = 495 \quad \text{Подгруппа из 4}$$

$$C_{12}^5 = 792 \quad \text{Подгруппа из 5}$$

Выбор первой подгруппы однозначно определяет вторую, по правилу сложения искомое число способов равно:

$$C_{12}^3 + C_{12}^4 + C_{12}^5 = 1507$$



Случайные события.

Операции над событиями

Событие- явление , которое происходит в результате осуществления какого-либо определенного комплекса условий. Осуществление комплекса условий называется опытом или испытанием. **Событие-результат испытания.**

Случайным событием называется событие, которое может произойти или не произойти в результате некоторого испытания (при бросании монеты может выпасть орел , а может и не выпасть).

Достоверным событием называется событие, которое обязательно произойдет в результате испытания (извлечение белого шарика из ящика с белыми шарами).

Невозможным считается событие, которое не может произойти в результате данного испытания(извлечение черного шарика из ящика с белыми шарами).

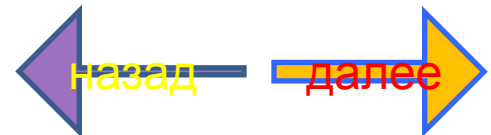


Случайные события

Событие A называется благоприятствующим событию B , если появление события A влечет за собой появление события B .

События A и B называются не совместными, если в результате данного испытания появление одного из них исключает появление другого (испытание: стрельба по мишени; A -выбивание четного числа очков; B - не четного).

События A и B называются совместным, если в результате данного испытания появление одного из них не исключает появления другого (A - в аудиторию вошел учитель; B - вошел студент).

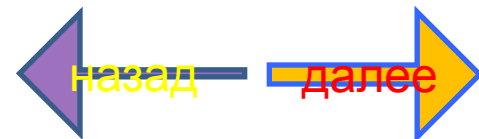


Случайные события

Два события A и \bar{A} называются противоположными, если не появление одного из них в результате испытания влечет появление другого (отрицание A).

Если группа событий такова, что в результате испытания обязательно должно произойти хотя бы одно из них и любые два из них несовместны, то эта группа событий называется **полной группой событий**.

События называются **равновозможными**, если по условию испытания нет оснований считать какое-либо из них более возможным, чем любое другое (A -орел; B -решка).



Операции над событиями

Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них в результате испытания.

Пример: в ящике находится красный, черный и белый шары.

A- извлечение черного шара

B- извлечение красного шара

C- извлечение белого шара

A+B – извлечен черный или красный шар

B+C – извлечен красный или белый шар

A+C – извлечен черный или белый шар

← назад

→ далее

Операции над событиями

Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном наступлении всех этих событий в результате испытания.

Пример: происходят следующие события:

A- из колоды карт вынута "дама"

B- вынута карта пиковой масти

A·B – событие – вынута карта "дама пик"



Классическая формула вероятности

Вероятность события - это численная мера объективной возможности ее появления. Если имеется полная группа попарно несовместных и равновозможных событий, то вероятность $P(A)$ наступления события A вычисляется как отношение числа исходов, благоприятствующих наступлению события, к числу всех исходов испытания.

$$P(A) = \frac{M}{N}$$

N – число всех исходов испытания

M – число исходов благоприятствующих событию A

Пример
задачи

Свойство вероятности:

1) Вероятность достоверного события равна

1

2) Вероятность невозможного события равна 0

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{N}{N} = 1$$

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{0}{N} = 0$$

3) Вероятность события A удовлетворяет двойному неравенству

$$0 \leq P(A) \leq 1$$



1) В ящике 4 черных и 6 белых шаров, извлекают 1 шар , какова вероятность что шар будет белым, черным ?

$N=10$; $M=6$; A - Извлечение белого шара

$$P(A) = \frac{6}{10} = 0,6$$

$N=10$; $M=4$; A - Извлечение черного шара

$$P(A) = \frac{4}{10} = 0,4$$

2) В ящике 10 шаров 2 черных, 4 белых, 4 красных, извлекают 1 шар. Какова вероятность, что он:

A - черный; B - белый; C - красный; D - зеленый

$$N=10; M=2 \quad P(A) = \frac{2}{10} = 0,2$$

$$N=10; M=4 \quad P(B) = \frac{4}{10} = 0,4$$

$$N=10; M=4 \quad P(C) = \frac{4}{10} = 0,4$$

$$N=10; M=0 \quad P(D) = \frac{0}{10} = 0$$



Статистическая и геометрическая вероятности

Было замечено , что при многократном повторении опытов **относительная частота** появления события в этих опытах стремится к устойчивости. Под **относительной частотой** появления события понимается отношение M/N , где N - число опытов; M -число появления события. При увеличении опытов относительная частота появления события будет практически сколь угодно мало отличаться от некоторого постоянного числа, которое и принимается за вероятность события в отдельном опыте. Относительную частоту появления события называют статистической вероятностью. С возрастанием числа опытов, относительная частота стремится к вероятности $P(\Gamma)=0,5$. Относительную частоту при достаточно большем числе опытов , можно считать приближенным значением вероятности.

Геометрической вероятностью события называется отношение меры области, благоприятствующей появлению события , к мере всей области.



Теорема сложения вероятностей

Вероятность появления одного из двух **несовместных** событий, равна **сумме** вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Вероятность появления одного из нескольких **попарно несовместных** событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n)$$

$$P(\sum_{i=1}^n Ai) = \sum_{i=1}^n P(Ai)$$

Сумма вероятностей **попарно несовместных** $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ событий, образующих полную группу, **равна 1**.



Теорема сложения вероятностей

Сумма вероятностей **противоположных** событий **равна 1**

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Вероятность появления хотя бы одного из двух **совместных** событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$



Теорема умножения вероятностей. Условная вероятность

Условной вероятностью $P_A(B)$ называется вероятность события B , вычисленная в предположении, что событие A уже наступило.

Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$$

Два события называются независимыми, если появление любого из них не изменяет вероятность появления другого:

$$P(A) = P_B(A) \quad \text{или} \quad P(B) = P_A(B)$$

Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению их вероятностей:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$



Теорема умножения вероятностей. Условная вероятность

Вероятность совместного наступления конечного числа событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем условная вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие уже наступили:

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 A_2}(A_3) \dots P_{A_1 A_2 A_3 \dots A_{n-1}}(A_n);$$

$P_{A_1 A_2 A_3 \dots A_{n-1}}(A_n)$ — вероятность появления события A_n , вычисленная в предположении, что события $A_1 A_2 A_3 \dots A_{n-1}$ произошли
 $\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \dots \bar{A}_n$

Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \dots P(A_n)$$

Вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий

$$P(A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n) = 1 - P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2) P(\bar{A}_3) \dots P(\bar{A}_n)$$



Формула полной вероятности. Формула Байеса

Вероятность события A , которое может наступить только при условии появления одного из событий $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$, образующих полную группу попарно несовместных событий, равна сумме произведений вероятностей каждого из событий $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$ на соответствующую условную вероятность события A :

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) P_{H_i}(A)$$

Формула полной вероятности



Формула полной вероятности. Формула Байеса

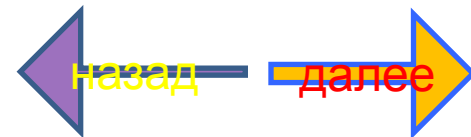
Рассмотрим события $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ которые образуют полную группу событий и при наступлении каждого из них B_i событие A может наступать с некоторой условной $P_{B_i}(A)$ вероятностью

Тогда вероятность наступления события A равна сумме произведений вероятностей каждого из событий на соответствующую условную вероятность события A

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)$$

Сколько бы не было вероятностей:

$$P(B_1) + P(B_2) + \dots + P(B_n) = 1$$



Формула полной вероятности. Формула Байеса

Рассмотрим событие A которое может наступить при условии появления одного из несовместных событий, $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$, которые образуют полную группу событий. Если событие A уже произошло то вероятность событий может быть переоценена по формуле **Байеса**, формуле вероятности гипотез:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(A)}$$



Формула Бернулли

Вероятность того что в n независимых испытаниях в каждом из которых вероятность появления события равна P , $P(0 < P < 1)$, событие наступит K раз безразлично в какой последовательности, вычисляется по формуле Бернулли

$$P_n(K) = C_n^K \cdot p^K \cdot q^{n-K} \quad q=1-p; \quad q - \text{вероятность противоположного события}$$

ИЛИ

$$P_n(K) = \frac{n!}{K!(n-K)!} \cdot p^K \cdot q^{n-K}$$



Асимптотические формулы

Если число испытаний велико, то использование формулы Бернулли будет нецелесообразным в силу необходимости выполнения громоздких вычислений. **Теорема Муавра-Лапласа**, дающая асимптотическую формулу, позволяет вычислить вероятность приближенно.

Теорема: Если вероятность наступления события **A** в каждом из **n** независимых испытаниях равна **p** и отлична от нуля и единицы, а число испытаний достаточно велико, то вероятность **$P_n(m)$** того, что в **n** испытаниях событие **A** наступит **m** раз, приближенно равна значению функции

$$y = \frac{1}{\sqrt{npq}} f(u), \text{ где}$$

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}, u = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$$



Асимптотические формулы.

Распределение Пуассона

Если вероятность события в отдельном испытании близка к нулю, то применяют другую асимптотическую формулу-формулу Пуассона. Теорема:

Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна, но близка к нулю, число независимых испытаний n достаточно велико, а произведение $np = \lambda$, то вероятность $P_n(m)$ того, что в n независимых испытаниях событие A наступит m раз, приближенно равна

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$$



1) В журнале 10 страниц , необходимо на страницах поместить 4 фотографии. Сколькими способами это можно сделать , если ни одна страница газеты не должна содержать более одной фотографии ?

$$A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040_{СП}$$

2) Сколько можно записать четырехзначных чисел , используя без повторения все десять цифр?

$$A_{10}^4 = \frac{10!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040_{СП}$$

$$A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504_{СП}$$

$$\text{Ответ : } 5040 - 504 = 4536_{\text{способов}}$$

