

# Основные понятия теории вероятности

О.В. Кулик - преподаватель математики  
КГТК – филиал НГГТИ

# Теория вероятностей

Введение

Основные комбинаторные объекты

Элементы теории вероятности

# Основные комбинаторные объекты

Задачи в которых производится подсчет всех возможных комбинаций составленных по некоторому правилу, называются комбинаторными. Раздел математики занимающийся их решением называется комбинаторикой.

Правило умножения

Размещения

Правило сложения

Перестановк  
а

Сочетания



# Элементы теории вероятности

Основные понятия теории вероятностей

Теоремы сложения и умножения вероятностей

Повторение испытаний



# Основные понятия теории вероятностей

Случайные события. Операции над событиями

Классическая формула вероятности

Статистическая и геометрическая вероятности



# Теоремы сложения и умножения вероятностей

Теорема сложения вероятностей

Теорема умножения вероятностей.  
Условная вероятность

Формула полной вероятности.  
Формула Байеса



# Повторение испытаний

Формула Бернулли

Асимптотические формулы



# Введение

Теория вероятностей возникла как наука из убеждения, что в основе массовых случайных событий лежат детерминированные закономерности, теория вероятностей изучает эти закономерности.

Математическая статистика это наука изучающая методы обработки результатов наблюдения массовых случайных явлений, обладающих статистической устойчивостью, с целью выявления этих закономерностей





# Правило умножения

Если требуется выполнить одно за другим какие то  $K$  действий при чем  $1$  действие можно выполнить  $a_1$  способами,  $2$  действие –  $a_2$  способами, и так до  $K$ -го действия, которое можно выполнить  $a_k$  способами, то все  $K$  действий вместе могут быть выполнены  $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_k$  способами.

4 мальчика 4 девочки садятся на 8 расположенных подряд стульев, причем мальчики садятся на места с четными номерами, а девочки – на места с нечетными номерами. Сколькими способами это можно сделать ?

Первый мальчик может сесть на любое из четырех четных мест, второй - на любое из оставшихся трех мест, третий – на любое оставшихся двух мест. Последнему мальчику предоставляется всего одна возможность. Согласно правилу умножения, мальчики могут занять четыре места  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$  способами. Столько же возможностей имеют и девочки. Таким образом, согласно правилу умножения, мальчики и девочки могут занять все стулья

$$24 \cdot 24 = 576$$



# Правило сложения

Если **два действия** взаимно исключают друг друга, при чем одно из них можно выполнить  **$m$**  способами, а другое –  **$n$**  способами, то выполнить одно любое из этих действий можно  **$m+n$**  способами.

Это правило легко распространить на любое конечное число действий



# Размещения

Размещением из  $n$  элементов по  $m$  называется любое упорядоченное подмножество из  $m$  элементов множества, состоящего из  $n$  различных элементов

Теорема: число размещений из  $n$  по  $m$  равно

$$A_n^m = \frac{n!}{(n - m)!}$$

Пример  
задачи



1) В журнале 10 страниц , необходимо на страницах поместить 4 фотографии. Сколькими способами это можно сделать , если ни одна страница газеты не должна содержать более одной фотографии ?

$$A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040_{СП}$$

2) Сколько можно записать четырехзначных чисел , используя без повторения все десять цифр?

$$A_{10}^4 = \frac{10!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040_{СП}$$

$$A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504_{СП}$$

*Ответ : 5040 – 504 = 4536* способов



# Перестановки

Перестановкой из  $n$  элементов называется любое упорядоченное множество, в которое входят по одному разу все  $n$  различных элементов данного множества

Теорема: Число перестановок  $n$  различных элементов равно  $n!$

$$P_n = n!$$

Пример  
задачи



1) Записать все возможные перестановки для чисел 3,5,7

3,5,7 ; 3,7,5 ; 5,3,7 ; 5,7,3 ; 7,3,5 ; 7,5,3

2) Сколькими способами можно расставить девять различных книг на полке, чтобы определенные четыре книги стояли рядом?

$$P_6 = 6! = 720$$

$$P_4 = 4! = 24$$

$$P_6 \cdot P_4 = 720 \cdot 24 = 17280$$



# Сочетания

Сочетанием из  $n$  элементов по  $m$  называется любое подмножество из  $m$  элементов, которые принадлежат множеству, состоящему из  $n$  различных элементов

Теорема: Число сочетаний из  $n$  по  $m$

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Пример  
задачи

Следствие: Число сочетаний из  $n$  элементов по  $n-m$  равно числу сочетаний из  $n$  элементов по  $m$

$$C_n^{n-m} = C_n^m$$



1) Имеется 10 белых и 5 черных шаров. Сколькими способами можно выбрать 7 шаров, что бы среди них были 3 черных ?

Решение: среди выбранных шаров 4 белых и 3 черных.

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = 210 \quad \text{Способов выбора белых шаров}$$

$$C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10 \quad \text{Способов выбора черных шаров}$$

По правилу умножения искомое число способов равно

$$C_{10}^4 \cdot C_5^3 = 2100$$

2) Сколькими способами можно группу из 12 человек разбить на две подгруппы, в одной из которых должно быть не более 5, а во второй - не более 9 человек ?

$$C_{12}^3 = 220 \quad \text{Подгруппа из 3}$$

$$C_{12}^4 = 495 \quad \text{Подгруппа из 4}$$

$$C_{12}^5 = 792 \quad \text{Подгруппа из 5}$$

Выбор первой подгруппы однозначно определяет вторую, по правилу сложения искомое число способов равно:

$$C_{12}^3 + C_{12}^4 + C_{12}^5 = 1507$$





# Случайные события.

## Операции над событиями

**Событие**- явление , которое происходит в результате осуществления какого-либо определенного комплекса условий. Осуществление комплекса условий называется опытом или испытанием. **Событие-результат испытания.**

**Случайным событием** называется событие, которое может произойти или не произойти в результате некоторого испытания ( при бросании монеты может выпасть орел , а может и не выпасть).

**Достоверным событием** называется событие, которое обязательно произойдет в результате испытания ( извлечение белого шарика из ящика с белыми шарами).

**Невозможным считается событие**, которое не может произойти в результате данного испытания( извлечение черного шарика из ящика с белыми шарами).

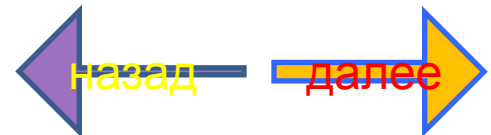


# Случайные события

Событие  $A$  называется благоприятствующим событию  $B$ , если появление события  $A$  влечет за собой появление события  $B$ .

События  $A$  и  $B$  называются не совместными, если в результате данного испытания появление одного из них исключает появление другого (испытание: стрельба по мишени;  $A$ -выбивание четного числа очков;  $B$ - не четного).

События  $A$  и  $B$  называются совместным, если в результате данного испытания появление одного из них не исключает появления другого ( $A$ - в аудиторию вошел учитель;  $B$ - вошел студент).

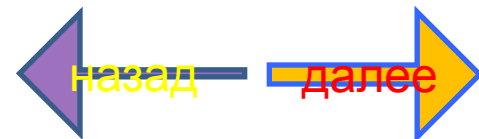


# Случайные события

Два события  $A$  и  $\bar{A}$  называются противоположными, если не появление одного из них в результате испытания влечет появление другого (отрицание  $A$ ).

Если группа событий такова, что в результате испытания обязательно должно произойти хотя бы одно из них и любые два из них несовместны, то эта группа событий называется **полной группой событий**.

События называются **равновозможными**, если по условию испытания нет оснований считать какое-либо из них более возможным, чем любое другое ( $A$ -орел;  $B$ -решка).



# Операции над событиями

**Суммой** нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них в результате испытания.

Пример: в ящике находится красный, черный и белый шары.

A- извлечение черного шара

B- извлечение красного шара

C- извлечение белого шара

A+B – извлечен черный или красный шар

B+C – извлечен красный или белый шар

A+C – извлечен черный или белый шар

← назад

→ далее

# Операции над событиями

**Произведением** нескольких событий называется событие, состоящее в совместном наступлении всех этих событий в результате испытания.

Пример: происходят следующие события:

A- из колоды карт вынута "дама"

B- вынута карта пиковой масти

A·B – событие – вынута карта "дама пик"



# Классическая формула вероятности

**Вероятность события** - это численная мера объективной возможности ее появления. Если имеется полная группа попарно несовместных и равновозможных событий, то вероятность  $P(A)$  наступления события  $A$  вычисляется как отношение числа исходов, благоприятствующих наступлению события, к числу всех исходов испытания.

$$P(A) = \frac{M}{N}$$

$N$  – число всех исходов испытания

$M$  – число исходов благоприятствующих событию  $A$

Пример  
задачи

Свойство вероятности:

1) Вероятность достоверного события равна

1

2) Вероятность невозможного события равна 0

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{N}{N} = 1$$

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{0}{N} = 0$$

3) Вероятность события  $A$  удовлетворяет двойному неравенству

$$0 \leq P(A) \leq 1$$



1) В ящике 4 черных и 6 белых шаров, извлекают 1 шар, какова вероятность что шар будет белым, черным ?

$N=10$ ;  $M=6$ ;  $A$ - Извлечение белого шара

$$P(A) = \frac{6}{10} = 0,6$$

$N=10$ ;  $M=4$ ;  $A$ - Извлечение черного шара

$$P(A) = \frac{4}{10} = 0,4$$

2) В ящике 10 шаров 2 черных, 4 белых, 4 красных, извлекают 1 шар. Какова вероятность, что он:

$A$ - черный;  $B$ - белый;  $C$ - красный;  $D$ - зеленый

$$N=10; M=2 \quad P(A) = \frac{2}{10} = 0,2$$

$$N=10; M=4 \quad P(B) = \frac{4}{10} = 0,4$$

$$N=10; M=4 \quad P(C) = \frac{4}{10} = 0,4$$

$$N=10; M=0 \quad P(D) = \frac{0}{10} = 0$$



# Статистическая и геометрическая вероятности

Было замечено , что при многократном повторении опытов **относительная частота** появления события в этих опытах стремится к устойчивости. Под **относительной частотой** появления события понимается отношение  $M/N$  , где  $N$ - число опытов;  $M$ -число появления события. При увеличении опытов относительная частота появления события будет практически сколь угодно мало отличаться от некоторого постоянного числа, которое и принимается за вероятность события в отдельном опыте. Относительную частоту появления события называют статистической вероятностью. С возрастанием числа опытов, относительная частота стремится к вероятности  $P(\Gamma)=0,5$ . Относительную частоту при достаточно большем числе опытов , можно считать приближенным значением вероятности.

**Геометрической вероятностью** события называется отношение меры области, благоприятствующей появлению события , к мере всей области.





# Теорема сложения вероятностей

Вероятность появления одного из двух **несовместных** событий, равна **сумме** вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Вероятность появления одного из нескольких **попарно несовместных** событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n)$$

$$P(\sum_{i=1}^n Ai) = \sum_{i=1}^n P(Ai)$$

Сумма вероятностей **попарно несовместных**  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  событий, образующих полную группу, **равна 1**.



# Теорема сложения вероятностей

Сумма вероятностей **противоположных** событий **равна 1**

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Вероятность появления хотя бы одного из двух **совместных** событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$



# Теорема умножения вероятностей. Условная вероятность

Условной вероятностью  $P_A(B)$  называется вероятность события  $B$ , вычисленная в предположении, что событие  $A$  уже наступило.

Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$$

Два события называются независимыми, если появление любого из них не изменяет вероятность появления другого:

$$P(A) = P_B(A) \quad \text{или} \quad P(B) = P_A(B)$$

Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению их вероятностей:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$



# Теорема умножения вероятностей. Условная вероятность

Вероятность совместного наступления конечного числа событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем условная вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие уже наступили:

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 A_2}(A_3) \dots P_{A_1 A_2 A_3 \dots A_{n-1}}(A_n);$$

$P_{A_1 A_2 A_3 \dots A_{n-1}}(A_n)$  — вероятность появления события  $A_n$ , вычисленная в предположении, что события  $A_1 A_2 A_3 \dots A_{n-1}$  произошли  
 $\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \dots \bar{A}_n$

Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \dots P(A_n)$$

Вероятность появления хотя бы одного из событий  $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ , независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий

$$P(A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n) = 1 - P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2) P(\bar{A}_3) \dots P(\bar{A}_n)$$



# Формула полной вероятности. Формула Байеса

Вероятность события  $A$ , которое может наступить только при условии появления одного из событий  $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$ , образующих полную группу попарно несовместных событий, равна сумме произведений вероятностей каждого из событий  $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$  на соответствующую условную вероятность события  $A$ :

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) P_{H_i}(A)$$

Формула полной вероятности



# Формула полной вероятности. Формула Байеса

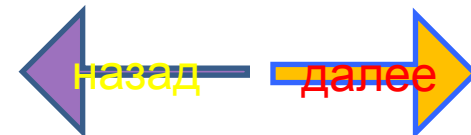
Рассмотрим события  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$  которые образуют полную группу событий и при наступлении каждого из них  $B_i$  событие  $A$  может наступать с некоторой условной  $P_{B_i}(A)$  вероятностью

Тогда вероятность наступления события  $A$  равна сумме произведений вероятностей каждого из событий на соответствующую условную вероятность события  $A$

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)$$

Сколько бы не было вероятностей:

$$P(B_1) + P(B_2) + \dots + P(B_n) = 1$$



# Формула полной вероятности. Формула Байеса

Рассмотрим событие  $A$  которое может наступить при условии появления одного из несовместных событий,  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ , которые образуют полную группу событий. Если событие  $A$  уже произошло то вероятность событий может быть переоценена по формуле **Байеса**, формуле вероятности гипотез:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(A)}$$



# Формула Бернулли

Вероятность того что в  $n$  независимых испытаниях в каждом из которых вероятность появления события равна  $P$ ,  $P(0 < P < 1)$ , событие наступит  $K$  раз безразлично в какой последовательности, вычисляется по формуле Бернулли

$$P_n(K) = C_n^K \cdot p^K \cdot q^{n-K} \quad q=1-p; \quad q - \text{вероятность противоположного события}$$

ИЛИ

$$P_n(K) = \frac{n!}{K!(n-K)!} \cdot p^K \cdot q^{n-K}$$





# Асимптотические формулы

Если число испытаний велико, то использование формулы Бернулли будет нецелесообразным в силу необходимости выполнения громоздких вычислений. **Теорема Муавра-Лапласа**, дающая асимптотическую формулу, позволяет вычислить вероятность приближенно.

Теорема: Если вероятность наступления события **A** в каждом из **n** независимых испытаниях равна **p** и отлична от нуля и единицы, а число испытаний достаточно велико, то вероятность **P<sub>n</sub>(m)** того, что в **n** испытаниях событие **A** наступит **m** раз, приближенно равна значению функции

$$y = \frac{1}{\sqrt{npq}} f(u), \text{ где}$$

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}, u = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$$



# Асимптотические формулы.

## Распределение Пуассона

Если вероятность события в отдельном испытании близка к нулю, то применяют другую асимптотическую формулу-формулу Пуассона. Теорема:

Если вероятность  $p$  наступления события  $A$  в каждом испытании постоянна, но близка к нулю, число независимых испытаний  $n$  достаточно велико, а произведение  $np = \lambda$ , то вероятность  $P_n(m)$  того, что в  $n$  независимых испытаниях событие  $A$  наступит  $m$  раз, приближенно равна

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$$



1) В журнале 10 страниц , необходимо на страницах поместить 4 фотографии. Сколькими способами это можно сделать , если ни одна страница газеты не должна содержать более одной фотографии ?

$$A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040_{СП}$$

2) Сколько можно записать четырехзначных чисел , используя без повторения все десять цифр?

$$A_{10}^4 = \frac{10!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040_{СП}$$

$$A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504_{СП}$$

*Ответ : 5040 – 504 = 4536* способов

