

# 8.3. ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Производная функции может быть найдена по  
схеме:



*Дадим аргументу  $x$  приращение  $\Delta x$  и  
найдем значение функции  $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$*

2

*Находим приращение функции*  
 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

3

*Составляем отношение:*  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

4

*Находим*  $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

# ПРИМЕР.

Найдем производную функции  $y = x^3$

1

Дадим аргументу  $x$  приращение  $\Delta x$  и найдем значение функции  $y + \Delta y$ :

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^3$$

2

Находим приращение функции

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 =$$

$$= \cancel{x^3} + 3x^2 \Delta x + 3x \Delta x^2 + \Delta x^3 - \cancel{x^3} =$$
$$= \Delta x(3x^2 + 3x \Delta x + \Delta x^2)$$



**Составляем отношение**  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \Delta x + \Delta x^2$$



$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

**ПРОИЗВОДНАЯ СТЕПЕННОЙ  
ФУНКЦИИ**

# ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

1

*Производная постоянной величины равна 0:*

$$C' = 0 \quad (C = \text{const})$$

2

*Производная аргумента равна 1:*

$$x' = 1$$

*Производная алгебраической суммы  
(разности) конечного числа  
дифференцируемых функций равна сумме  
(разности) производных этих функций:*

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$



# ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Пусть  $u=u(x)$  и  $v=v(x)$  -дифференцируемые функции.

Найдем производную функции  $y=u + v$ .

Дадим аргументу  $x$  приращение  $\Delta x$ , не равное  $0$ , тогда функции получат значения  $u+\Delta u$ ,  $v+\Delta v$ .

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v$$


Находим приращение функции

$$\Delta y = \cancel{u} + \Delta u + \cancel{v} + \Delta v - \cancel{u} - \cancel{v} = \Delta u + \Delta v$$

Составляем отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x}$$

Находим предел этого отношения:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}}_{u'} + \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}_{v'} = u' + v'$$


*Производная произведения двух дифференцируемых функций равна сумме произведений производной первого сомножителя на второй и производной второго сомножителя на первый:*

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$$

# ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Пусть  $u=u(x)$  и  $v=v(x)$  -дифференцируемые функции.

Найдем производную функции  $y=uv$ .

Дадим аргументу  $x$  приращение  $\Delta x$ , не равное  $0$ , тогда функции получат значения  $u+\Delta u$ ,  $v+\Delta v$ .

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$

## Находим приращение функции

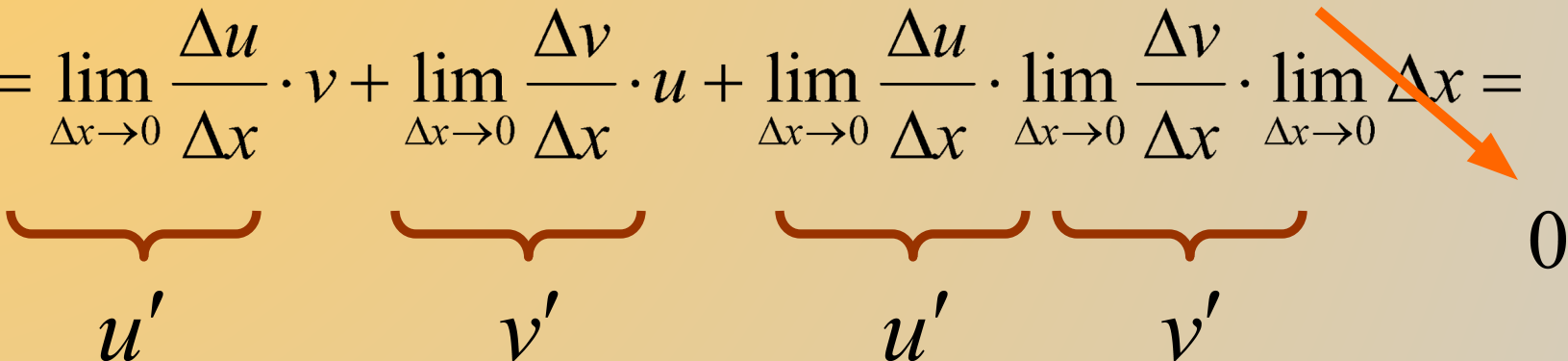
$$\begin{aligned}\Delta y &= (u + \Delta u)(v + \Delta v) - u \cdot v = \\ &= \cancel{u \cdot v} + u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v - \cancel{u \cdot v} = \\ &= u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v\end{aligned}$$

## Составляем отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} v + \frac{\Delta v}{\Delta x} u + \frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} v + \frac{\Delta v}{\Delta x} u + \frac{\Delta u}{\Delta x} \frac{\Delta v}{\Delta x} \Delta x$$

**Находим предел этого отношения:**

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot u + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x =$$



$u' \quad v' \quad u' \quad v' \quad 0$

**Имеем по определению производной:**

$$= u' \cdot v + v' \cdot u + u' \cdot v' \cdot 0 = u' \cdot v + v' \cdot u$$



## *Следствие 1.*

*Постоянный множитель можно выносить за знак производной:*

$$(C \cdot u)' = C \cdot u'$$

## *Следствие 2.*

*Производная произведения нескольких дифференцируемых функций равна сумме произведений производной каждого из сомножителей на все остальные:*

$$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + v' \cdot u \cdot w + w' \cdot u \cdot v$$

*Производная частного двух дифференцируемых функций находится по формуле:*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$$



# ПРИМЕРЫ.



*Найти производную функции*

$$y = 15 \cdot (x^4 - 1)$$

*и вычислить ее значение в точке  $x=1$ .*

# Решение.

$$\begin{aligned} y' &= 15' \cdot (x^4 - 1) + 15 \cdot (x^4 - 1)' = \\ &\quad 0 \\ &= 15 \cdot (4x^3) = 60x^3 \end{aligned}$$

Находим значение производной в точке  $x=1$ :

$$y'(1) = 60 \cdot 1^3 = 60$$

2

*Найти производную функции*

$$y = x^3 \cdot (\sqrt[4]{x} + 1)$$

*и вычислить ее значение в точке  $x=1$ .*

# Решение.

$$\begin{aligned}y' &= (x^3)' \cdot (\sqrt[4]{x} + 1) + x^3 \cdot (\sqrt[4]{x} + 1)' = \\&= 3x^2 \cdot (\sqrt[4]{x} + 1) + \frac{1}{4} \cdot x^3 \cdot x^{-\frac{3}{4}} = \\&= 3x^{\frac{9}{4}} + 3x^2 + \frac{1}{4} \cdot x^{\frac{9}{4}} = \frac{13}{4}x^{\frac{9}{4}} + 3x^2\end{aligned}$$

**Находим значение производной в точке  $x=1$ :**

$$y'(1) = \frac{13}{4} \cdot 1^{\frac{9}{4}} + 3 \cdot 1^2 = \frac{25}{4}$$

3

*Найти производную функции*

$$y = \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x}}$$

*и вычислить ее значение в точке  $x=1$ .*

# Решение.

$$\begin{aligned}y' &= \frac{(x^3 - 1)' \cdot \sqrt{x} - (x^3 - 1) \cdot (\sqrt{x})'}{x} = \\&= \frac{3x^2 \cdot \sqrt{x} - (x^3 - 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}}{x} = \\&= \frac{3x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{x} = \frac{\frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{x}\end{aligned}$$

**Находим значение производной в точке  $x=1$ :**

$$y'(1) = \frac{\frac{5}{2} \cdot 1^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2} \cdot 1^{-\frac{1}{2}}}{1} = 3$$