# *Основные правила и формулы комбинаторики*

Шармин Валентин – кандидат физико-математических наук, доцент, почетный работник высшего профессионального образования РФ

# Определение комбинаторики

- *Комбинаторикой* называется область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций (соединений), подчиненных тем или иным условиям, можно составить из принадлежащих данному конечному множеству элементов.
- При решении задач комбинаторики используют правила суммы и произведения.

# Правило суммы и произведения

- *Правило суммы*. Если некоторый объект *A* можно выбрать  способами *n*, а объект *B* можно выбрать  способами *m* (не такими, как *A)*, то объект «либо *A* , либо *B*» можно выбрать *n+m* способами.
- *Правило произведения*. Если некоторый объект *A*  можно выбрать *n* способами, а после каждого такого выбора объект *B* можно выбрать способами *m* (независимо от выбора объекта *A*), то пару объектов «*A*  *и B*» в указанном порядке можно выбрать *n*m* способами.

# Пример

- В магазине бытовой техники имеется 8 видов электрических чайников и 10 видов микроволновых печей. Сколькими способами можно: а) совершить покупку, состоящую из одного электроприбора;

  б) купить чайник и микроволновую печь?
- а) Электрический чайник можно выбрать 8 способами, а микроволновую печь – 10 способами. Число способов купить один электроприбор (то есть выбрать либо чайник, либо микроволновую печь), по правилу суммы, равно 8+10=18.
- б) Купить чайник и микроволновую печь (то есть выбрать пару объектов) можно, по правилу произведения, способами 8*10=80.

# Перестановки

- *Перестановками* из  различных элементов называются упорядоченные наборы, содержащие данные  элементов.
- Таким образом, одна перестановка отличается от другой только порядком расположения элементов.
- Число перестановок из  элементов обозначается символом  и находится по формуле: $P_n = n!$
  где $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n, 0! = 1.$

# Пример

- Сколькими способами можно расставить 7 различных книг на полке?
- Каждый способ расстановки книг отличается от другого способа лишь порядком расположения книг. Следовательно, число способов равно .

$$P_7 = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 = 5040$$

# Размещения без повторений

- *Размещениями* из  различных элементов по элементов называются упорядоченные наборы, содержащие  элементов из данных .
- Одно размещение отличается от другого либо составом элементов, либо порядком их расположения.
- Число размещений из  элементов по обозначается символом  и находится по формуле: $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}, (k \le n)$

# Пример

- Сколькими способами могут быть распределены золотая, серебряная и бронзовая медали между 16 командами, участвующими в соревнованиях?
- Очевидно, что все возможные тройки призеров отличаются одна от другой либо составом команд, либо порядком их расположения на первом, втором и третьем местах. Значит, число способов равно

$$A_{16}^{3} = \frac{16!}{(16-3)!} = \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 13\cdot 14\cdot 15\cdot 16}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 13} = 14\cdot 15\cdot 16 = 3360$$

# Сочетания

- *Сочетаниями* из различных элементов по элементов называются неупорядоченные наборы, содержащие элементов из данных.
- Сочетания отличаются друг от друга только составом элементов.
- Число сочетаний из элементов по обозначается символом и находится по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, (k \le n)$$

# Пример

- Сколькими способами можно образовать стартовую пятерку из имеющихся в распоряжении тренера 12 баскетболистов?
- Поскольку в данном случае важен лишь состав стартовой пятерки, а порядок ее элементов не имеет значения, то число спо

$$C_{12}^{5}=\frac{12!}{5!(12-5)!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}=\frac{8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}=792$$

# Выборки с повторениями

- Число *размещений с повторениям* $\bar{A}_n^k = n^k$
- Число *сочетаний с повторениям* $\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$
- Если среди элементов есть $n_1$ элементов одного вида, $n_2$ элементов другого вида и т.д., то число *перестановок с п* $P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_{2!} \cdot \ldots \cdot n_{k!}}$

  где $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

# Примеры

- Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 5, 6, 7, если цифры в числе могут повторяться?
- По условию задачи, цифры в числе могут повторяться, значит речь идет о комбинациях с повторениями. Числа различаются не только составом цифр, но и порядком их расположения (например, числа 5567 и 6575 состоят из одних и тех же цифр, записанных в разном порядке).

$$\bar{A}_3^4 = 3^4 = 81$$

# Примеры

- В продажу поступили открытки 15 разных видов. Сколькими способами можно образовать набор из 8 открыток, если в него могут войти одинаковые открытки?
- Так как виды открыток в наборе могут повторяться, а сами наборы отличаются один от другого только своим составом (очевидно, что расположение открыток в наборе не имеет значения), то число таких наборов равно

$$\bar{C}_{15}^{8} = C_{15+8-1}^{8} = \frac{22!}{8! \cdot 14!} = 319770$$

# Примеры

- Сколько различных «слов» (не обязательно имеющих смысл) можно образовать, переставляя буквы в слове КОЛОКОЛ?
- В слове КОЛОКОЛ, состоящем из 7 букв, буква К встречается два раза, буква О – три раза, буква Л – два раза, то есть *n=7,* $n_1=2$, $n_2=3$, $P(2,3,2)=\frac{7!}{2!\cdot 3!\cdot 2!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2}=210$, число «слов» равно

# Задачи

1. Имеется 3 вида конвертов без марок и 9 видов марок одинаковой стоимости. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для посылки письма?
2. На вершину горы ведут 5 тропинок. Сколькими способами турист может подняться в гору и потом спуститься с нее, если подъем и спуск: а) могут проходить по любым тропинкам; б) должны проходить по разным тропинкам?
3. Сколькими способами из 25 членов научного общества учащихся можно выбрать его председателя, заместителя председателя, редактора газеты и секретаря?
4. В отделе НИИ работают 22 человека. Сколькими способами можно выбрать 3 человек для участия в конференции?

# Задачи

5. Сколькими способами можно разместить на скамейке 9 человек?
6. Сколько разных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 при условии, что: а) ни одна цифра не повторяется; б) цифры могут повторяться; в) число оканчивается цифрой 3 и все цифры различны; г) число начинается с цифры 4 и цифры могут повторяться?
7. Сколько различных восьмизначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3.
8. Для несения почетного караула из 10 человек могут быть приглашены офицеры 6 родов войск. Сколькими способами можно назначить состав почетного караула?

# Задачи

9. Сколько различных «слов» можно образовать при перестановке букв слова МАТЕМАТИКА?
10. Из 10 различных книг выбирают 4 для посылки. Сколькими способами это можно сделать?
11. Сколько трехбуквенных «слов» можно составить из букв слова ИНТЕГРАЛ (буквы в «слове» могут повторяться)?
12. Сколько различных «слов» (не обязательно имеющих смысл) можно образовать, переставляя буквы слова: а) ЗАМОК; б) САВАННА; в) ЗАМОК, если буква К должна стоять на первом месте?

# Задачи

13. Студентам надо сдать 4 экзамена за 12 дней. Сколькими способами можно составить расписание экзаменов, если в один день не должно быть двух экзаменов?
14. Сколько различных вариантов хоккейной команды можно составить из 9 нападающих, 5 защитников и 3 вратарей, если в состав команды должны войти 3 нападающих, 2 защитника и 1 вратарь?
15. Имеется 11 наименований товаров. Сколькими способами их можно развезти по трем магазинам следующим образом: 5 наименования – в первый магазин, 4 – во второй, 2 – в третий?
16. Сколькими способами на шахматной доске можно указать: а) две клетки; б) две клетки одного цвета; в) две клетки разного цвета?

# Задачи

17. Из трех инженеров и девяти экономистов должна быть выбрана комиссия в составе семи человек. Сколькими способами может быть составлена комиссия, если в нее должен войти: а) ровно один инженер; б) хотя бы один инженер?
18. Сколько четных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если цифры в числе не должны повторяться?
19. Сколькими способами можно поставить в ряд 6 автомобилей так, чтобы два определенных автомобиля оказались рядом?
20. Сколько автомобильных номеров формата Б ЦЦЦ ББ можно составить, если можно использовать все цифры и те буквы русского алфавита, которые имеют написание, подобное латинским буквам?

# ОТВЕТЫ

- **1**. 27. **2**. а) 25; б) 20. **3**. 303600. **4**. 1540. **5**. 362880. **6**. а) 60; б) 125; в) 12; г) 25. **7**. 560. **8**. 3003. **9**. 151200. **10**. 210. **11**. 512. **12**. а) 120; б) 420; в) 24. **13**. 11880. **14**. 2520. **15**. 6930. **16**. а) 2016; б) 992; в) 1024. **17**. а) 252; б) 756. **18**. 48. **19**. 240. **20**. 1726272.