

Основные свойства треугольников

Выполнил: Вергаскин Алексей



1. Против большей стороны лежит больший угол



Дано: треугольник ABC, $AB > BC$.

Доказать: $\angle C > \angle A$.

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC сторона AB больше стороны AC (рис.1, а)

Докажем, что $\angle C > \angle B$. Отложим на стороне AB отрезок AD, равный стороне AC (рис.1, б). Так как $AD < AB$, то точка D лежит между точками A и B.

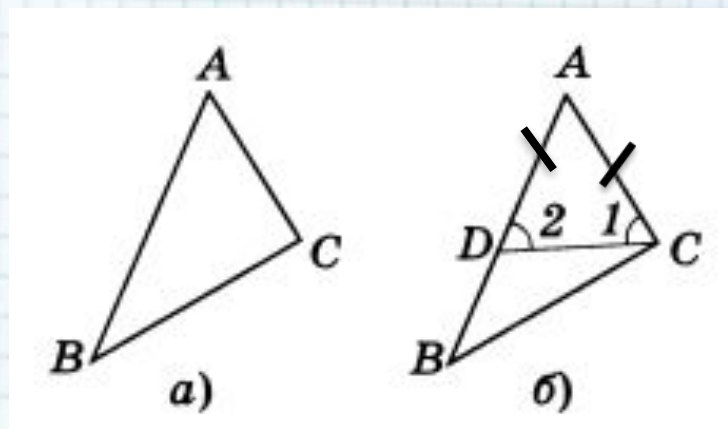
Следовательно, угол 1 является частью угла C и, значит, $\angle C > \angle 1$.

Угол 2 — внешний угол треугольника BDC при вершине D, поэтому $\angle 2 > \angle B$. Углы 1 и 2 равны как углы при основании равнобедренного треугольника ADC. Таким образом, $\angle C > \angle 1$,

$$\begin{aligned}\angle 1 &= \angle 2, \\ \angle 2 &> \angle B.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\angle C > \angle B$.

Итак, в треугольнике: против большей стороны лежит больший угол.



2. Против большего угла лежит большая сторона



Дано: треугольник ABC , $\angle C > \angle A$.

Доказать: $AB > BC$.

Доказательство (методом от противного)

1) Предположим, что $AB > BC$ – неверно.

Тогда либо $AB = BC$, либо $AB < BC$.

2) Если $AB = BC$, то $\triangle ABC$ –

равнобедренный и, значит, $\angle C = \angle A$.

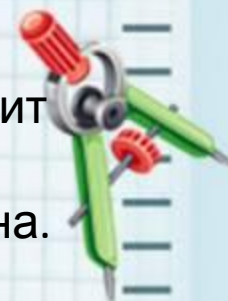
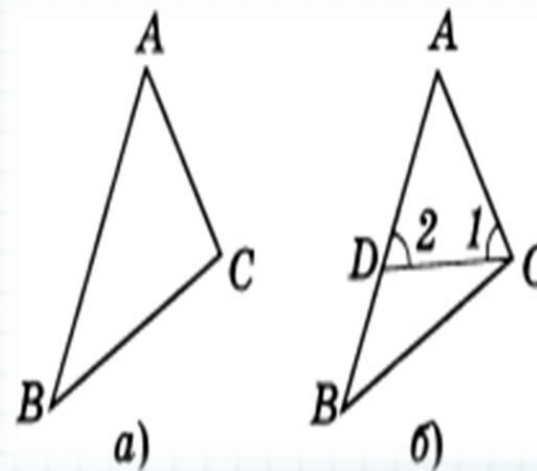
Если $AB < BC$, то $\angle C < \angle A$ по

доказанному раньше.

Получили, что $\angle C = \angle A$ или $\angle C < \angle A$. И то, и другое противоречит условию теоремы, что $\angle C > \angle A$.

3) Получили противоречие с условием теоремы. Значит предположение, что « $AB > BC$ – неверно» – было неверным, значит $AB > BC$.

Итак, в треугольнике против большего угла лежит большая сторона.



3. Против равных углов в треугольнике лежат и равные стороны



Пусть в треугольнике ABC, $\angle A = \angle C$
Докажем, что $AB = BC$, т. е. треугольник ABC
равнобедренный.

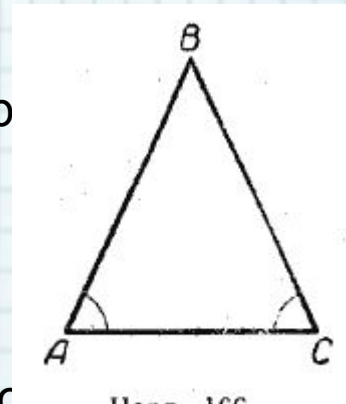
Между сторонами AB и BC может быть только одно из тр
следующих соотношений:

- 1) $AB > BC$;
- 2) $AB < BC$;
- 3) $AB = BC$.

Если бы сторона AB была $> BC$, то $\angle C$ был бы $> A$, но это
противоречит условию теоремы, следовательно, AB не
может быть $> BC$.

Точно так же AB не может быть $< BC$, так как в этом случае
угол C был бы $< A$.

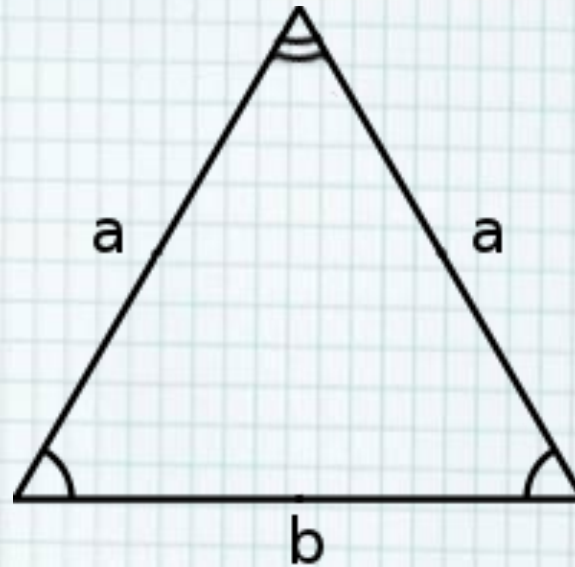
Следовательно, возможен только третий случай, т. е. $AB =$
 BC



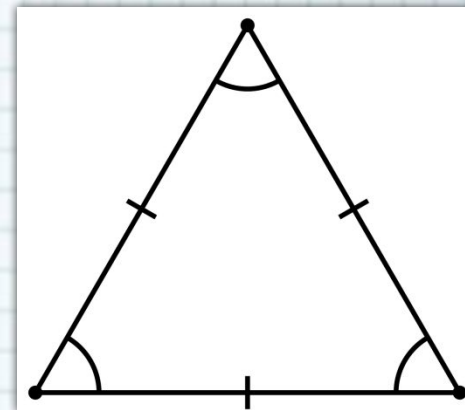
Итак, против равных углов в треугольнике лежат и равные
стороны.

Следствие 1.

Если два угла
треугольника равны,
то треугольник
равнобедренный



Из *следствия 1*
следует, что если три
угла треугольника
равны, то треугольник
равносторонний.



Следствие 2.
В прямоугольном
треугольнике
гипотенуза больше
катета.

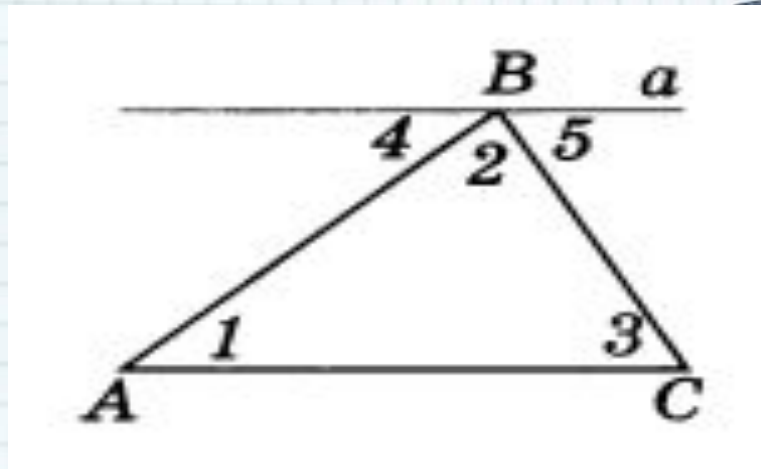


4. Сумма углов треугольника равна 180°



Доказательство.

Рассмотрим произвольный треугольник ABC и докажем, что $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.



1. Проведем через вершину B прямую a, параллельную стороне AC.
2. Углы 1 и 4 являются накрест лежащими углами при пересечении параллельных прямых a и AC секущей AB, а углы 3 и 5 — накрест лежащими углами при пересечении тех же параллельных прямых секущей BC. Поэтому $\angle 4 = \angle 1$, $\angle 5 = \angle 3$.
3. Сумма углов 4, 2 и 5 равна развернутому углу с вершиной B, т. е.

4. Отсюда, получаем:

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ, \text{ или } \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ.$$



4. Продолжая одну из сторон треугольника, получаем внешний угол



Внешний угол треугольника при данной вершине — это угол, смежный с внутренним углом треугольника при этой вершине.

Теорема (о внешнем угле треугольника).

Внешний угол треугольника равен

сумме двух внутренних углов, не

Дано: $\triangle ABC$, $\angle 1$ — внешний угол при вершине C.

Доказать: $\angle 1 = \angle A + \angle B$.

Доказательство:

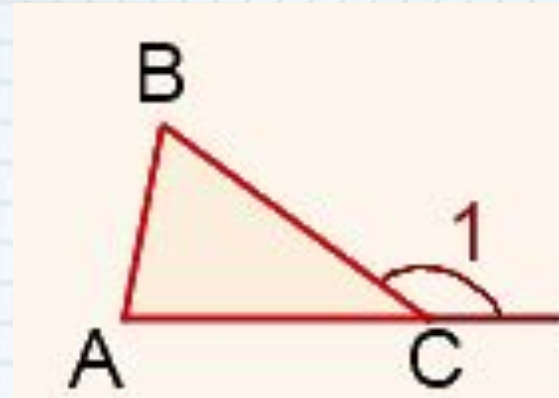
Так как сумма углов треугольника равна 180° , $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.

Следовательно, $\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B)$.

$\angle 1$ и $\angle C$ ($\angle ACB$) — смежные, поэтому их сумма равна 180° ,

значит, $\angle 1 = 180^\circ -$

$\angle C = 180^\circ - (180^\circ - (\angle A + \angle B)) = 180^\circ - 180^\circ + (\angle A + \angle B) = \angle A + \angle B$.



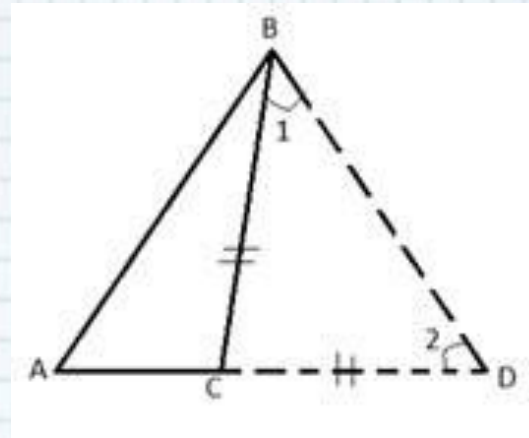
5. Любая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон



Дано: $\triangle ABC$.

Доказать: $AB < AC + CB$.

Доказательство: Проведём $CD = CB$,
 $AC + CD = AD$. $\angle 1 = \angle 2$. В треугольнике ABD
требуется доказать, что $AB < AD$.
 $\angle 2 = \angle 1 < \angle ABD$. Пользуясь теоремой о
соотношении углов и сторон, AB
 $< AD = AC + CB$, что и требовалось доказать.



$$\begin{aligned} a &< b + c \\ b &< a + c \\ c &< a + b \end{aligned}$$

Из теоремы о сумме углов
треугольника следует теорема
о разности сторон
треугольника. **Каждая**
сторона треугольника
больше разности двух
других сторон.

$$\begin{aligned} a &> b - c \\ b &> a - c \\ c &> a - b \end{aligned}$$

