

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное бюджетное государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Уральский государственный педагогический университет»  
Математический факультет  
Кафедра математического анализа

# Теория вероятностей и математическая статистика (ТВиМС).

Часть 3. Основные теоремы теории  
вероятностей. Повторные испытания. Теоремы  
Муавра – Лапласа.

Бодряков Владимир Юрьевич, д.ф.-м.н.  
зав. кафедрой математического анализа МФ УрГПУ

E-mail: [Bodryakov\\_VYu@e1.ru](mailto:Bodryakov_VYu@e1.ru)

Екатеринбург – 2011-2012

# Литература и интернет - ресурсы

1. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей: учебное пособие. М.: Академия, 2003. – 448 с.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие. – М.: Высшее образование, 2006. – 479 с.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие. – М.: Высшее образование, 2006. – 404 с.
4. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. М.: Фазис, 1998. – 144 с.
5. <http://e-lib.uspu.ru>
6. [www.exponenta.ru](http://www.exponenta.ru)

## §1. Основные теоремы теории вероятностей

- Теорема (сложения вероятностей несовместных событий). Вероятность появления хотя бы одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$\bullet \quad P(A + B) = P(A) + P(B).$$

- Док-во: Пусть полное пространство всех возможных исходов испытания  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  состоит из  $n$  элементарных событий. Пусть событию  $A$  благоприятствует  $m_A$  исходов из  $n$ :  $A = \{\omega_{1A}, \omega_{2A}, \dots, \omega_{m_A}\}$ . Пусть событию  $B$  благоприятствует  $m_B$  исходов из  $n$ :  $B = \{\omega_{1B}, \omega_{2B}, \dots, \omega_{m_B}\}$ . При этом в силу несовместности событий  $A$  и  $B$  все  $\omega_{iA}$  и  $\omega_{jB}$  различны. Тогда появлению хотя бы одного из двух несовместных событий  $A, B$  благоприятствует как появление любого исхода из множества элементарных событий  $A$ , так и появление любого исхода из множества элементарных событий  $B$ . Согласно комбинаторному принципу сложения всего таких событий:  $m = m_A + m_B$ . Поэтому,

$$\bullet \quad P(A + B) = \frac{m}{n} = \frac{m_A + m_B}{n} = \frac{m_A}{n} + \frac{m_B}{n} = P(A) + P(B), \quad \underline{\text{ч.т.д.}}$$

## §1. ... продолжение

- **Следствие из теоремы сложения вероятностей несовместных событий.** Вероятность появления хотя бы одного из нескольких попарно несовместных событий  $A, B, C, \dots, N$  равна сумме вероятностей этих событий:

- $$P(A + B + C + \dots + N) = P(A) + P(B) + P(C) + \dots + P(N).$$

- Док-во: *CPC.*

- Пример 1. Найти вероятность выпадения «5» или «6» при бросании одной игральной кости.

- Решение: При бросании одной игральной кости возможны шесть равновероятных исходов, т.е. пространство элементарных событий есть  $\Omega = \{\text{«1»}, \text{«2»}, \text{«3»}, \text{«4»}, \text{«5»}, \text{«6»}\}$ ,  $n = |\Omega| = 6$ . Событию  $A$  – «Выпало 5 очков» благоприятствует единственный исход из  $\Omega$ , т.е.  $P(A) = 1/6$ . Аналогично, событию  $B$  – «Выпало 6 очков» благоприятствует также единственный исход из  $\Omega$ ,  $P(B) = 1/6$ . События  $A$  и  $B$  несовместны. По теореме сложения вероятностей несовместных событий вероятность события  $A + B$  – «Выпало 5 или 6 очков» равна

- $$P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

- Ответ:  $P(A + B) = 1/3$ .

## §1. ... продолжение

- **Теорема о сумме вероятностей событий, образующих полную группу.** Сумма вероятностей событий  $A_1, A_2, \dots, A_k$ , образующих полную группу, равна единице:

- $$P(A_1 + A_2 + \dots + A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k) = 1.$$

- Док-во: Пусть полное пространство всех возможных исходов испытания  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  состоит из  $n$  элементарных событий. События  $A_1, A_2, \dots, A_k$  образуют полную группу, а значит по определению, попарно несовместны и вместе образуют достоверное событие:  $A_1 + A_2 + \dots + A_k = \Omega$ , вероятность которого равна единице. По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

- $$P(A_1 + A_2 + \dots + A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k) = P(\Omega) = 1, \text{ ч.т.д.}$$

- Пример: Найти вероятность выпадения числа очков, не меньшего двух и не большего пяти при бросании одной игральной кости.

- Решение: События  $A_1$  – «Число выпавших очков  $2 \leq S \leq 5$ »,  $A_2$  – « $S = 1$ » и  $A_3$  – « $S = 6$ », как нетрудно проверить, образуют полную группу. При этом события  $A_2$  и  $A_3$  являются элементарными; их вероятности  $P(A_2) = P(A_3) = 1/6$ . Поэтому вероятность сложного события  $A_1$  есть

- $$P(A_1) = 1 - P(A_2) - P(A_3) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

- Ответ:  $P(A_1) = 2/3$ .

## §1. ... продолжение

- **Определение:** Противоположными называют два единственно возможных события, образующих полную группу. Если одно из них обозначено как событие  $A$ , то противоположное к нему принято обозначать как  $\bar{A}$ . Традиционными являются также обозначения  $P(A) = p$ ,  $P(\bar{A}) = q$ .
- **Теорема о сумме вероятностей противоположных событий.** Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:
  - $P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = p + q = 1$ .
- Док-во: *CPC*.
- **Замечание:** Нередко найти вероятность события, противоположного к интересующему нас, т.е.  $P(\bar{A}) = q$ , оказывается проще, чем найти  $P(A) = p$ . Тогда искомую вероятность  $P(A)$  находят как
  - $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ ,
- или
  - $p = 1 - q$ .

## §1. ... продолжение

- Пример 3. Из полного набора костей домино наудачу берут пять. Найти вероятность того, что среди отобранных будет хотя бы одна кость с шестеркой (событие  $A$ ).
- Решение: Как известно, полный набор костей домино содержит 28 костей, причем среди них имеется семь костей, содержащих шестерку, а именно, 6:6, 6:5, 6:4, 6:3, 6:2, 6:1, 6:0.
- Задача, конечно, может быть решена «в лоб». Сложное событие  $A$  может быть представлено как сумма более простых несовместных событий:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5,$$

- где
- $A_1$  – «Среди отобранных 5-ти костей ровно одна содержит шестерку»;
- $A_2$  – «Среди отобранных 5-ти костей ровно две содержат шестерку»;
- .....
- $A_5$  – «Среди отобранных 5-ти костей ровно пять содержат шестерку».
- Число способов извлечь 5 каких-либо костей из полного набора домино составляет

$$n = C_{28}^5.$$

## §1. ... продолжение

- Число возможностей осуществления события  $A_1$  составляет согласно комбинаторному принципу умножения

- $m_1 = C_7^1 \times C_{21}^4$ ,

- т.е. из взятых 5 карт домино 1 – из 7, содержащих шестерку; 4 – из 21, не содержащих шестерки.

- Аналогично, число возможностей осуществления события  $A_2$  равно

- $m_2 = C_7^2 \times C_{21}^3$ ,

- и т.д. Наконец, число возможностей осуществления события  $A_5$  равно

- $m_5 = C_7^5 \times C_{21}^0$ .

- Полное число возможностей осуществления события  $A$  составляет согласно комбинаторному принципу сложения

- $m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5$ .

- Искомая вероятность события  $A$  равна

- $P(A) = m/n$ .



## §1. ... продолжение

- ОДНАКО! Существует гораздо более короткий путь решения задачи. Вычислим вероятность противоположного к событию  $A$  события  $\bar{A}$  – «Среди отобранных пяти костей не будет ни одной кости с шестеркой». Число способов осуществления противоположного события  $\bar{A}$  есть

- $\neg m = C_{21}^5$ ,

- т.е. из взятых 5 карт – все 5 – из 21, не содержащих шестерки.

- Искомая вероятность события  $\bar{A}$  равна

- $P(\bar{A}) = \neg m/n = C_{21}^5/C_{28}^5 \approx 0,207$ .

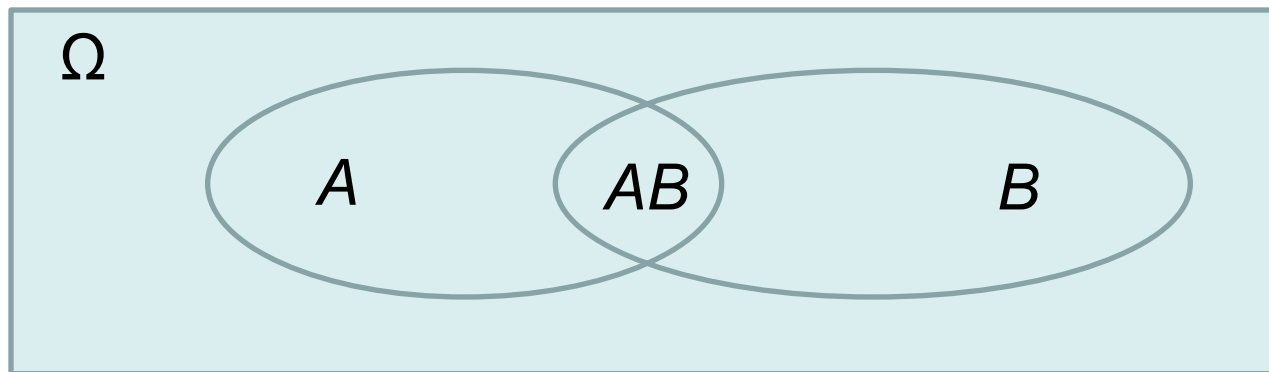
- Соответственно, вероятность искомого («прямого») события равна

- $P(A) = 1 - P(\bar{A}) \approx 0,793$ .

- Ответ:  $P(A) \approx 0,793$ .

## §1. ... продолжение

- **Определение:** Произведением (пересечением) событий  $A$  и  $B$  называется событие  $AB = A \cdot B = A \cap B$ , состоящее в совместном появлении этих событий. Иными словами, событие  $AB$  состоит из элементарных событий, являющихся частью как события  $A \subset \Omega$  (пространство исходов), так и события  $B \subset \Omega$  (см. рис.).

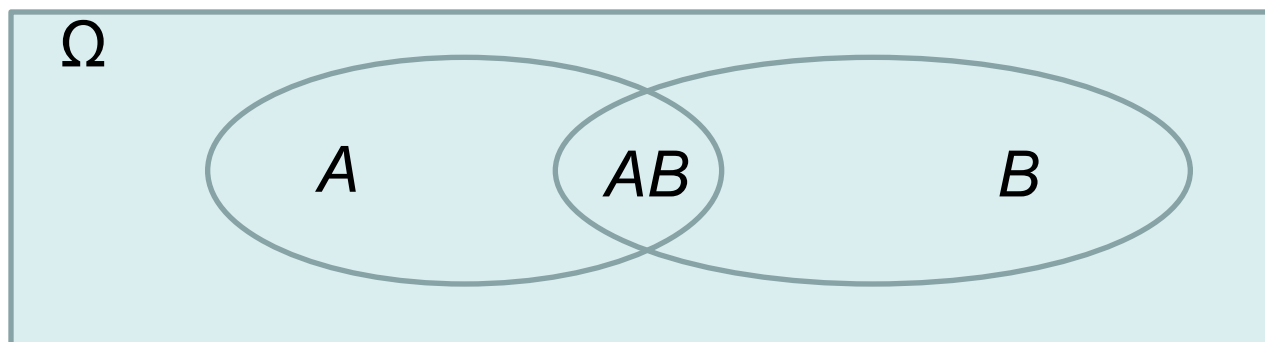


- **Определение:** Произведением (пересечением) событий  $A, B, C, \dots, N$  называется событие  $ABC\dots N$ , состоящее в совместном появлении всех этих событий.
- **Определение:** Условной вероятностью  $P_A(B)$  события  $B$  при условии осуществления события  $A$  называется вероятность события  $B$ , вычисленная в предположении, что событие  $A$  уже наступило.

## §1. ... продолжение

- **Теорема об условной вероятности.** Условная вероятность  $P_A(B)$  события  $B$  при условии осуществления события  $A$  может быть найдена по формуле:

- $$P_A(B) = P(AB)/P(A).$$



- Док-во: Будем считать, что пространство элементарных событий  $\Omega$  состоит из  $n = |\Omega|$  элементов – исходов. Событие  $A \subset \Omega$  состоит из  $m_A + m_{AB}$  исходов («собственные» исходы  $A$  плюс исходы, совместные с событием  $B$ , т.е. благоприятствующие как  $A$ , так и  $B$ )). Событие  $B \subset \Omega$  состоит из  $m_B + m_{AB}$  исходов («собственные» исходы  $B$  плюс исходы, совместные с событием  $A$ ).
- Вероятность события  $AB$  равна по определению вероятности
  - $$P(AB) = m_{AB} / n;$$

## §1. ... продолжение

- вероятность события  $AB$  равна по определению
  - $P(A) = (m_A + m_{AB})/n$ .
- Событию  $B$ , при условии осуществления события  $A$  благоприятствует  $m_{AB}$  исходов из  $m_A + m_{AB}$  (событие  $A$  осуществилось!). Согласно тому же классическому определению вероятности для условной вероятности события  $B$  при условии осуществления  $A$  имеем:
  - $P_A(B) = m_{AB} / (m_A + m_{AB})$ .
- А это, как легко получить, разделив почленно выражения для вероятностей  $P(AB)$  и  $P(A)$ , и есть доказываемый результат:
  - $P_A(B) = P(AB)/P(A)$ , ч.т.д.
- Полученный результат можно обобщить и распространить за пределы классической схемы с конечным числом равновероятных исходов. Вообще, для условной вероятности справедливо следующее
- **Определение:** Условная вероятность  $P_A(B)$  события  $B$  при условии осуществления события  $A$  по определению равна:
  - $P_A(B) = P(AB)/P(A)$ ,  $(P(A) > 0)$ .

## §1. ... продолжение

- **Теорема умножения вероятностей.** Вероятность совместного появления двух событий  $A$  и  $B$  равна произведению (безусловной) вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое уже произошло:

$$\bullet P(AB) = P(A) \cdot P_A(B).$$

- Док-во: Справедливость утверждения теоремы немедленно вытекает из определения условной вероятности  $P_A(B) = P(AB)/P(A)$ , откуда

$$\bullet P(AB) = P(A) \cdot P_A(B), \quad \underline{\text{ч.т.д.}}$$

- **Замечание.** Применив теорему об умножении вероятностей к событию  $BA = AB$ , убеждаемся, что

$$\bullet P(BA) = P(B) \cdot P_B(A) = P(AB) = P(A) \cdot P_A(B).$$

- **Следствие из теоремы умножения вероятностей.** Вероятность совместного появления событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$  равна:

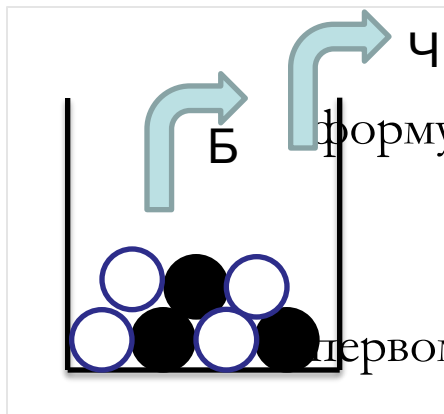
$$\bullet P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdot \dots \cdot P_{A_1 A_2 \dots A_{(n-1)}}(A_n).$$

- В частности, для вероятности совместного осуществления трех событий  $A, B, C$  имеем:

$$\bullet P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C).$$

## §1. ... продолжение

- Пример 4. В урне 4 белых (Б) и 3 черных (Ч) шара. Из урны один за другим вынимают два шара. Найти вероятность появления белого шара при втором испытании (событие  $B$ ), если при первом испытании был извлечен черный шар (событие  $A$ ).
- Решение: Поскольку после первого опыта (извлечен один Ч шар) в урне осталось шесть шаров (4Б + 2Ч), вероятность извлечь Б шар при втором испытании составляет:



$$P_A(B) = 4/6 = 2/3.$$

С другой стороны, согласно общей формуле условной вероятности:

$$P_A(B) = P(AB)/P(A),$$

где вероятность извлечения Ч шара при первом испытании (событие  $A$ ) равна:

$$P(A) = 3/7.$$

- Вероятность извлечения пары шаров в указанном порядке (Ч, затем Б) равна  $P(AB) = C_3^1 \times C_4^1 / A_7^2 = 3 \times 4 / 42 = 2/7$ . Отсюда
  - $P_A(B) = P(AB)/P(A) = (2/7)/(3/7) = 2/3$ , как и ранее.
- Ответ:  $P_A(B) = 2/3$ .

## §1. ... продолжение

- Пример 4. Студент знает 20 вопросов из 25. Какова вероятность, что студент правильно ответит на три предложенных вопроса из 25?
- Решение: *СРС.*
- Ответ:  $P(A) = 57/115 \approx 0,496$ .

- **Определение:** Событие  $B$  называют независимым от события  $A$ , если появление события  $A$  не изменяет вероятности события  $B$ , т.е. если условная вероятность события  $B$  равна его безусловной вероятности:

$$\bullet P_A(B) = P(B).$$

- **Замечание:** При этом и  $P_B(A) = P(A)$ , т.е. свойство независимости событий взаимно.

- Док-во: *СРС.*

- **Следствие из теоремы умножения вероятностей для независимых событий.** Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$\bullet P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

- **Определение:** Два события называются независимыми, если вероятность их совместного появления равна произведению вероятностей этих событий:  $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ .

## §1. ... продолжение

- **Утверждение:** Если события  $A$  и  $B$  независимы, то независимы также события  $A$  и  $\bar{B}$ ,  $\bar{A}$  и  $B$ ,  $\bar{A}$  и  $\bar{B}$ .
- Док-во: Докажем, например, независимость событий  $A$  и  $\bar{B}$ . Имеем
  - $A = AB + A\bar{B}$ ,
- т.е. событие  $A$  происходит либо совместно с событием  $B$ , либо с событием  $\bar{B}$ , противоположным к событию  $B$ . При этом события  $AB$  и  $A\bar{B}$  несовместны, и к ним может быть применена теорема сложения вероятностей несовместных событий с учетом независимости  $A$  и  $B$ :
  - $P(A) = P(AB) + P(A\bar{B}) = P(A) \cdot P(B) + P(A\bar{B})$ .
- Теперь
  - $P(A\bar{B}) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot [1 - P(B)] = P(A) \cdot P(\bar{B})$ .
- Но последнее как раз и означает независимость событий  $A$  и  $\bar{B}$ , ч.т.д.
- Док-во независимости событий  $\bar{A}$  и  $B$ ,  $\bar{A}$  и  $\bar{B}$  – *СРС*.
- **Определение:** Несколько событий называются попарно независимыми, если каждые два из них независимы.
- **Определение:** Несколько событий называются независимыми в совокупности, если независимы каждые два из них и независимы каждое событие и произведение остальных.



## §1. ... продолжение

- Если события  $A$ ,  $B$  и  $C$  независимы, то попарно независимы события  $A$  и  $B$ ,  $A$  и  $C$ ,  $B$  и  $C$ , а также независимы  $A$  и  $BC$ ,  $B$  и  $AC$ ,  $C$  и  $AB$ .
- **Замечание:** Из попарной независимости событий  $A$ ,  $B$  и  $C$  еще не следует их независимость в совокупности.
- Док-во: Пусть полное пространство элементарных событий состоит из четырех равновероятных исходов:  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ ; соответствующие вероятности  $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p = 1/4$ .
- Пусть событие  $A$  состоит из двух элементов:  $A = \{\omega_1, \omega_2\}$ ; аналогично, события  $B$  и  $C$  также двухэлементны:  $B = \{\omega_1, \omega_3\}$ ;  $C = \{\omega_1, \omega_4\}$ . При этом  $P(A) = p_1 + p_2 = 1/4 + 1/4 = 1/2$ . Аналогично,  $P(B) = P(C) = 1/2$ .
- Убедимся в попарной независимости событий  $A$ ,  $B$  и  $C$ :
- $AB = \{\omega_1\} \Rightarrow P(AB) = 1/4 = 1/2 \times 1/2 = P(A) \cdot P(B)$ . Аналогично,
- $AC = \{\omega_1\} \Rightarrow P(AC) = 1/4 = 1/2 \times 1/2 = P(A) \cdot P(C)$ .
- $BC = \{\omega_1\} \Rightarrow P(BC) = 1/4 = 1/2 \times 1/2 = P(B) \cdot P(C)$ .
- Эти равенства и означают попарную независимость событий  $A$ ,  $B$  и  $C$ .
- С др. стороны,  $ABC = \{\omega_1\} \Rightarrow P(ABC) = 1/4 \neq 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ ,
- т.е. события  $A$ ,  $B$  и  $C$  не являются независимыми в совокупности, ч.т.д.

## §1. ... продолжение

- **Следствие из теоремы умножения вероятностей независимых событий:** Если события  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  независимы в совокупности, то
  - $P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \dots \cdot P(A_n)$ .
- Док-во: *CPC*.
- **Замечание:** Если события  $A, B, C, \dots, N$  попарно независимы, то попарно независимыми будут также противоположные к ним события  $\neg A, \neg B, \neg C, \dots, \neg N$ .
- Пример 5. Найти вероятность выпадения в сумме 12 очков при однократном бросании двух игральных кубиков. Изменится ли ответ, если дважды бросается один кубик?
- Решение: *CPC*.
- Ответ:  $P(AB) = 1/36$ .

## §1. ... продолжение

- **Теорема «Вероятность появления хотя бы одного из независимых событий».** Вероятность появления *хотя бы одного* из событий  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ , независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий  $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \dots, \bar{A}_n$ :

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \dots \cdot q_n,$$

- $q_1 = P(\bar{A}_1); q_2 = P(\bar{A}_2); q_3 = P(\bar{A}_3); \dots; q_n = P(\bar{A}_n)$ .
- Док-во: Обозначим через  $A$  интересующее нас событие  $A$  – «В результате испытаний появилось хотя бы одно из независимых в совокупности событий  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ ».
- Противоположным к событию  $A$  является событие  $\bar{A}$  – «В результате испытаний не появилось ни одно из событий  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ , т.е. реализовалась одновременно вся совокупность противоположных событий  $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \dots, \bar{A}_n$ ».
- Вероятность противоположного события, с учетом независимости,
- $P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 \cdot \dots \cdot \bar{A}_n) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_n) = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \dots \cdot q_n$ .
- С другой стороны для вероятностей противоположных событий имеем:  $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ , откуда и вытекает требуемый результат  $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \dots \cdot q_n$ , ч.т.д.

## §1. ... продолжение

- **Следствие:** Если вероятности событий  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  одинаковы:  $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \dots = P(A_n) = q$ , то вероятность появления хотя бы одного события есть:
  - $P(\bar{A}) = 1 - q^n$ .
- **Пример 6:** Вероятность поражения цели первым стрелком  $p_1 = 0,8$ ; вторым —  $p_2 = 0,6$ . Найти вероятность того, что цель будет поражена при одновременном выстреле обоих стрелков (для поражения цели достаточно одного попадания).
- **Решение:** Противоположным к интересующему нас событию  $A$  — «В цель попал по крайней мере один стрелок» является событие  $\bar{A}$  — «В цель не попал ни один из стрелков».
- Вероятность противоположного события, с учетом независимости событий, состоящих в попадании каждого из стрелков, равна:
- $P(\bar{A}) = q_1 \cdot q_2 = (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) = 1 - p_1 - p_2 + p_1 \cdot p_2$ .
- Соответственно, вероятность «прямого» события  $A$  равна:
- $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - q_1 \cdot q_2 = 1 - (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) = p_1 + p_2 - p_1 \cdot p_2 = 0,92$ .
- **Ответ:**  $P(A) = p_1 + p_2 - p_1 \cdot p_2 = 0,92$ .

## §1. ... продолжение

- Пример 7: Вероятность того, что стрелок попадет в цель, равна  $p = 0,4$  при каждом выстреле. Сколько выстрелов должен сделать стрелок, чтобы с вероятностью не менее  $0,9$  он попал в цель хотя бы один раз?
- Решение: Обозначим через  $A_1, A_2, \dots, A_n$  события, состоящие в попадании стрелком при 1-ом, 2-ом, ...  $n$ -ом выстреле. По условию нас интересует вероятность попадания в цель хотя бы один раз при сделанных  $n$  выстрелах (событие  $A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$ ).
- Найдем вероятность противоположного события  $\bar{A}$  – «В цель не попал ни один из  $n$  выстрелов»:  $P(\bar{A}) = q^n$ , где  $q = 1 - p = 0,6$ . Соответственно, вероятность «прямого» события  $A$  равна  $P(A) = 1 - q^n$ . Необходимое число выстрелов  $n$  найдем из условия  $P(A) > 0,9$  (см. табл.):

№ выстрела $n$	$q^n$	$1 - q^n$	Прим.
1	0,6	0,4	
2	0,36	0,64	
3	0,216	0,784	
4	0,1296	0,8704	
5	0,0778	0,9222	> 0,9

- Ответ:  $n = 5$ .

## §1. ... продолжение

- **Теорема сложения вероятностей совместных событий.**  
Вероятность появления (хотя бы) одного из двух совместных событий  $A$  и  $B$  равна сумме их вероятностей без вероятности их совместного появления:
  - $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ .
- Док-во: В силу совместности событий  $A$  и  $B$  их сумма – событие  $A + B$  – наступит при наступлении одного из трех несовместных событий:  $A\bar{B}$ ,  $\bar{A}B$  или  $AB$ :
  - $A + B = A\bar{B} + \bar{A}B + AB$ .
- При этом, очевидно,
  - $A = A\bar{B} + AB$ .
  - $B = \bar{A}B + AB$ .
- С учетом несовместности событий  $A\bar{B}$ ,  $\bar{A}B$ ,  $AB$  классическая теорема о сложении вероятностей дает:
  - $P(A + B) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) + P(AB)$ ;
  - $P(A) = P(A\bar{B}) + P(AB)$ ;
  - $P(B) = P(\bar{A}B) + P(AB)$ .
- Вычитая почленно первое равенство из суммы второго и третьего, получим требуемый результат, ч.т.д.

## §1. ... продолжение

- **Замечание 1.** В доказанной формуле сложения вероятностей совместных событий события  $A$  и  $B$  могут быть как зависимыми, так и независимыми.
- Если события  $A$  и  $B$  зависимы, то  $P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$  и
  - $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P_A(B)$ .
- Если события  $A$  и  $B$  независимы, то  $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$  и
  - $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$ .
- **Замечание 2.** Если события  $A$  и  $B$  несовместны, то  $P(AB) = 0$ , и получаем переход к классической теореме сложения вероятностей:
  - $P(A + B) = P(A) + P(B)$ .
- Пример 8. Два игральных кубика бросили один раз. Какова вероятность того, что «шестерка» выпадет хотя бы один раз?
- Решение: Обозначим: событие  $A$  – «Шестерка выпала на первом кубике»,  $P(A) = \frac{1}{6}$ ; событие  $B$  – «Шестерка выпала на втором кубике»,  $P(B) = \frac{1}{6}$ . События  $A$  и  $B$  совместны и независимы. По теореме о сложении вероятностей совместных и независимых событий:
  - $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{36}$ .
- Ответ:  $P(A + B) = 11/36$ .

## §1. ... продолжение

- **Теорема «Формула полной вероятности».** Вероятность события  $A$ , которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующие условные вероятности события  $A$ :

- $$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A),$$
 –

- формула полной вероятности.

- Док-во: По условию теоремы

- $$A = AB_1 + AB_2 + \dots + AB_n,$$

- причем события  $AB_1, AB_2, \dots, AB_n$  несовместны вследствие несовместности событий  $B_1, B_2, \dots, B_n$ . По теореме сложения вероятностей для несовместных событий

- $$P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + \dots + P(AB_n).$$

- По теореме умножения вероятностей  $P(AB_1) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)$ ,  $P(AB_2) = P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)$ , ...,  $P(AB_n) = P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)$ , откуда и следует формула полной вероятности:

- $$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A), \quad \underline{\text{Ч.Т.Д.}}$$



## §1. ... продолжение

- Пример 9. В первой урне 4 белых (Б.) и 6 черных (Ч.) шаров. Во второй урне – 3 Б. и 7 Ч. шаров. Из наудачу выбранной урны вынимают один шар. Какова вероятность того, что он белый (Б.)?
- Решение: Обозначим: Урна I: 4 Б. + 6 Ч. шаров; урна II: 3 Б. + 7 Ч. шаров. Событию  $A$  – «Из выбранной наудачу урны вынут Б. шар» предшествуют два события  $B_1, B_2$ , образующие полную группу. А именно:  $B_1$  – «Выбрана урна I, и шар вынут из нее»;  $B_2$  – «Выбрана урна II, и шар вынут из нее»;
- Согласно условию одна из урн выбрана случайно (наудачу). Поэтому
  - $P(B_1) = P(B_2) = 1/2$ ;
- как и должно быть,  $P(B_1) + P(B_2) = 1$ . Если выбрана урна I (событие  $B_1$ ), то (условная вероятность вынуть Б. из нее равна:
  - $P_{B_1}(A) = 4/10$ .
- Если выбрана урна II (событие  $B_2$ ), то (условная вероятность вынуть Б. из нее равна:
  - $P_{B_2}(A) = 3/10$ .
- По формуле полной вероятности, полная вероятность события  $A$ :
  - $P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) = 1/2 \cdot (4/10) + 1/2 \cdot (3/10) = 7/20$ .
- Ответ:  $P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) = 7/20$ .

## §1. ... продолжение

- Пример 10. В первой урне 4 белых (Б.) и 6 черных (Ч.) шаров. Во второй урне – 3 Б. и 7 Ч. шаров. Из каждой урны вынимают по одному шару, а затем случайным образом из этой пары шаров выбирают один. Какова вероятность того, что он белый (Б.)?
- Решение: *CPC.*
- Ответ:  $P(A) = 7/20$ .

## §1. ... продолжение

- Пример 11. Вторая смена в цехе производит в два раза меньше изделий, чем первая, а процент брака у нее в 1,5 раза больше. Детали от обеих смен в не рассортированном виде сложены (для предъявления ОТК). Наудачу взятая оттуда деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что она сделана второй сменой?
- Решение: Пусть первая (I) смена произвела  $N$  деталей, причем среди них  $kN$  бракованных; здесь  $k$  – доля (процент) брака.
- Тогда по условию вторая (II) смена произвела  $N$  деталей, причем среди них  $k \cdot N = kN$ .
- Таким образом, среди деталей, произведенных I и II сменами имеется  $kN + kN = (7/4)kN$  бракованных изделий.
- Доля I смены в  $(7/4)kN$  бракованных изделиях составляет
  - $kN / (7/4)kN = 4/7$ .
- Доля II смены в  $(7/4)kN$  бракованных изделиях составляет
  - $kN / (7/4)kN = 3/7$ .
- Это и есть вероятность события  $A$  – «Брак. изделие сделано II сменой».
- Ответ:  $P(A) = 3/7$ .
- Прим. Задачи такого рода подразумевают вычисление *Бейесовской вероятности* некоторого события (см. далее).

## §1. ... продолжение

- **Вероятность гипотез. Формула Бейеса.** Пусть событие  $A$  может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , образующих полную группу. Пусть опыт проведен и событие  $A$  уже фактически наступило. Возникает вопрос, с какой вероятностью событию  $A$  предшествовало событие  $B_1$ , с какой – событие  $B_2$ , ..., с какой, наконец, – событие  $B_n$ ?
- Ответ на поставленный вопрос может быть найден с помощью формулы Бейеса (см. далее).
- **Определение:** Предположения о том, какое из событий полной группы  $B_1, B_2, \dots, B_n$  предопределило появление события  $A$  называются вероятностными (бейесовскими) гипотезами.
- **Определение:** Вероятностями бейесовских гипотез называются соответствующими бейесовскими вероятностями. Иными словами, бейесовскими вероятностями называются условные вероятности  $P_A(B_1), P_A(B_2), \dots, P_A(B_n)$  того, что событие  $A$  осуществилось совместно с событием: либо  $B_1$ , либо  $B_2$ , ..., либо  $B_n$ , соответственно.

## §1. ... продолжение

- Историческая справка:
- Бейес (Байес) Томас
- *English*: Bayes Thomas

*T. Bayes.*



Томас Бейес (Байес, *англ.* Reverend Thomas Bayes [beɪz]) (1702 – 17.04.1761) – английский математик и пресвитерианский священник, член Лондонского королевского общества (1742). Родился в 1702 году в Лондоне. Обучался дома, в 1719 году поступил в Эдинбургский университет. Затем Байес помогал отцу проводить службу, а вскоре, в 30-х годах, сам стал священником в пресвитерианской церкви. В 1752 году он вышел в отставку; умер в 1761 году.

**Достижения:** Математические интересы Байеса относились к теории вероятностей (ТВ). Он сформулировал и решил одну из основных задач этого раздела математики (теорема Бейеса). Работа, посвящённая этой задаче, была опубликована в 1763 году, уже после его смерти. Формула Бейеса, дающая возможность оценить вероятность событий эмпирическим путём, играет важную роль в современной математической статистике (МС) и ТВ. Другая крупная его работа – «Очерки к решению проблемы доктрины шансов». Используется терминология: байесовская вероятность, байесовская оценка решения, и др.

## §1. ... продолжение

- Решение задачи Бейеса (вывод формул(ы) Бейеса): Согласно формуле полной вероятности, полная вероятность события  $A$ , которое может быть реализовано лишь совместно с одним из событий  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , образующих полную группу, равна:

- $$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A).$$

- Пусть, например, событие  $A$  произошло совместно (вследствие) события  $B_1$ . По теореме умножения вероятностей,

- $$P(AB_1) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) = P(A) \cdot P_A(B_1).$$

- Отсюда для условной вероятности события  $B_1$ , при том условии, что событие  $A$  произошло, имеем:

- $$P_A(B_1) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) / P(A).$$

- Аналогично для событий  $B_2, \dots, B_n$  имеем:

- $$P_A(B_2) = P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) / P(A);$$

- .....

- $$P_A(B_n) = P(B_n) \cdot P_{B_n}(A) / P(A).$$

- Выписанные формулы и являются формулами Бейеса. Задача решена.

## §1. ... продолжение

- Пример 12. Число грузовых машин, проезжающих мимо колонки, относится к числу легковых машин как 3:2. Вероятность того, что проезжающая машина будет заправляться равна 0,1 для грузовой машины и 0,2 для легковой. У бензоколонки заправляется машина. Найти вероятность того, что это грузовик.
- Решение: Результатом наблюдения (вероятностного эксперимента) является событие  $A$  – «Машина остановилась для заправки». Событие  $A$  является результатом предшествующих событий полной группы:
  - $B_1$  – «Проезжающая мимо заправки машина – грузовая»;
  - $B_2$  – «Проезжающая мимо заправки машина – легковая».
- По условию, вероятности событий  $B_1$  и  $B_2$  есть:  $P(B_1) = 3/5$ ;  $P(B_2) = 2/5$ .
- Условные вероятности того, что машина остановится для заправки (событие  $A$ ) равны:  $P_{B_1}(A) = 0,1$  (для грузовой машины);  $P_{B_2}(A) = 0,2$  (для легковой машины). Полная вероятность события  $A$  есть:
  - $P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) = (3/5) \cdot 0,1 + (2/5) \cdot 0,2 = 0,7/5$ .
- По формуле Байеса:
  - $P_A(B_1) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) / P(A) = (3/5) \cdot 0,1 / (0,7/5) = 3/7$ ;
  - $P_A(B_2) = P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) / P(A) = (2/5) \cdot 0,2 / (0,7/5) = 4/7$ .
- Ответ: Вероятность того, что заправляется грузовик  $P_A(B_1) = 3/7$ .

## §2. Повторные испытания

- **Определение:** Если производится несколько испытаний, причем вероятность события  $A$  в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называются независимыми относительно события  $A$ .
- **Постановка задачи (схема испытаний Бернулли).** Пусть производится серия из  $n$  независимых относительно события  $A$  испытаний, в каждом из которых событие  $A$  может с одной и той же вероятностью  $p$  появиться или не появиться с вероятностью  $q = 1 - p$ . Требуется найти вероятность  $P_n(k)$  того, что событие  $A$  осуществится ровно  $k$  раз ( $0 \leq k \leq n$ ) и, следовательно, не осуществится  $n - k$  раз.
- **Решение:** Вероятность сложного события, состоящего в том, что событие  $A$  появится ровно  $k$  раз (с вероятностью  $p$ ) и не появится (событие  $\bar{A}$ )  $n - k$  раз (с вероятностью  $q = 1 - p$  раз), равна:
  - $P'_n(k) = P(A \cdot A \cdot \dots \cdot A: k \text{ раз}) \cdot P(\bar{A} \cdot \bar{A} \cdot \dots \cdot \bar{A}: n - k \text{ раз}) = p^k \cdot q^{n-k}$ .
- С учетом, однако, того, что порядок появления события  $A$  безразличен (важно только, чтобы оно произошло ровно  $k$  раз) вероятность  $P'_n(k)$  следует умножить на число перестановок из  $n$  элементов по  $k$  элементов, т.е. на  $C_n^k$ . В результате получаем окончательно выражение, известно как **формула Бернулли**:
  - $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ .



## §2. ... продолжение

- Историческая справка:
- Якоб Бернулли
- *Deutsch*: Jakob Bernoulli

Якоб Берну́лли (нем. Jakob Bernoulli, 27 декабря 1654, Базель, – 16 августа 1705, там же) – швейцарский математик, старший брат Иоганна Бернулли; профессор математики Базельского университета (с 1687 года).

Якоб родился в семье преуспевающего фармацевта Николая Бернулли. Вначале учился богословию, но увлёкся математикой, которую изучил самостоятельно. В 1677 году совершил поездку во Францию для изучения идей Декарта, затем в Нидерланды и Англию, где познакомился с Гуком и Бойлем. Вернувшись в Базель, некоторое время работал частным учителем. В 1684 году женился на Юдит Штупанус (Judith Stupanus), у них родились сын и дочь.

С 1687 года — профессор физики (позже — математики) в Базельском университете. 1684: штудирует первый мемуар Лейбница по анализу и становится восторженным адептом нового исчисления. Пишет письмо Лейбницу с просьбой разъяснить несколько тёмных мест. Ответ он получил только спустя три года (Лейбниц тогда был в командировке в Париже); за это время Якоб Бернулли самостоятельно освоил дифференциальное и интегральное исчисление, а заодно приобщил к нему брата Иоганна. По возвращении Лейбниц вступает в активную и взаимно-полезную переписку с обоими. Сложившийся триумвират — Лейбниц и братья Бернулли — 20 лет возглавлял европейских математиков и чрезвычайно обогатил новый анализ. 1699: оба брата Бернулли избраны иностранными членами Парижской Академии наук. В честь Якоба и Иоганна Бернулли назван кратер Bernoulli на Луне.

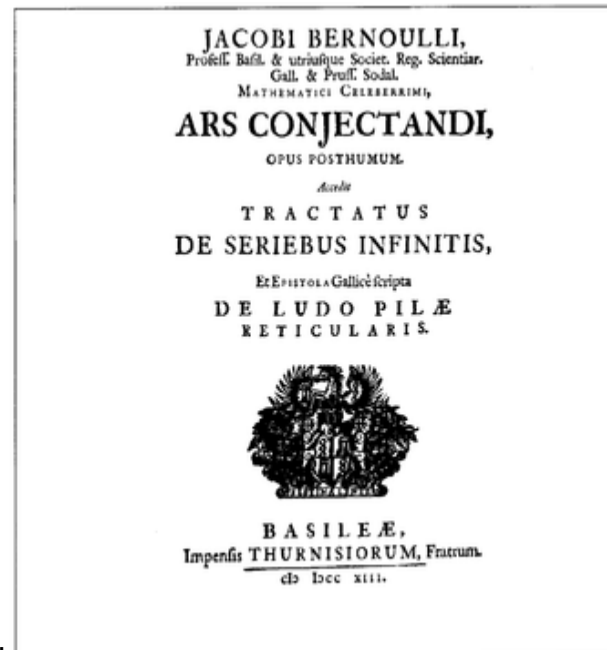


## §2. ... продолжение

- Историческая справка: Якоб Бернулли (продолжение)

**Научная деятельность:** Первое триумфальное выступление молодого математика относится к 1690 году. Якоб решает задачу Лейбница о форме кривой, по которой тяжелая точка опускается за равные промежутки времени на равные вертикальные отрезки. Лейбниц и Гюйгенс уже установили, что это полукубическая парабола, но лишь Якоб Бернулли опубликовал доказательство средствами нового анализа, выведя и проинтегрировав дифференциальное уравнение. При этом впервые появился в печати термин «интеграл». Якоб Бернулли внёс огромный вклад в развитие аналитической геометрии и зарождение вариационного исчисления. Его именем названа лемниската Бернулли. Он исследовал также циклоиду, цепную линию, и особенно логарифмическую спираль. Якобу Бернулли принадлежат значительные достижения в теории рядов, дифференциальном исчислении, теории вероятностей и теории чисел, где его именем названы «числа Бернулли».

«Искусство предположений». Он изучил теорию вероятностей по книге Гюйгенса «О расчётах в азартной игре», в которой ещё не было определения и понятия вероятности (её заменяет количество благоприятных случаев). Якоб Бернулли ввёл значительную часть современных понятий теории вероятностей и сформулировал первый вариант закона больших чисел. Якоб Бернулли подготовил монографию в этой области, однако издать её не успел. Она была напечатана посмертно, в 1713 году, его братом Николаем, под названием «Искусство предположений». Это содержательный трактат по теории вероятностей, статистике и их практическому применению, итог комбинаторики и теории вероятностей XVII века. Имя Якоба носит важное в комбинаторике распределение Бернулли. Якоб Бернулли издал также работы по различным вопросам арифметики, алгебры, геометрии и физики.

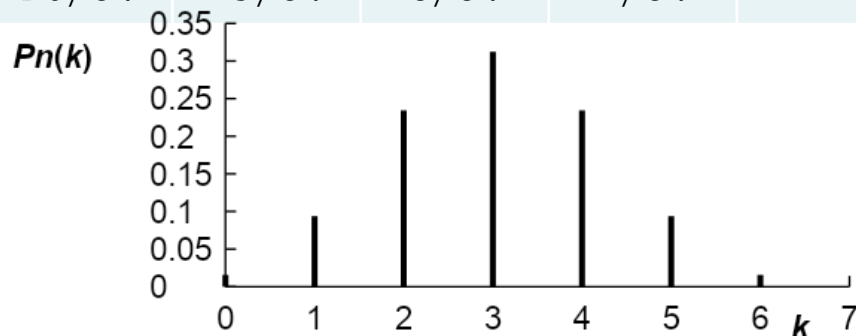


## §2. ... продолжение

- Пример 13. Монета брошена  $n = 6$  раз. Найти вероятность того, что герб выпадет  $k$  ( $k = 0, 1, \dots, 6$ ) раз.
- Решение: При каждом очередном бросании монеты событие  $A$  – «Выпал герб (Г.)» может осуществиться с вероятностью  $p =$  и не осуществиться с вероятностью  $q = 1 - p =$ . Ясно, что событие  $A$  является независимым относительно испытаний. Иными словами, испытания осуществляются по схеме Бернулли.
- Согласно формуле Бернулли, вероятность того, что из  $n$  бросаний Г. выпадет ровно  $k$  раз равна:
  - $P_6(k) = C_6^k \cdot p^k \cdot q^{6-k} = C_6^k \cdot ()^k \cdot ()^{6-k} = C_6^k \cdot ()^6.$
- Результаты расчетов удобно свести в таблицу:

$k$	0	1	2	3	4	5	6	$\sum_k P_6(k)$
$P_6(k)$	1/64	6/64	15/64	20/64	15/64	6/64	1/64	1

- Ответ: См. табл. и рис.



## §3. Теоремы Муавра – Лапласа

- Выше была выведена формула Бернулли:
  - $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k},$
- позволяющая в рамках схемы испытаний Бернулли вычислить вероятность того, что событие  $A$  появится в  $n$  испытаниях ровно  $k$  раз. При больших  $n$  формулой Бернулли пользоваться неудобно: это связано с математическими трудностями вычисления очень больших чисел  $C_n^k$ , с одной стороны, и очень малых чисел  $p^k$  и  $q^{n-k}$ , с другой стороны.
- Существует, однако, возможность пользоваться приближенной (асимптотической) формулой, следующей из точной формулы Бернулли.
- **Определение:** Функцию  $\varphi(x)$  называют асимптотическим приближением функции  $f(x)$ , если
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 1.$
- **Примечание.** Для частного случая, а именно, для  $p = \frac{1}{2}$ , асимптотическая формула была найдена в 1730 г. Муавром. В 1783 г. Лаплас обобщил формулу Муавра для произвольного  $0 < p < 1$ .

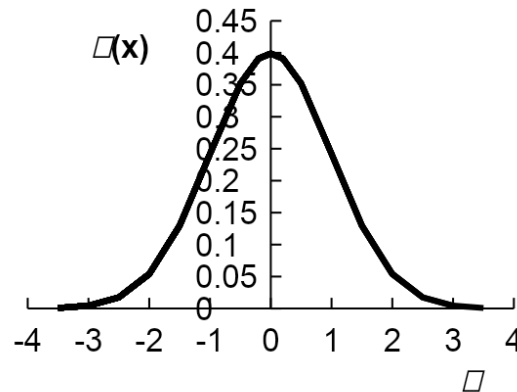
## §3. Теоремы Муавра – Лапласа

- **Локальная теорема Муавра – Лапласа.** Если вероятность  $p$  появления события  $A$  в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы ( $0 < p < 1$ ), то вероятность  $P_n(k)$  того, что событие  $A$  появится в  $n$  испытаниях ровно  $k$  раз, приближенно равна

- $$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

- где функция  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$  (см. рис.), а ее аргумент  $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ .

- Док-во: Не приводится.



- **Примечание 1.** Асимптотическое выражение для вероятности  $P_n(k)$  рекомендуется применять при  $n > 100$  и  $npq > 20$ .
- **Примечание 2.** Функция  $\varphi(x)$  является четной, т.е.  $\varphi(x) = \varphi(-x)$ .

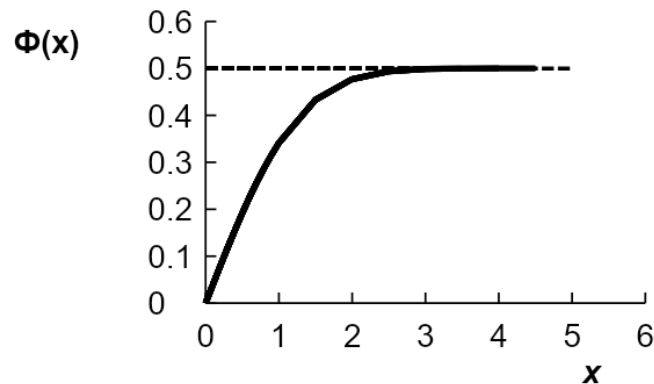
### §3. Теоремы Муавра – Лапласа

- **Интегральная теорема Муавра – Лапласа.** Если вероятность  $p$  появления события  $A$  в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы ( $0 < p < 1$ ), то вероятность  $P_n(k_1 \leq k \leq k_2)$  того, что событие  $A$  появится в  $n$  испытаниях от  $k_1$  до  $k_2$  раз, приближенно равна

- $$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

- где функция Лапласа  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$  табулирована (см. рис.), а ее аргумент  $x_i = \frac{k_i - np}{\sqrt{npq}}$ .

- Док-во: Не приводится.



- **Примечание 1.** Функция  $\Phi(x)$  является нечетной, т.е.  $\Phi(x) = -\Phi(-x)$ .
- **Примечание 2.** Функция  $\Phi(0) = 0$ ;  $\Phi(x \rightarrow \infty) = \frac{1}{2}$ . С высокой точностью можно считать, что  $\Phi(x \geq 5) = \frac{1}{2}$ .

Спасибо за внимание!  
Данный раздел закончен.

Ваши вопросы, замечания,  
предложения ...