Дидактический материал
тема: «Тригонометрические функции»

Пояснительная записка

В результате изучения курса математики учащиеся должны понимать, что функция – математическая модель, позволяющая описывать и изучать разнообразные зависимости между реальными величинами, уметь логически мыслить, проявлять творческие способности на уровне, необходимом для продолжения образования и для самостоятельной деятельности.

Данные дидактические материалы рассчитаны для курса математики 10 класса, обучающего по учебнику Алимов Ш.А. «Алгебра и начала анализа» по основной программе с учетом стандартов основного общего образования по математике.

После пройденного курса учащиеся должны знать:

- Определение области определения и множества значений функции, в том числе тригонометрических функций;
- Определение четности и нечетности функции, периодичности тригонометрических функций;
- Понятие функции косинуса, схему исследования функции $y = cos\ (x)$ и её свойства;
- Понятие функции синуса, схему исследования функции $y = sin\ (x)$ и её свойства;
- Понятие функции тангенса и котангенса, схему исследования функции $y = tg\ (x)$ и $y = ctg\ (x)$ и их свойства;
- Какие функции являются обратными тригонометрическими, иметь представление об их графиках и свойствах.

После изучения практического материала учащиеся должны уметь:

- Находить область определения и область значений тригонометрических функций;
- Находить период тригонометрических функций, исследовать их на четность и нечетность;
- Строить графики функций $y = \cos(x)$, $y = \sin(x)$, $y = tg(x)$ и $y = ctg(x)$;
- Находить по графикам промежутки возрастания и убывания, промежутки постоянных знаков, наибольшее и наименьшее значения функций;
- Преобразование графиков: параллельный перенос, симметрия относительно начала и осей координат, растяжение и сжатие вдоль осей координат;
- Решать задачи с использованием свойств обратных тригонометрических функций;
- Использовать свойства функции для сравнения и оценки её значений.

§ 38. «Область определения и множество значений тригонометрических функций».

Цель:

Знать: Определение области определения и множества значений функции, в том числе тригонометрических функций.

Уметь: Находить область определения и область значений тригонометрических функций.

Урок 1-3.

Справочный материал:

Функция	Область определения *Д (y)*	Множество значений *E (y)*
y = sin (x)	*R*	*-1 ≤ y ≤ 1*
y = cos (x)	*R*	*-1 ≤ y ≤ 1*
y = tg (x)	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi \cdot n, n \in Z$	*R*
y = ctg (x)	$x \neq \pi \cdot n, n \in Z$	*R*

Тренировочный тест

1. Найдите область определения функции *y = √cos (x).*

а) $x \in R$; б) $x \geq 0$; в) $2\pi \cdot n \leq x \leq \pi + 2\pi \cdot n, n \in Z$;

г) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n, n \in Z \cdot$

2. Найдите множество значений функции *y = 3 - 5·sin(x).*

а) [-8; 8]; б) [-2; 8]; в) [-2; 5]; г) [-5; 2].

3. Чему равно наименьшее значение функции *y = sin (x) · cos (x)?*

а) -1; б) -2; в) -1/2; г) 1.

4. Чему равно наибольшее значение функции $y = \sin^2 x - \cos^2 x$?

а) 0; б) 1; в) -1; г) 2.

Тренажер №1

Найти область определения функции:

В – 1

1. $y = ctg\, x$
2. $y = tg\, 2x$
3. $y = tg\, x + ctg\, x$
4. $y = \dfrac{1}{\cos\frac{x}{2}}$
5. $y = \dfrac{1}{2 + \sin x}$

В – 2

1. $y = 3tg\, x$
2. $y = 2 \cdot tg\,\dfrac{x}{2}$
3. $y = \dfrac{1}{\sin 2x}$
4. $y = \dfrac{1}{\sin 3x} + \dfrac{1}{\cos 3x}$
5. $y = \dfrac{1}{1 - \cos x}$

В – 3

1. $y = tg\,\dfrac{x}{2} + ctg\,\dfrac{x}{2}$
2. $y = \dfrac{1}{tg(x)}$
3. $y = \dfrac{3}{1 + \sin x}$
4. $y = \dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{1 + \sin x}$
5. $y = tg(x) + \dfrac{1}{ctg(x) + 1}$

Самостоятельная работа

1. Найдите область определения функции:

а) $y = \dfrac{\sqrt{16 - x^2}}{x - 2}$

а) $y = \sqrt{x^2 - 25}$

б) $y = 0{,}5 \cdot \cos x$

б) $y = 3 \cdot \sin x$

в) $y = tg\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

в) $y = tg\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

2. Найдите множество значений функции:

$y = (\cos x - \sin x)^2$

$y = (\cos x + \sin x)^2$

§ 39. «Четность, нечетность, периодичность тригонометрических функций».

Цель:

Знать: Определение четности и нечетности функции, периодичности тригонометрических функций.

Уметь: Находить период тригонометрических функций, исследовать их на четность и нечетность.

Справочный материал:

Функция	Четность	Период
$y = sin\ x$	Нечетная	2П
$y = cos\ x$	Четная	2П
$y = tg\ x$	Нечетная	П
$y = ctg\ x$	Нечетная	П

Тренировочный тест.

1. Какая из функций является четной?

А. $y = \sin x$ Б. $y = tg(x)$ В. $y = \cos x$ Г. $y = ctg(x)$

2. Какая из функций является нечетной?

А. $y = \cos x + 1$ Б. $y = 2 \cdot tg(x-3)$ В. $y = \sin^2 x$ Г. $y = \frac{1}{2}\sin 2x$

3. Какая из функций не является четной, не является нечетной?

А. $y = \sin x + 2$ Б. $y = \cos x \cdot \sin x$ В. $y = 2\sin(\pi - x)$ Г. $y = |tg(x)|$

4. Найдите наименьший положительный период функции $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

А. π Б. 2π В. $\frac{11\pi}{6}$ Г. $\frac{5\pi}{6}$

5. Какая из функций имеет период 2*П*?

А. $y = \sin\frac{x}{2}$ Б. $y = tg(x)$ В. $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ Г. $y = 2 \cdot ctg(x)$

Диктант

В – 1

1. Функция *f(x)* периодическая с периодом 8. Запишите вытекающее отсюда равенство.
2. Каков наименьший положительный период функции *y=tg x* ?
3. Является ли число 3,14 периодом синуса?
4. Каков наименьший положительный период функции

$$y = \cos\frac{x}{2}$$

5. Каков наименьший положительный период функции

$$y = 5 + \sin x$$

В – 2

1. Функция *g(x)* периодическая с периодом 6. Запишите вытекающее отсюда равенство.
2. Каков наименьший положительный период функции *y=cos x* ?
3. Является ли число 3,14 периодом котангенса?
4. Каков наименьший положительный период функции

$$y = 6 - \sin x$$

5. Каков наименьший положительный период функции

$$y = \cos 4x$$

Домашняя тренировочная работа

В – 1	В – 2	В – 3

1. Найдите значение *sin α*, если:

В – 1	В – 2	В – 3
а) $\sin(\alpha + 2\pi) = 0{,}2$	а) $\sin(\alpha + 6\pi) = 0{,}6$	а) $\sin(4\pi - \alpha) = 0{,}3$

2. Найдите значение *tg α*, если:

В – 1	В – 2	В – 3
а) $tg(\alpha - \pi) = 0{,}5$	а) $tg(\alpha + 5\pi) = -100$	а) $tg(3\pi - \alpha) = 10$

3. Найдите наименьший положительный период функции:

В – 1	В – 2	В – 3
а) $y = 2 \cdot \sin 2x$	а) $y = 2 \cdot \cos 4x$	а) $y = \sin(-2x)$
б) $y = tg(2x)$	б) $y = \sin \frac{1}{2} x$	б) $y = \cos \frac{x}{3}$

4. Найдите наименьший положительный период функции:

В – 1	В – 2	В – 3
а) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$	а) $y = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$	а) $y = \frac{1}{2} \cdot tg\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$
б) $y = \sin \frac{x}{2} + tg(x)$	б) $y = \sin 2x + \cos x$	б) $y = \lvert\cos x\rvert$

5. Является ли периодической функция:

В – 1	В – 2	В – 3
а) $y = x - \sin x$	а) $y = tg(x) + 2$	а) $y = 2x \cdot \cos x$

Тренажер №2

I. Периодичность тригонометрических функций.

1) Для данной функции найдите наименьший положительный период:

В – 1	В – 2	В – 3	В – 4
1. $y=\sin 3t$	1. $y=\cos 4t$	1. $y=tg5t$	1. $y=ctg\frac{2}{3}t$
2. $y=tg\frac{3t}{2}$	2. $y=4\cdot\sin\frac{t}{5}$	2. $y=tg\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$	2. $y=3\cdot\sin\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$
3. $y=\cos\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$	3. $y=\sin\left(2t-\frac{\pi}{3}\right)$	3. $y=\sin\frac{x}{2}+\cos 2x$	3. $y=\sin 3x+2\cdot\cos 5x$

II. Четность тригонометрических функций.

2) Исследуйте функцию на четность:

В – 1	В – 2	В – 3	В – 4
1. $y=\cos 2t$	1. $y=-\sin t$	1. $y=ctg3t$	1. $y=tg\frac{t}{2}$
2. $y=1-tg(t)$	2. $y=t-\sin t$	2. $y=1-tg^2t$	2. $y=\frac{\sin t}{t}$
3. $y=\sin t^2$	3. $y=2t\cdot\cos 2t$	3. $y=\frac{1}{1-2\cdot\sin t}$	3. $y=\cos(\sin t)$

III. Монотонность тригонометрических функций.

3) Вставьте пропущенный знак: <, > или = между значениями тригонометрических функций:

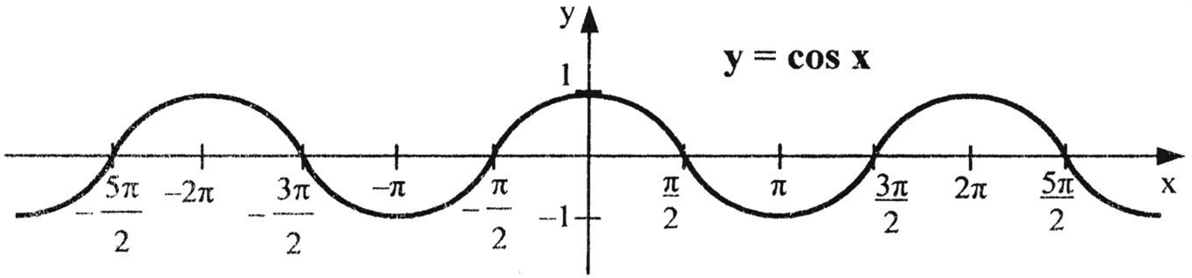
В – 1	В – 2	В – 3	В – 4
1. $\sin 25^\circ....\sin 75^\circ$	1. $\cos 40^\circ....\cos 80^\circ$	1. $\sin 20^\circ....\sin 166^\circ$	1. $\cos 20^\circ....\cos(-40^\circ)$
2. $\cos\frac{5\pi}{7}....\cos\frac{\pi}{7}$	2. $\sin\frac{3\pi}{7}....\sin\frac{4\pi}{7}$	2. $\sin\frac{3\pi}{7}....\sin\frac{8\pi}{7}$	2. $\cos\frac{\pi}{7}....\cos\frac{6\pi}{7}$
3. $\sin 150^\circ....\cos 150^\circ$	3. $\cos 130^\circ....\sin 130^\circ$	3. $\sin 3{,}14....\sin 3$	3. $\cos 5....\cos 6$

§ 40. «Свойства функции *y=cos x* и её график».

Знать: Понятие функции косинуса, схему исследования функции *y=cos x* (ее свойства).

Уметь: Строить график функции *y=cos x,* находить по графику промежутки возрастания и убывания, промежутки постоянных знаков, наибольшее и наименьшее значения функции.

График функции построить на двойном листочке в клеточку, приняв 2 клетки по оси Oy за 1, 3 клетки по оси Ox – $\frac{\pi}{2}$.



Свойства функции y = cos x.

1. Область определения – множество R.
2. Множество значений – отрезок [–1; 1].
3. Функция периодическая с периодом 2π.
4. Функция четная.
5. $y = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$.
6. $y > 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), \quad n \in Z$.

   $y < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), \quad n \in Z$.
7. Наибольшее значение $y = 1$ при $x = 2\pi n, \; n \in Z$.

   Наименьшее значение $y = -1$ при $x = \pi + 2\pi n, \; n \in Z$.
8. Функция возрастает при $x \in [\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n], \quad n \in Z$;

Самостоятельная работа

В – 1.

1. Изобразите схематически график функции *y=3·cos(x)*. Отметьте на графике три точки, для которых *y=1,5.* Чему равны соответствующие значения *x*?
2. Запишите наименьший положительный период функции $y = \cos\frac{3x}{2}$.
3. Запишите промежутки возрастания и убывания функции $y = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$.
4. Для функции $y = \frac{1}{2}\cos 2x$ найдите:

   а) область определения; б) множество значений; в) нули функции.

В – 2.

1. Изобразите схематически график функции $y = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

Отметьте на графике три точки, для которых *y=-0,5*. Чему равны соответствующие значения *x*?

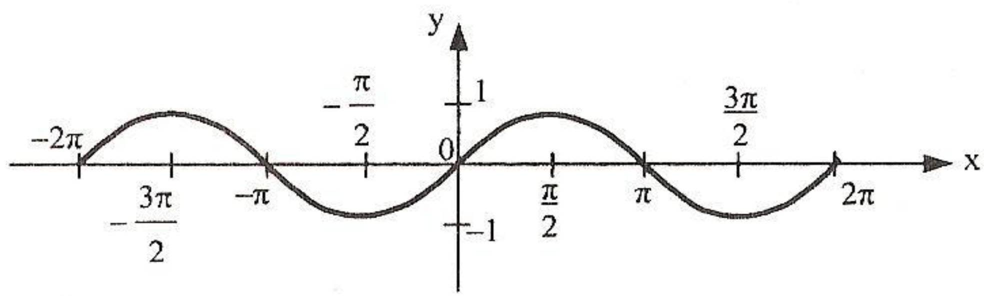
2. Запишите наименьший положительный период функции *y=0,5·cos(0,5x)*.
3. Найдите, в каких точках функция *y=3·cos(x) – 2* достигает своего наибольшего значения?
4. Начертите график функции *y=cos(x)* на отрезке [-*П; 2,5П*]. Отметьте на этом графике множество точек, для которых выполняются условия: а) *cos(x) = 1;* б) *cos(x)* > *0,5*. Выпишите соответствующие значения *x*, при которых выполняется каждое из условий.

§ 41. «Свойства функции *y=sin x* и её график».

Знать: понятие функции синуса, схему исследования функции *y=sin x* (ее свойства).

Уметь: Строить график функции *y=sin x*, находить по графику промежутки возрастания и убывания, промежутки постоянных знаков, наибольшее и наименьшее значения функции.

График функции y = sin x



Свойства функции y = sin x.

1. Область определения – множество R.
2. Множество значений – отрезок [–1; 1].
3. Функция периодическая с периодом 2π.
4. Функция нечетная.
5. $y = 0$ при $x = \pi n,\ n \in Z$.
6. $y > 0$ при $x \in (2\pi n;\quad \pi + 2\pi n);\quad n \in Z$.

   $y < 0$ при $x \in (\pi + 2\pi n;\quad 2\pi + 2\pi n);\quad n \in Z$.
7. Наибольшее значение $y = 1$ при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n;\quad n \in Z$.

   Наименьшее значение $y = -1$ при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\quad n \in Z$.
8. Функция возрастает при $x \in [-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n],\ n \in Z$.

   Функция убывает при $x \in [\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n],\ n \in Z$.

Проверочная работа

В – 1.

1. Изобразите схематически график функции *y = sin(x)*. Отметьте на графике три точки, для которых *y = 1.* Чему равны соответствующие значения *x*?

2. Запишите промежутки возрастания и убывания функции $y=\frac{1}{2}\sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};2\pi\right]$

В – 2.

1. Запишите наименьший положительный период функции $y=\sin\frac{x}{3}$.

2. Найдите наибольшие и наименьшие значения функции $y=\frac{1}{3}\sin(x)-1$

3. Сравните числа *sin1* и *sin3.*

В – 3.

Для функции *y = 2·sin(3x)* найдите:

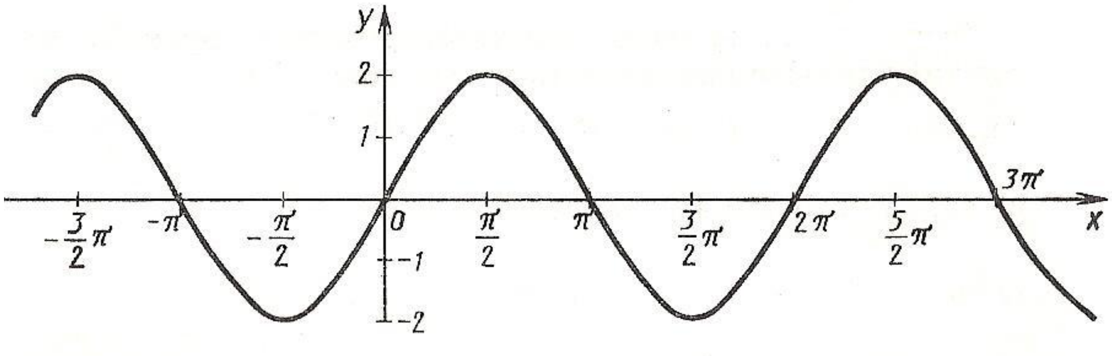
а) область определения; б) множество значений; в) нули функции; г) промежутки знакопостоянства; д) наибольшее и наименьшее значения; е) промежутки возрастания и убывания. Постройте этот график.

В – 4.

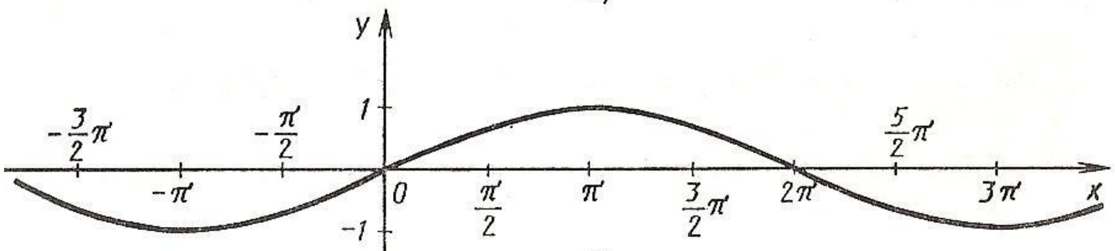
Начертите график функции *y = sin(x)* на отрезке [-*П; 2,5П*]. Отметьте на этом графике множество точек, для которых выполняются условия: а) *sin(x) = 1;* б) *sin(x) = 0,5*; в) *sin(x) > 0,5.* Выпишите соответствующие значения *x*, при которых выполняется каждое из условий.

Работа в группах по графикам

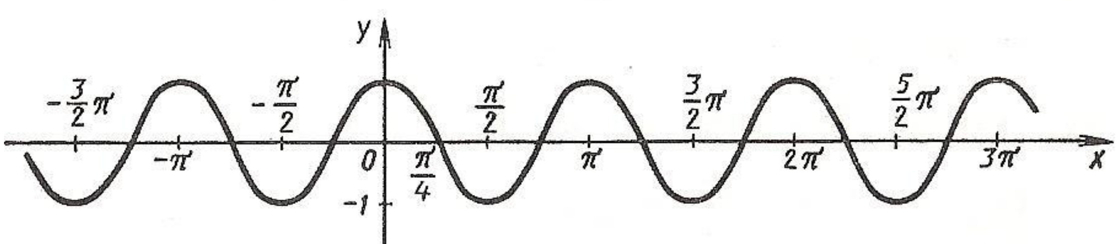
185. Определите, график какой тригонометрической функции изображен на рисунке 12, *а – в*.



а)



б)



в)

1. Каковы значения *x*, для которых *f(x)* = 0, *f(x)* < 0, *f(x)* > 0?
2. Каковы промежутки возрастания и убывания функции?
3. Укажите значения *x*, при которых функция имеет максимум или минимум.
4. Обратима ли функция на *R*?

Тренировочная работа

1. Для функции *y = sin(x)* укажите на отрезке [0; *2П*] промежутки, в которых эта функция: а) возрастает; б) убывает; в) положительна; г) отрицательна.
2. При каких значениях *x* на [0; *2П*) функция принимает наибольшее значение и чему оно равно:
   а) *y = 3 + cos(x);* б) *y = 2 - sin(x)*?
3. При каких значениях *x* на [0; *2П*) функция принимает наименьшее значение и чему оно равно:
   а) *y = 3 + cos(x);* б) *y = 2 - sin(x)*?
4. Существует ли такое значение *x* из интервала (0; *П*), при котором функция *y = tg(x)* принимает своё наибольшее значение?

Диктант

В – 1 [В – 2].

1. Какова область определения [значений] синуса?
2. Какова область значений [определения] тангенса?
3. Является ли функция $y = \cos(x)$ [$y = tg(x)$] нечетной?
4. Каков наименьший положительный период функции $y = tg(x)$ [$y = \sin(x)$] ?
5. Укажите нули функции $y = \sin(x)$ [$y = tg(x)$].
6. Укажите промежутки, на которых тангенс положителен [косинус отрицателен].
7. Выяснить возрастает или убывает функция $y = \cos(x)$ [$y = \sin(x)$] на промежутке $\left[2\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Тренажер №3

Постройте график функции:

В – 1	В – 2	В – 3
1. $y = \cos 2x$	1. $y = -\sin 2x$	1. $y = 0{,}5\cos x$
2. $y = 2\sin\frac{x}{2}$	2. $y = -2\sin 2x$	2. $y = \sin x - 2$
3. $y = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)$	3. $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$	3. $y = 3\sin 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

§ 42. «Свойства функции *y = tg (x)* и её график».

Знать: понятие функции тангенса, схему исследования функции *y = tg (x)* (ее свойства); понятие функции котангенса, схему исследования функции *y = ctg (x)* (ее свойства).

Уметь: строить графики функций *y = tg (x)*, *y = ctg (x)*, находить по графику промежутки возрастания и убывания, промежутки знакопостоянства, наибольшие и наименьшие значения функции.

$y = \operatorname{tg} x$

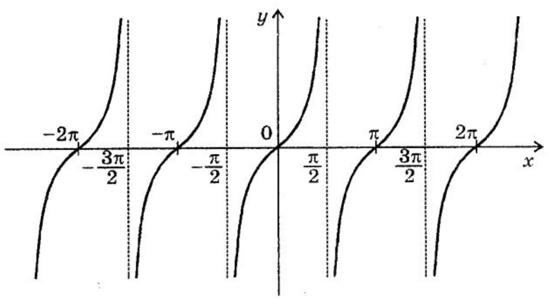


график — тангенсоида

СВОЙСТВА ФУНКЦИИ

- *Область определения:* $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), \quad n \in Z$
- *Область значений:* $y \in R$
- *Нули:* $y = 0$ при $x = \pi n, \quad n \in Z$
- *Промежутки знакопостоянства:*

  $\operatorname{tg} x > 0$ при $x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), \quad n \in Z$

  $\operatorname{tg} x < 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right), \quad n \in Z$
- *Экстремумов* нет
- *Промежутки монотонности:*

  функция возрастает на каждом интервале области определения
- *Четность, нечетность:* функция нечетная
- *Асимптоты:* $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

$y = \operatorname{ctg} x$

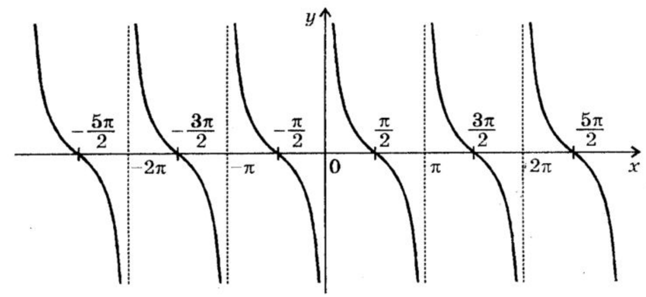


График — котангенсоида

СВОЙСТВА ФУНКЦИИ

- *Область определения:* $x \in (\pi n; \pi + \pi n), \quad n \in Z$
- *Область значений:* $y \in R$
- *Нули:* $y = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$
- *Промежутки знакопостоянства:*

  $\operatorname{ctg} x > 0$ при $x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), \quad n \in Z$

  $\operatorname{ctg} x < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi + \pi n\right), \quad n \in Z$
- *Экстремумов* нет
- *Промежутки монотонности:*

  функция убывает на каждом интервале области определения
- *Четность, нечетность:* функция нечетная
- *Асимптоты:* $x = \pi n, n \in Z$

Тренировочная работа

В – 1	В – 2	В – 3

1) Выяснить, является ли функция *y = tg (x)* возрастающей на промежутке:

$\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right]$	$\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{8}\right)$	[2; 3]

2) Используя свойство возрастания функции *y = tg (x)* сравните числа:

$tg\frac{\pi}{5}....tg\frac{\pi}{7}$	$tg\frac{7\pi}{8}....tg\frac{8\pi}{9}$	$tg\left(-\frac{7\pi}{8}\right)....tg\left(-\frac{8\pi}{9}\right)$

3) Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку *(-П; 2П)*.

$tg(x)=1$	$tg(x)=-\sqrt{3}$	$tg(x)=-1$

4) Найдите все решения, принадлежащие промежутку *(-П; 2П)*.

$tg(x)\geq 1$	$tg(x)<\frac{\sqrt{3}}{3}$	$tg(x)\geq -\sqrt{3}$

Работа в группах

В – 1	В – 2	В – 3	В – 4
1) Найдите значение:			
а) $arcctg\left(-\sqrt{3}\right)$	а) $arcctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	а) $arctg\left(tg\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$	а) $arctg\left(tg\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$
б) $\arcsin\frac{1}{2}+\arccos 1-arctg(0)$	б) $\arccos\frac{1}{2}+\arcsin\frac{1}{2}-arctg(1)$	б) $tg\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	б) $tg\left(2\arccos(-1)\right)$
2) Найдите область определения:			
а) $arctg\left(\sqrt{x}\right)$	а) $arctg\left(\frac{1}{x}\right)$	а) $arctg\left(\frac{3}{x^2-9}\right)$	а) $arctg\left(1-x^2\right)$
3) Постройте график функции:			
а) $y=tg(2x)$	а) $y=ctg\left(\frac{x}{2}\right)$	а) $y=tg\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$	а) $y=ctg\left(3\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right)$

§ 43. «Обратные тригонометрические функции».

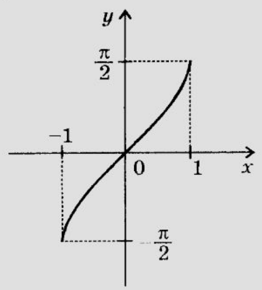
Знать: какие функции являются обратными тригонометрическими, иметь представление об их графиках, свойствах.

Уметь: решать задачи с использованием свойств обратных тригонометрических функций.

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

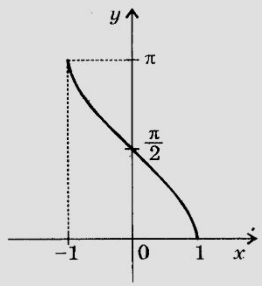
$y = \arcsin x$

функция, обратная функции $y = \sin x$, $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$



$y = \arccos x$

функция, обратная функции $y = \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$



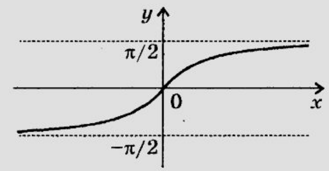
СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

	$y = \arcsin x$	$y = \arccos x$
• *Область определения:*	$x \in [-1; 1]$	$x \in [-1; 1]$
• *Область значений:*	$y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	$y \in [0; \pi]$
• *Нули:*	$y = 0$ при $x = 0$	$y = 0$ при $x = 1$
• *Промежутки знакопостоянства:*	$y > 0$ при $x \in (0; 1]$ $y < 0$ при $x \in [-1; 0)$	$y > 0$ при $x \in [-1; 1)$
• *Экстремумы:*	нет	нет
• *Промежутки монотонности:*	возрастает во всей области определения	убывает во всей области определения
• *Четность, нечетность:*	нечетная	ни четная, ни нечетная

$\arcsin x + \arccos x = \pi/2$

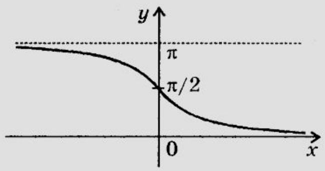
$y = \operatorname{arctg} x$

функция, обратная функции $y = \operatorname{tg} x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$



$y = \operatorname{arcctg} x$

функция, обратная функции $y = \operatorname{ctg} x$, $0 < x < \pi$



СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

	$y = \operatorname{arctg} x$	$y = \operatorname{arcctg} x$
• *Область определения:*	$x \in R$	$x \in R$
• *Область значений:*	$y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	$y \in (0; \pi)$
• *Нули:*	$y = 0$ при $x = 0$	нулей нет
• *Промежутки знакопостоянства:*	$y > 0$ при $x \in (0; \infty)$ $y < 0$ при $x \in (-\infty; 0)$	$y > 0$ при $x \in R$
• *Экстремумы:*	нет	нет
• *Промежутки монотонности:*	возрастает при $x \in R$	убывает при $x \in R$
• *Четность, нечетность:*	нечетная	ни четная, ни нечетная
• *Асимптоты*	$y = -\frac{\pi}{2}$ и $y = \frac{\pi}{2}$	$y = 0$ и $y = \pi$

$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \pi/2$

Работа в группах

В – 1 В – 2 В – 3

1) Задайте с помощью формулы функцию, обратную функции *f(x)*. Укажите область определения и область значений полученной функции. Найдите промежутки её возрастания и убывания.

$$f(x) = x + 2 \qquad f(x) = -x + 2 \qquad f(x) = \frac{1}{2}x$$

2) Заполните таблицу (учащимся предлагается таблица с заполненной первой строкой).

a	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
arcsin(a)									

a	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
arccos(a									

a	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	O	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$\sqrt{3}$
arctg(a)							

Диктант

В – 1 | **В – 2**

1) Поставьте знак равенства или неравенства так, чтобы получилось истинное высказывание:

В – 1:

а) $\arcsin 1 \ldots . \arccos 1$

б) $\arcsin(-1) \ldots . arctg(-1)$

в) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} \ldots . \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$

В – 2:

а) $\arcsin(1) \ldots . arctg(1)$

б) $\arcsin\frac{1}{2} \ldots . \arccos\frac{1}{2}$

в) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \ldots . \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

2) Найдите:

В – 1:

а) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{4}\right) =$

б) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) =$

В – 2:

а) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) =$

б) $arctg\left(tg\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) =$

3) Найдите значение выражения *x + arccos (x)*, при следующих значениях *x* :

В – 1: а) -1; б) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

В – 2: а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{1}{2}$

Т—3

Свойства и графики тригонометрических функций

Вариант I

1. Найдите область значений функции

$$y = 2 - 3\sin x.$$

а) $[-1; 5]$; б) $[-4; 2]$; в) $[-5; 1]$; г) $[-2; 4]$.

2. Найдите «нули» функции $y = \frac{1}{3}\cos 2x$ на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ и запишите их сумму.

а) $1{,}5\,\pi$; б) 2π; в) $3{,}75\pi$; г) $2{,}25\,\pi$.

3. Для функции $y = \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$ найдите точку минимума на промежутке $[0; 4\pi]$.

а) $\frac{7\pi}{2}$; б) $\frac{7\pi}{6}$; в) $\frac{10\pi}{3}$; г) $\frac{5\pi}{3}$.

4. Найдите промежутки убывания для функции

$$y = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}x\right).$$

а) $\left[-\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\pi n; \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

б) $\left[-\frac{\pi}{2} + 3\pi n; \pi + 3\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

в) $\left[\frac{\pi}{2} + 3\pi n; 2\pi + 3\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

г) $\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi n; \frac{2\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

5. Расположите в порядке возрастания числа

$$\sin 1,\ \sin(-5)\ \text{и}\ \cos 1.$$

а) $\sin(-5)$, $\sin 1$, $\cos 1$; в) $\sin(-5)$, $\cos 1$, $\sin 1$;
б) $\sin 1$, $\sin(-5)$, $\cos 1$; г) $\cos 1$, $\sin 1$, $\sin(-5)$.

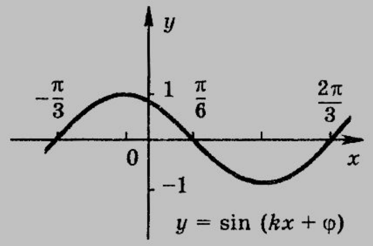
6. По графику некоторой функции запишите формулу, которой она задана.

а) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$;

б) $y = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$;

в) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;

г) $y = \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$.



7. Найдите значение выражения

$$\frac{\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)}{\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}}.$$

а) $3{,}5$; б) $-4{,}5\,\pi$; в) $-5{,}5$; г) $-3{,}5$.

8. Вычислите $\cos(\arcsin(-0{,}6))$.

а) $-0{,}36$; б) $0{,}6$; в) $-0{,}8$; г) $0{,}8$.

9. Найдите $\arcsin x$, если $\arccos x = \frac{\pi}{5}$.

а) $\frac{9\pi}{5}$; б) $0{,}3\pi$; в) $0{,}8\pi$; г) $-\frac{\pi}{5}$.

10. Найдите сумму координат точки пересечения графиков функций

$$y = \arccos x \text{ и } y = \frac{\pi}{2} + x.$$

а) $\frac{\pi}{2}$; б) 1; в) $\frac{\pi}{2} + 1$; г) $\pi + 1$.

Т—3

Свойства и графики тригонометрических функций

Вариант II

1. Найдите область значений функции $y = 3 - 5\cos x$.

а) $[-2; 2]$; б) $[-3; 5]$; в) $[-5; 3]$; г) $[-2; 8]$.

2. Найдите «нули» функции $y = 0{,}5\sin 3x$ на промежутке $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$ и запишите их сумму.

а) $\frac{5\pi}{6}$; б) $-\frac{5\pi}{3}$; в) $\frac{4\pi}{3}$; г) $-\frac{8\pi}{3}$.

3. Для функции $y = \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$ найдите точку максимума на промежутке $[0; 6\pi]$.

а) $3{,}75\pi$; б) $4{,}5\pi$; в) $3{,}25\pi$; г) $5{,}25\pi$.

4. Найдите промежутки возрастания для функции

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{3}\right).$$

а) $\left[-\pi + \frac{2\pi}{3}; 2\pi + \frac{2\pi}{3}\right]$, $n \in Z$;

б) $\left[-\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right]$, $n \in Z$;

в) $[-2\pi + 6\pi n; \pi + 6\pi n]$, $n \in Z$;

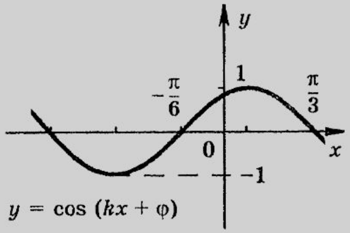
г) $\left(-\frac{\pi}{2} + 6\pi n; 2\pi + 6\pi n\right]$, $n \in Z$.

5. Расположите в порядке убывания числа

$$\cos 2, \quad \cos(-4) \quad \text{и} \quad \sin 2.$$

а) $\cos(-4)$, $\sin 2$, $\cos 2$; в) $\sin 2$, $\cos 2$, $\cos(-4)$;
б) $\cos 2$, $\sin 2$, $\cos(-4)$; г) $\cos(-4)$, $\cos 2$, $\sin 2$.

6. По графику некоторой функции запишите формулу, которой она задана.



а) $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$;

б) $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$;

в) $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$;

г) $y = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$.

7. Найдите значение выражения

$$\frac{\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \operatorname{arctg}\sqrt{3}}{\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}.$$

а) $-\frac{8}{9}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $\frac{3}{4}$; г) $-\frac{5}{6}$.

8. Вычислите $\sin\left(\arccos\left(-\frac{12}{13}\right)\right)$.

а) $-\frac{1}{13}$; б) $\frac{5}{13}$; в) $-\frac{5}{13}$; г) $\frac{1}{13}$.

9. Найдите $\arccos x$, если $\arcsin x = \frac{\pi}{7}$.

а) $\frac{13\pi}{7}$; б) $\frac{6\pi}{7}$; в) $-\frac{\pi}{7}$; г) $\frac{5\pi}{14}$.

10. Найти сумму координат точки пересечения графиков функций $y = \arcsin x$ и $y = x + \frac{\pi}{2} - 1$.

а) $\frac{\pi}{2}$; б) $1 + \frac{\pi}{2}$; в) $\frac{\pi}{2} - 1$; г) $1 - \frac{\pi}{2}$.

Контрольная работа

Тема: «Тригонометрические функции».

В – 1	В – 2

1) Постройте график функции на отрезке *[-П;П]* и опишите свойства функции, используя её график.

В – 1: *y = cos (x)*

В – 2: *y = sin (x)*

2) Для функции:

В – 1: $$y = \frac{1}{3}\sin\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{7}\right)$$

В – 2: $$y = -\frac{2}{5}\cos\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{5}\right)$$

Найдите: а) наименьший положительный период; б) наименьшее и наибольшее значения.

3) Сравните числа:

В – 1:

а) $\sin\frac{\pi}{7}$ и $\sin\frac{\pi}{9}$

б) $tg\frac{\pi}{6}$ и $tg\frac{\pi}{8}$

в) $\cos\frac{5\pi}{7}$ и $\sin\frac{5\pi}{7}$

В – 2:

а) $\cos\frac{\pi}{5}$ и $\cos\frac{\pi}{6}$

б) $tg\frac{5\pi}{8}$ и $tg\frac{8\pi}{9}$

в) $\sin\frac{\pi}{7}$ и $\cos\frac{\pi}{7}$

4) Найдите область определения функции:

В – 1: $$y = \frac{1}{\sqrt{\cos x}}$$

В – 2: $$y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$$

5) Изобразите схематически график функции:

В – 1: $$y = 4\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

В – 2: $$y = \frac{1}{4}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Отметьте на графике две точки, для которых

В – 1: *y = 4*

В – 2: *y = -0,25*

Чему равны соответствующие значения *x* ?

Список использованной литературы

1. Алимов, Ш.А. Алгебра и начала анализа 10 – 11 классы. [Текст]: учебник, Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров. – М.: Просвещение, 2003.
2. Вопросы преподавания алгебры и начала анализа в средней школе. [Текст]: / – М.: Просвещение, 1981.
3. Гусев, В.А. Математика (справочные материалы). [Текст]: / В.А. Гусев, А.Г. Мордкович. – М.: Просвещение.
4. Колмогоров, А.Н. Алгебра и начала анализа 10 – 11 классы. [Текст]: учебник, А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын. М.: Просвещение, 1990.
5. Лукин, Р.Д. Устные упражнения по алгебре и началам анализа. [Текст]: / Р.Д. Лукин, Т.К. Лукина, М.С. Якунина. – М.: Просвещение, 1999.
6. Алтынов, П.И. Алгебра и начала анализа 10 – 11 классы. Тесты. [Текст]: / П.И. Алтынов. – М.: Дрофа, 2003.
7. Аверьянов, Д.И. Математика для школьников и поступающих в ВУЗы. [Текст]: / Д.И. Аверьянов, П.И. Алтынов, И.И. Баврин. – М.: Дрофа, 2000.