

Дидактический материал  
тема: «Тригонометрические функции»

## Пояснительная записка

---

В результате изучения курса математики учащиеся должны понимать, что функция – математическая модель, позволяющая описывать и изучать разнообразные зависимости между реальными величинами, уметь логически мыслить, проявлять творческие способности на уровне, необходимом для продолжения образования и для самостоятельной деятельности.

Данные дидактические материалы рассчитаны для курса математики 10 класса, обучающего по учебнику Алимов Ш.А. «Алгебра и начала анализа» по основной программе с учетом стандартов основного общего образования по математике.

## После пройденного курса учащиеся должны знать:

- Определение области определения и множества значений функции, в том числе тригонометрических функций;
- Определение четности и нечетности функции, периодичности тригонометрических функций;
- Понятие функции косинуса, схему исследования функции  $y = \cos(x)$  и её свойства;
- Понятие функции синуса, схему исследования функции  $y = \sin(x)$  и её свойства;
- Понятие функции тангенса и котангенса, схему исследования функции  $y = \operatorname{tg}(x)$  и  $y = \operatorname{ctg}(x)$  и их свойства;
- Какие функции являются обратными тригонометрическими, иметь представление об их графиках и свойствах.

После изучения практического материала учащиеся должны уметь:

- Находить область определения и область значений тригонометрических функций;
- Находить период тригонометрических функций, исследовать их на четность и нечетность;
- Строить графики функций  $y = \cos(x)$ ,  $y = \sin(x)$ ,  $y = \operatorname{tg}(x)$  и  $y = \operatorname{ctg}(x)$ ;
- Находить по графикам промежутки возрастания и убывания, промежутки постоянных знаков, наибольшее и наименьшее значения функций;
- Преобразование графиков: параллельный перенос, симметрия относительно начала и осей координат, растяжение и сжатие вдоль осей координат;
- Решать задачи с использованием свойств обратных тригонометрических функций;
- Использовать свойства функции для сравнения и оценки её значений.

## § 38. «Область определения и множество значений тригонометрических функций».

Цель:

Знать: Определение области определения и множества значений функции, в том числе тригонометрических функций.

Уметь: Находить область определения и область значений тригонометрических функций.

Урок 1-3.

Справочный материал:

Функция	Область определения $D$ ( $x$ )	Множество значений $E$ ( $y$ )
$y = \sin(x)$	$R$	$-1 \leq y \leq 1$
$y = \cos(x)$	$R$	$-1 \leq y \leq 1$
$y = \operatorname{tg}(x)$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi \cdot n, n \in Z$	$R$
$y = \operatorname{ctg}(x)$	$x \neq \pi \cdot n, n \in Z$	$R$

## Тренировочный тест

1. Найдите область определения функции  $y = \sqrt{\cos(x)}$ .

а)  $x \in R$ ; б)  $x \geq 0$ ; в)  $2\pi \cdot n \leq x \leq \pi + 2\pi \cdot n, n \in Z$ ;

г)  $-\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n, n \in Z$ .

2. Найдите множество значений функции  $y = 3 - 5 \cdot \sin(x)$ .

а)  $[-8; 8]$ ; б)  $[-2; 8]$ ; в)  $[-2; 5]$ ; г)  $[-5; 2]$ .

3. Чему равно наименьшее значение функции  
 $y = \sin(x) \cdot \cos(x)$ ?

а) -1; б) -2; в) -1/2; г) 1.

4. Чему равно наибольшее значение функции  
 $y = \sin^2 x - \cos^2 x$ ?

а) 0; б) 1; в) -1; г) 2.

# Тренажер №1

Найти область определения функции:

**В – 1**

1.  $y = ctg x$

2.  $y = tg 2x$

3.  $y = tg x + ctg x$

4.  $y = \frac{1}{\cos \frac{x}{2}}$

5.  $y = \frac{1}{2 + \sin x}$

**В – 2**

1.  $y = 3tg x$

2.  $y = 2 \cdot tg \frac{x}{2}$

3.  $y = \frac{1}{\sin 2x}$

4.  $y = \frac{1}{\sin 3x} + \frac{1}{\cos 3x}$

5.  $y = \frac{1}{1 - \cos x}$

**В – 3**

1.  $y = tg \frac{x}{2} + ctg \frac{x}{2}$

2.  $y = \frac{1}{tg(x)}$

3.  $y = \frac{3}{1 + \sin x}$

4.  $y = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

5.  $y = tg(x) + \frac{1}{ctg(x) + 1}$

# Самостоятельная работа

1. Найдите область определения функции:

а)  $y = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x - 2}$

а)  $y = \sqrt{x^2 - 25}$

б)  $y = 0,5 \cdot \cos x$

б)  $y = 3 \cdot \sin x$

в)  $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

в)  $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

2. Найдите множество значений функции:

$y = (\cos x - \sin x)^2$

$y = (\cos x + \sin x)^2$



## § 39. «Четность, нечетность, периодичность тригонометрических функций».

Цель:

Знать: Определение четности и нечетности функции, периодичности тригонометрических функций.

Уметь: Находить период тригонометрических функций, исследовать их на четность и нечетность.

Справочный материал:

Функция	Четность	Период
$y = \sin x$	Нечетная	$2\pi$
$y = \cos x$	Четная	$2\pi$
$y = \operatorname{tg} x$	Нечетная	$\pi$
$y = \operatorname{ctg} x$	Нечетная	$\pi$

# Тренировочный тест.

1. Какая из функций является четной?

A.  $y = \sin x$     Б.  $y = tg(x)$     В.  $y = \cos x$     Г.  $y = ctg(x)$

2. Какая из функций является нечетной?

A.  $y = \cos x + 1$     Б.  $y = 2 \cdot tg(x - 3)$     В.  $y = \sin^2 x$     Г.  $y = \frac{1}{2} \sin 2x$

3. Какая из функций не является четной, не является нечетной?

A.  $y = \sin x + 2$     Б.  $y = \cos x \cdot \sin x$     В.  $y = 2 \sin(\pi - x)$     Г.  $y = |tg(x)|$

4. Найдите наименьший положительный период функции  $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

A.  $\pi$     Б.  $2\pi$     В.  $\frac{11\pi}{6}$     Г.  $\frac{5\pi}{6}$

5. Какая из функций имеет период  $2\pi$ ?

A.  $y = \sin \frac{x}{2}$     Б.  $y = tg(x)$     В.  $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$     Г.  $y = 2 \cdot ctg(x)$

# Диктант

В – 1

1. Функция  $f(x)$  периодическая с периодом 8. Запишите вытекающее отсюда равенство.
2. Каков наименьший положительный период функции  $y = \operatorname{tg} x$  ?
3. Является ли число 3,14 периодом синуса?
4. Каков наименьший положительный период функции 
$$y = \cos \frac{x}{2}$$
5. Каков наименьший положительный период функции 
$$y = 5 + \sin x$$

В – 2

1. Функция  $g(x)$  периодическая с периодом 6. Запишите вытекающее отсюда равенство.
2. Каков наименьший положительный период функции  $y = \cos x$  ?
3. Является ли число 3,14 периодом котангенса?
4. Каков наименьший положительный период функции 
$$y = 6 - \sin x$$
5. Каков наименьший положительный период функции 
$$y = \cos 4x$$

# Домашняя тренировочная работа

В – 1

В – 2

В – 3

1. Найдите значение  $\sin \alpha$ , если:

а)  $\sin(\alpha + 2\pi) = 0,2$

а)  $\sin(\alpha + 6\pi) = 0,6$

а)  $\sin(4\pi - \alpha) = 0,3$

2. Найдите значение  $\operatorname{tg} \alpha$ , если:

а)  $\operatorname{tg}(\alpha - \pi) = 0,5$

а)  $\operatorname{tg}(\alpha + 5\pi) = -100$

а)  $\operatorname{tg}(3\pi - \alpha) = 10$

3. Найдите наименьший положительный период функции:

а)  $y = 2 \cdot \sin 2x$

а)  $y = 2 \cdot \cos 4x$

а)  $y = \sin(-2x)$

б)  $y = \operatorname{tg}(2x)$

б)  $y = \sin \frac{1}{2}x$

б)  $y = \cos \frac{x}{3}$

4. Найдите наименьший положительный период функции:

а)  $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

а)  $y = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

а)  $y = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

б)  $y = \sin \frac{x}{2} + \operatorname{tg}(x)$

б)  $y = \sin 2x + \cos x$

б)  $y = |\cos x|$

5. Является ли периодической функция:

а)  $y = x - \sin x$

а)  $y = \operatorname{tg}(x) + 2$

а)  $y = 2x \cdot \cos x$

# Тренажер №2

В – 1

В – 2

В – 3

В – 4

I. Периодичность тригонометрических функций.

1) Для данной функции найдите наименьший положительный период:

1.  $y = \sin 3t$

1.  $y = \cos 4t$

1.  $y = \operatorname{tg} 5t$

1.  $y = \operatorname{ctg} \frac{2}{3}t$

2.  $y = \operatorname{tg} \frac{3t}{2}$

2.  $y = 4 \cdot \sin \frac{t}{5}$

2.  $y = \operatorname{tg} \left( \frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$

2.  $y = 3 \cdot \sin \left( \frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$

3.  $y = \cos \left( \frac{t}{2} + \frac{\pi}{6} \right)$

3.  $y = \sin \left( 2t - \frac{\pi}{3} \right)$

3.  $y = \sin \frac{x}{2} + \cos 2x$

3.  $y = \sin 3x + 2 \cdot \cos 5x$

II. Четность тригонометрических функций.

2) Исследуйте функцию на четность:

1.  $y = \cos 2t$

1.  $y = -\sin t$

1.  $y = \operatorname{ctg} 3t$

1.  $y = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$

2.  $y = 1 - \operatorname{tg}(t)$

2.  $y = t - \sin t$

2.  $y = 1 - \operatorname{tg}^2 t$

2.  $y = \frac{\sin t}{t}$

3.  $y = \sin t^2$

3.  $y = 2t \cdot \cos 2t$

3.  $y = \frac{1}{1 - 2 \cdot \sin t}$

3.  $y = \cos(\sin t)$

III. Монотонность тригонометрических функций.

3) Вставьте пропущенный знак: <, > или = между значениями тригонометрических функций:

1.  $\sin 25^\circ \dots \sin 75^\circ$

1.  $\cos 40^\circ \dots \cos 80^\circ$

1.  $\sin 20^\circ \dots \sin 166^\circ$

1.  $\cos 20^\circ \dots \cos(-40^\circ)$

2.  $\cos \frac{5\pi}{7} \dots \cos \frac{\pi}{7}$

2.  $\sin \frac{3\pi}{7} \dots \sin \frac{4\pi}{7}$

2.  $\sin \frac{3\pi}{7} \dots \sin \frac{8\pi}{7}$

2.  $\cos \frac{\pi}{7} \dots \cos \frac{6\pi}{7}$

3.  $\sin 150^\circ \dots \cos 150^\circ$

3.  $\cos 130^\circ \dots \sin 130^\circ$

3.  $\sin 3,14 \dots \sin 3$

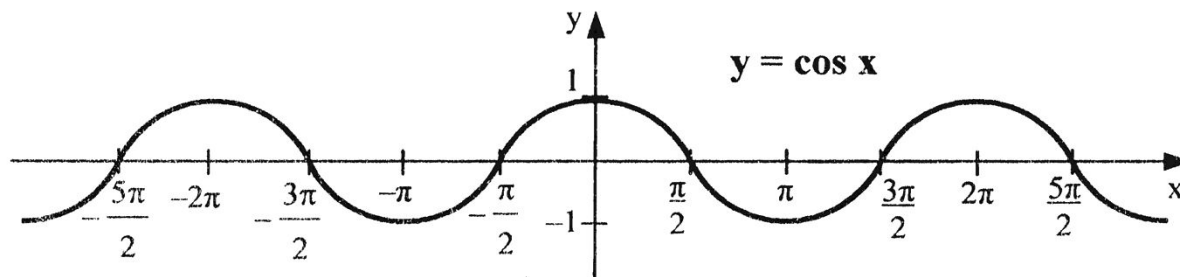
3.  $\cos 5 \dots \cos 6$

## § 40. «Свойства функции $y = \cos x$ и её график».

График функции построить на двойном листочке в клеточку, приняв 2 клетки по оси  $Oy$  за 1, 3 клетки по оси  $Ox$  —  $\frac{\pi}{2}$ .

Знать: Понятие функции косинуса, схему исследования функции  $y = \cos x$  (её свойства).

Уметь: Строить график функции  $y = \cos x$ , находить по графику промежутки возрастания и убывания, промежутки постоянных знаков, наибольшее и наименьшее значения функции.



**Свойства функции  $y = \cos x$ .**

1. Область определения — множество  $\mathbb{R}$ .
2. Множество значений — отрезок  $[-1; 1]$ .
3. Функция периодическая с периодом  $2\pi$ .
4. Функция четная.
5.  $y = 0$  при  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .
6.  $y > 0$  при  $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .  
 $y < 0$  при  $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .
7. Наибольшее значение  $y = 1$  при  $x = 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .  
Наименьшее значение  $y = -1$  при  $x = \pi + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .
8. Функция возрастает при  $x \in [\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n]$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;

# Самостоятельная работа

В – 1.

1. Изобразите схематически график функции  $y=3\cdot\cos(x)$ . Отметьте на графике три точки, для которых  $y=1,5$ . Чему равны соответствующие значения  $x$ ?

2. Запишите наименьший положительный период функции  $y = \cos \frac{3x}{2}$ .

3. Запишите промежутки возрастания и убывания функции  $y = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}$ .

4. Для функции  $y = \frac{1}{2} \cos 2x$  найдите:

а) область определения; б) множество значений; в) нули функции.

В – 2.

1. Изобразите схематически график функции  $y = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ .

Отметьте на графике три точки, для которых  $y=-0,5$ . Чему равны соответствующие значения  $x$ ?

2. Запишите наименьший положительный период функции  $y=0,5\cdot\cos(0,5x)$ .

3. Найдите, в каких точках функция  $y=3\cdot\cos(x) - 2$  достигает своего наибольшего значения?

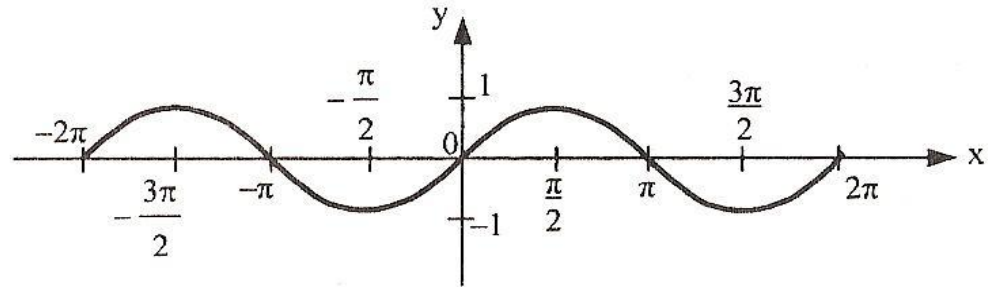
4. Начертите график функции  $y=\cos(x)$  на отрезке  $[-\pi; 2,5\pi]$ . Отметьте на этом графике множество точек, для которых выполняются условия: а)  $\cos(x) = 1$ ; б)  $\cos(x) > 0,5$ . Выпишите соответствующие значения  $x$ , при которых выполняется каждое из условий.

# § 41. «Свойства функции $y = \sin x$ и её график».

График функции  $y = \sin x$

Знать: понятие функции синуса, схему исследования функции  $y = \sin x$  (её свойства).

Уметь: Строить график функции  $y = \sin x$ , находить по графику промежутки возрастания и убывания, промежутки постоянных знаков, наибольшее и наименьшее значения функции.



**Свойства функции  $y = \sin x$ .**

1. Область определения – множество  $\mathbb{R}$ .
2. Множество значений – отрезок  $[-1; 1]$ .
3. Функция периодическая с периодом  $2\pi$ .
4. Функция нечетная.

5.  $y = 0$  при  $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

6.  $y > 0$  при  $x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n); n \in \mathbb{Z}$ .

$y < 0$  при  $x \in (\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n); n \in \mathbb{Z}$ .

7. Наибольшее значение  $y = 1$  при  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$ .

Наименьшее значение  $y = -1$  при  $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$ .

8. Функция возрастает при  $x \in [-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$ .

Функция убывает при  $x \in [\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$ .



# Проверочная работа

В – 1.

1. Изобразите схематически график функции  $y = \sin(x)$ . Отметьте на графике три точки, для которых  $y = 1$ . Чему равны соответствующие значения  $x$ ?

2. Запишите промежутки возрастания и убывания функции  $y = \frac{1}{2} \sin x$  на отрезке  $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$

В – 2.

1. Запишите наименьший положительный период функции  $y = \sin \frac{x}{3}$ .

2. Найдите наибольшие и наименьшие значения функции  $y = \frac{1}{3} \sin(x) - 1$

3. Сравните числа  $\sin 1$  и  $\sin 3$ .

В – 3.

Для функции  $y = 2 \cdot \sin(3x)$  найдите:

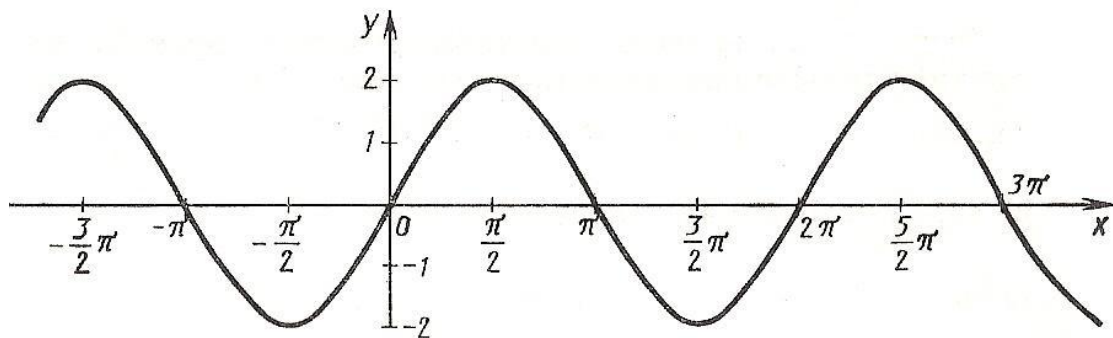
а) область определения; б) множество значений; в) нули функции; г) промежутки знакопостоянства; д) наибольшее и наименьшее значения; е) промежутки возрастания и убывания. Постройте этот график.

В – 4.

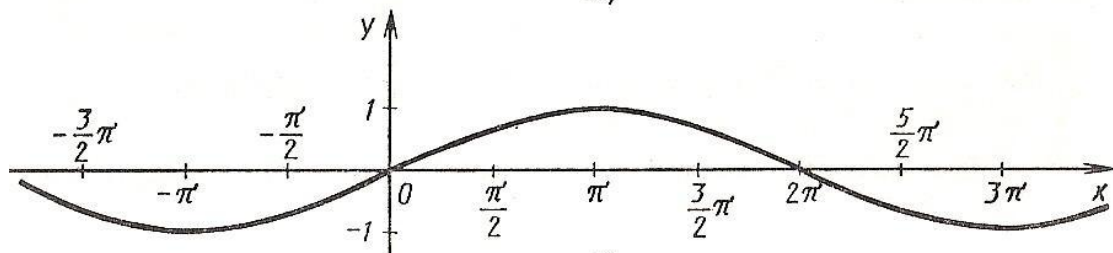
Начертите график функции  $y = \sin(x)$  на отрезке  $[-\pi; 2,5\pi]$ . Отметьте на этом графике множество точек, для которых выполняются условия: а)  $\sin(x) = 1$ ; б)  $\sin(x) = 0,5$ ; в)  $\sin(x) > 0,5$ . Выпишите соответствующие значения  $x$ , при которых выполняется каждое из условий.

# Работа в группах по графикам

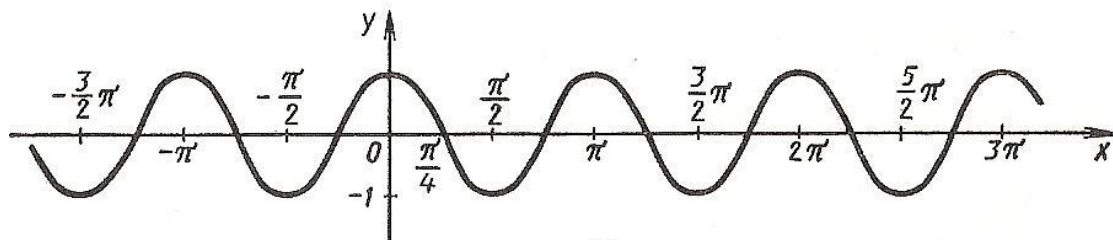
185. Определите, график какой тригонометрической функции изображен на рисунке 12, а – в.



а)



б)



в)

1. Каковы значения  $x$ , для которых  $f(x) = 0$ ,  $f(x) < 0$ ,  $f(x) > 0$ ?
2. Каковы промежутки возрастания и убывания функции?
3. Укажите значения  $x$ , при которых функция имеет максимум или минимум.
4. Обратима ли функция на  $\mathbb{R}$ ?

# Тренировочная работа

1. Для функции  $y = \sin(x)$  укажите на отрезке  $[0; 2\pi]$  промежутки, в которых эта функция: а) возрастает; б) убывает; в) положительна; г) отрицательна.
2. При каких значениях  $x$  на  $[0; 2\pi)$  функция принимает наибольшее значение и чему оно равно:  
а)  $y = 3 + \cos(x)$ ; б)  $y = 2 - \sin(x)$ ?
3. При каких значениях  $x$  на  $[0; 2\pi)$  функция принимает наименьшее значение и чему оно равно:  
а)  $y = 3 + \cos(x)$ ; б)  $y = 2 - \sin(x)$ ?
4. Существует ли такое значение  $x$  из интервала  $(0; \pi)$ , при котором функция  $y = \operatorname{tg}(x)$  принимает своё наибольшее значение?

# Диктант

В – 1 [ В – 2 ].

1. Какова область определения [значений] синуса?
2. Какова область значений [определения] тангенса?
3. Является ли функция  $y = \cos(x)$  [ $y = \operatorname{tg}(x)$ ] нечетной?
4. Каков наименьший положительный период функции  $y = \operatorname{tg}(x)$  [ $y = \sin(x)$ ] ?
5. Укажите нули функции  $y = \sin(x)$  [ $y = \operatorname{tg}(x)$ ].
6. Укажите промежутки, на которых тангенс положителен [косинус отрицателен].
7. Выяснить возрастает или убывает функция  $y = \cos(x)$  [ $y = \sin(x)$ ] на промежутке  $\left[2\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$  .

# Тренажер №3

Постройте график функции:

**В – 1**

1.  $y = \cos 2x$

2.  $y = 2 \sin \frac{x}{2}$

3.  $y = 2 \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right)$

**В – 2**

1.  $y = -\sin 2x$

2.  $y = -2 \sin 2x$

3.  $y = \cos \left( x - \frac{\pi}{3} \right)$

**В – 3**

1.  $y = 0,5 \cos x$

2.  $y = \sin x - 2$

3.  $y = 3 \sin 2 \left( x - \frac{\pi}{4} \right)$

## § 42. «Свойства функции $y = \operatorname{tg}(x)$ и её график».

Знать: понятие функции тангенса, схему исследования функции  $y = \operatorname{tg}(x)$  (её свойства); понятие функции котангенса, схему исследования функции  $y = \operatorname{ctg}(x)$  (её свойства).

Уметь: строить графики функций  $y = \operatorname{tg}(x)$ ,  $y = \operatorname{ctg}(x)$ , находить по графику промежутки возрастания и убывания, промежутки знакопостоянства, наибольшие и наименьшие значения функции.

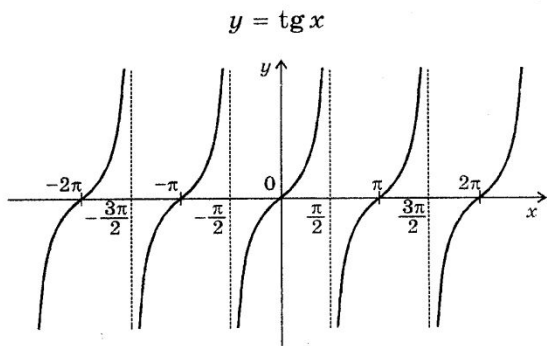


график — тангенсоида

### СВОЙСТВА ФУНКЦИИ

- Область определения:  $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$
- Область значений:  $y \in \mathbb{R}$
- Нули:  $y = 0$  при  $x = \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$
- Промежутки знакопостоянства:
  - $\operatorname{tg} x > 0$  при  $x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$
  - $\operatorname{tg} x < 0$  при  $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$
- Экстремумов нет
- Промежутки монотонности: функция возрастает на каждом интервале области определения
- Четность, нечетность: функция нечетная
- Асимптоты:  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$

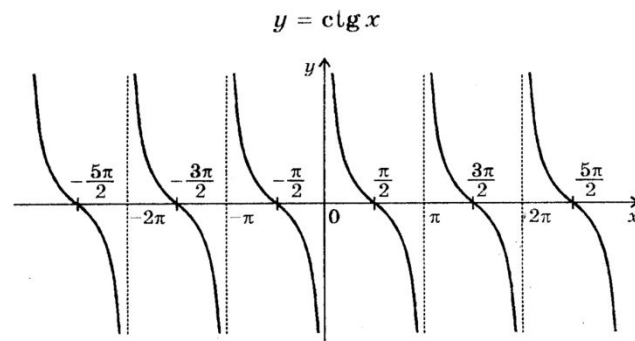


График — котангенсоида

### СВОЙСТВА ФУНКЦИИ

- Область определения:  $x \in (\pi n; \pi + \pi n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$
- Область значений:  $y \in \mathbb{R}$
- Нули:  $y = 0$  при  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$
- Промежутки знакопостоянства:
  - $\operatorname{ctg} x > 0$  при  $x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$
  - $\operatorname{ctg} x < 0$  при  $x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi + \pi n\right)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$
- Экстремумов нет
- Промежутки монотонности: функция убывает на каждом интервале области определения
- Четность, нечетность: функция нечетная
- Асимптоты:  $x = \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$

# Тренировочная работа

В – 1

В – 2

В – 3

1) Выяснить, является ли функция  $y = \operatorname{tg}(x)$  возрастающей на промежутке:

$$\left[ \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3} \right]$$

$$\left( -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{8} \right)$$

[2; 3]

2) Используя свойство возрастания функции  $y = \operatorname{tg}(x)$  сравните числа:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{5} \dots \operatorname{tg} \frac{\pi}{7}$$

$$\operatorname{tg} \frac{7\pi}{8} \dots \operatorname{tg} \frac{8\pi}{9}$$

$$\operatorname{tg} \left( -\frac{7\pi}{8} \right) \dots \operatorname{tg} \left( -\frac{8\pi}{9} \right)$$

3) Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку  $(-\pi; 2\pi)$ .

$$\operatorname{tg}(x) = 1$$

$$\operatorname{tg}(x) = -\sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg}(x) = -1$$

4) Найдите все решения, принадлежащие промежутку  $(-\pi; 2\pi)$ .

$$\operatorname{tg}(x) \geq 1$$

$$\operatorname{tg}(x) < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg}(x) \geq -\sqrt{3}$$

# Работа в группах

В – 1

В – 2

В – 3

В – 4

1) Найдите значение:

а)  $\operatorname{arccctg}(-\sqrt{3})$     а)  $\operatorname{arccctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$     а)  $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$     а)  $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

б)  $\arcsin\frac{1}{2} + \arccos 1 - \operatorname{arctg}(0)$     б)  $\arccos\frac{1}{2} + \arcsin\frac{1}{2} - \operatorname{arctg}(1)$     б)  $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$     б)  $\operatorname{tg}(2 \arccos(-1))$

2) Найдите область определения:

а)  $\operatorname{arctg}(\sqrt{x})$     а)  $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$     а)  $\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{x^2 - 9}\right)$     а)  $\operatorname{arctg}(1 - x^2)$

3) Постройте график функции:

а)  $y = \operatorname{tg}(2x)$     а)  $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}\right)$     а)  $y = \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$     а)  $y = \operatorname{ctg}\left(3\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right)$



# § 43. «Обратные тригонометрические функции».

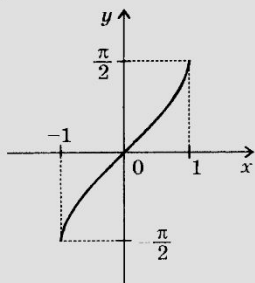
Знать: какие функции являются обратными тригонометрическими, иметь представление об их графиках, свойствах.

Уметь: решать задачи с использованием свойств обратных тригонометрических функций.

## ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

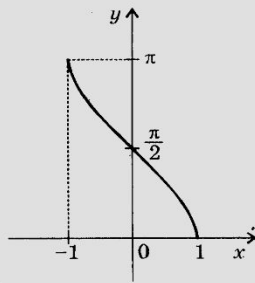
$$y = \arcsin x$$

функция, обратная функции  
 $y = \sin x, -\pi/2 < x < \pi/2$



$$y = \arccos x$$

функция, обратная функции  
 $y = \cos x, 0 < x < \pi$



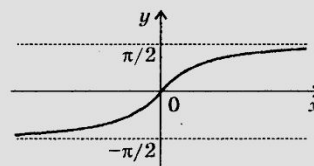
### СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

	$y = \arcsin x$	$y = \arccos x$
• Область определения:	$x \in [-1; 1]$	$x \in [-1; 1]$
• Область значений:	$y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	$y \in [0; \pi]$
• Нули:	$y = 0$ при $x = 0$	$y = 0$ при $x = 1$
• Промежутки знакопостоянства:	$y > 0$ при $x \in (0; 1]$ $y < 0$ при $x \in [-1; 0)$	$y > 0$ при $x \in [-1; 1)$
• Экстремумы:	нет	нет
• Промежутки монотонности:	возрастает во всей области определения	убывает во всей области определения
• Четность, нечетность:	нечетная	ни четная, ни нечетная

$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2$$

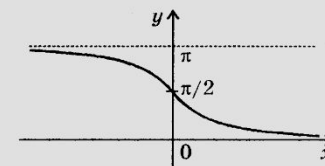
$$y = \operatorname{arctg} x$$

функция, обратная функции  
 $y = \operatorname{tg} x, -\pi/2 < x < \pi/2$



$$y = \operatorname{arccctg} x$$

функция, обратная функции  
 $y = \operatorname{ctg} x, 0 < x < \pi$



### СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

	$y = \operatorname{arctg} x$	$y = \operatorname{arccctg} x$
• Область определения:	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R}$
• Область значений:	$y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	$y \in (0; \pi)$
• Нули:	$y = 0$ при $x = 0$	нулей нет
• Промежутки знакопостоянства:	$y > 0$ при $x \in (0; \infty)$ $y < 0$ при $x \in (-\infty; 0)$	$y > 0$ при $x \in \mathbb{R}$
• Экстремумы:	нет	нет
• Промежутки монотонности:	возрастает при $x \in \mathbb{R}$	убывает при $x \in \mathbb{R}$
• Четность, нечетность:	нечетная	ни четная, ни нечетная
• Асимптоты	$y = -\frac{\pi}{2}$ и $y = \frac{\pi}{2}$	$y = 0$ и $y = \pi$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccctg} x = \pi/2$$

# Работа в группах

В – 1

В – 2

В – 3

1) Задайте с помощью формулы функцию, обратную функции  $f(x)$ . Укажите область определения и область значений полученной функции. Найдите промежутки её возрастания и убывания.

$$f(x) = x + 2$$

$$f(x) = -x + 2$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x$$

2) Заполните таблицу (учащимся предлагается таблица с заполненной первой строкой).

<b>a</b>	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	<b>a</b>	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	<b>a</b>	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$\sqrt{3}$
<i>a</i> <i>r</i> <i>c</i> <i>s</i> <i>i</i> <i>n</i> ( <i>a</i> )										<i>a</i> <i>r</i> <i>c</i> <i>c</i> <i>o</i> <i>s</i> ( <i>a</i> )										<i>a</i> <i>r</i> <i>c</i> <i>t</i> <i>g</i> ( <i>a</i> )							

# Диктант

В – 1

В – 2

1) Поставьте знак равенства или неравенства так, чтобы получилось истинное высказывание:

а)  $\arcsin 1 \dots \arccos 1$

б)  $\arcsin(-1) \dots \arctg(-1)$

в)  $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} \dots \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$

а)  $\arcsin(1) \dots \arctg(1)$

б)  $\arcsin \frac{1}{2} \dots \arccos \frac{1}{2}$

в)  $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \dots \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

2) Найдите:

а)  $\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{4}\right) =$

б)  $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) =$

а)  $\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{6}\right) =$

б)  $\arctg\left(\tg\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) =$

3) Найдите значение выражения  $x + \arccos(x)$ , при следующих значениях  $x$  :

а)  $-1$ ; б)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

а)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; б)  $\frac{1}{2}$

## Свойства и графики тригонометрических функций

### Вариант I

1. Найдите область значений функции

$$y = 2 - 3 \sin x.$$

- а)  $[-1; 5]$ ;    б)  $[-4; 2]$ ;    в)  $[-5; 1]$ ;    г)  $[-2; 4]$ .

2. Найдите «нули» функции  $y = \frac{1}{3} \cos 2x$  на промежутке

ке  $[-\frac{\pi}{2}; 2\pi]$  и запишите их сумму.

- а)  $1,5\pi$ ;    б)  $3\pi$ ;    в)  $3,75\pi$ ;    г)  $2,25\pi$ .

3. Для функции  $y = \sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6})$  найдите точку минимума на промежутке  $[0; 4\pi]$ .

- а)  $\frac{7\pi}{2}$ ;    б)  $\frac{7\pi}{6}$ ;    в)  $\frac{10\pi}{3}$ ;    г)  $\frac{5\pi}{3}$ .

4. Найдите промежутки убывания для функции

$$y = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}x\right).$$

а)  $[-\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\pi n; \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\pi n], n \in \mathbf{Z};$

б)  $[-\frac{\pi}{2} + 3\pi n; \pi + 3\pi n], n \in \mathbf{Z};$

в)  $[\frac{\pi}{2} + 3\pi n; 2\pi + 3\pi n], n \in \mathbf{Z};$

г)  $(-\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi n; \frac{2\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi n), n \in \mathbf{Z}.$

5. Расположите в порядке возрастания числа

$\sin 1, \sin(-5)$  и  $\cos 1$ .

- а)  $\sin(-5), \sin 1, \cos 1$ ;    в)  $\sin(-5), \cos 1, \sin 1$ ;  
б)  $\sin 1, \sin(-5), \cos 1$ ;    г)  $\cos 1, \sin 1, \sin(-5)$ .

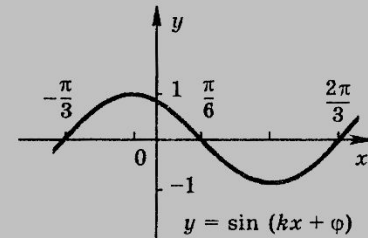
6. По графику некоторой функции запишите формулу, которой она задана.

а)  $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ ;

б)  $y = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$ ;

в)  $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ ;

г)  $y = \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$ .



7. Найдите значение выражения

$$\frac{\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)}{\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}}.$$

- а)  $3,5$ ;    б)  $-4,5\pi$ ;    в)  $-5,5$ ;    г)  $-3,5$ .

8. Вычислите  $\cos(\arcsin(-0,6))$ .

- а)  $-0,36$ ;    б)  $0,6$ ;    в)  $-0,8$ ;    г)  $0,8$ .

9. Найдите  $\arcsin x$ , если  $\arccos x = \frac{\pi}{5}$ .

- а)  $\frac{9\pi}{5}$ ;    б)  $0,3\pi$ ;    в)  $0,8\pi$ ;    г)  $-\frac{\pi}{5}$ .

10. Найдите сумму координат точки пересечения графиков функций

$$y = \arccos x \text{ и } y = \frac{\pi}{2} + x.$$

- а)  $\frac{\pi}{2}$ ;    б)  $1$ ;    в)  $\frac{\pi}{2} + 1$ ;    г)  $\pi + 1$ .

## Свойства и графики тригонометрических функций

### Вариант II

1. Найдите область значений функции  $y = 3 - 5\cos x$ .

- а)  $[-2; 2]$ ; б)  $[-3; 5]$ ; в)  $[-5; 3]$ ; г)  $[-2; 8]$ .

2. Найдите «нули» функции  $y = 0,5\sin 3x$  на промежутке  $[-\pi; \frac{\pi}{2}]$  и запишите их сумму.

- а)  $\frac{5\pi}{6}$ ; б)  $-\frac{5\pi}{3}$ ; в)  $\frac{4\pi}{3}$ ; г)  $-\frac{8\pi}{3}$ .

3. Для функции  $y = \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$  найдите точку максимума на промежутке  $[0; 6\pi]$ .

- а)  $3,75\pi$ ; б)  $4,5\pi$ ; в)  $3,25\pi$ ; г)  $5,25\pi$ .

4. Найдите промежутки возрастания для функции

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{3}\right).$$

- а)  $[-\pi + \frac{2\pi}{3}; 2\pi + \frac{2\pi}{3}]$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ;  
 б)  $[-\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}]$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ;  
 в)  $[-2\pi + 6\pi n; \pi + 6\pi n]$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ;  
 г)  $(-\frac{\pi}{2} + 6\pi n; 2\pi + 6\pi n]$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .

5. Расположите в порядке убывания числа

$$\cos 2, \quad \cos(-4) \quad \text{и} \quad \sin 2.$$

- а)  $\cos(-4), \sin 2, \cos 2$ ; б)  $\sin 2, \cos 2, \cos(-4)$ ;  
 б)  $\cos 2, \sin 2, \cos(-4)$ ; г)  $\cos(-4), \cos 2, \sin 2$ .

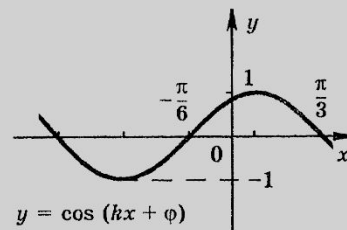
6. По графику некоторой функции запишите формулу, которой она задана.

а)  $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ ;

б)  $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ ;

в)  $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ ;

г)  $y = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$ .



7. Найдите значение выражения

$$\frac{\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \operatorname{arctg}\sqrt{3}}{\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}.$$

- а)  $-\frac{8}{9}$ ; б)  $-\frac{1}{2}$ ; в)  $\frac{3}{4}$ ; г)  $-\frac{5}{6}$ .

8. Вычислите  $\sin\left(\arccos\left(-\frac{12}{13}\right)\right)$ .

- а)  $-\frac{1}{13}$ ; б)  $\frac{5}{13}$ ; в)  $-\frac{5}{13}$ ; г)  $\frac{1}{13}$ .

9. Найдите  $\arccos x$ , если  $\arcsin x = \frac{\pi}{7}$ .

- а)  $\frac{13\pi}{7}$ ; б)  $\frac{6\pi}{7}$ ; в)  $-\frac{\pi}{7}$ ; г)  $\frac{5\pi}{14}$ .

10. Найти сумму координат точки пересечения графиков функций  $y = \arcsin x$  и  $y = x + \frac{\pi}{2} - 1$ .

- а)  $\frac{\pi}{2}$ ; б)  $1 + \frac{\pi}{2}$ ; в)  $\frac{\pi}{2} - 1$ ; г)  $1 - \frac{\pi}{2}$ .

# Контрольная работа

## Тема: «Тригонометрические функции».

В – 1

1) Постройте график функции на отрезке  $[-\pi; \pi]$  и опишите свойства функции, используя её график.

$$y = \cos(x)$$

2) Для функции:

$$y = \frac{1}{3} \sin\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{7}\right)$$

Найдите: а) наименьший положительный период; б) наименьшее и наибольшее значения.

3) Сравните числа:

а)  $\sin \frac{\pi}{7}$  и  $\sin \frac{\pi}{9}$

б)  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$  и  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$

в)  $\cos \frac{5\pi}{7}$  и  $\sin \frac{5\pi}{7}$

В – 2

$$y = \sin(x)$$

$$y = -\frac{2}{5} \cos\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{5}\right)$$

а)  $\cos \frac{\pi}{5}$  и  $\cos \frac{\pi}{6}$

б)  $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{8}$  и  $\operatorname{tg} \frac{8\pi}{9}$

в)  $\sin \frac{\pi}{7}$  и  $\cos \frac{\pi}{7}$

4) Найдите область определения функции:

$$y = \frac{1}{\sqrt{\cos x}}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$$

5) Изобразите схематически график функции:

$$y = 4 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = \frac{1}{4} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Отметьте на графике две точки, для которых

$$y = 4$$

$$y = -0,25$$

Чему равны соответствующие значения  $x$  ?

## Список использованной литературы

1. Алимов, Ш.А. Алгебра и начала анализа 10 – 11 классы. [Текст]: учебник, Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров. – М.: Просвещение, 2003.
2. Вопросы преподавания алгебры и начала анализа в средней школе. [Текст]: / – М.: Просвещение, 1981.
3. Гусев, В.А. Математика (справочные материалы). [Текст]: / В.А. Гусев, А.Г. Мордкович. – М.: Просвещение.
4. Колмогоров, А.Н. Алгебра и начала анализа 10 – 11 классы. [Текст]: учебник, А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын. М.: Просвещение, 1990.
5. Лукин, Р.Д. Устные упражнения по алгебре и началам анализа. [Текст]: / Р.Д. Лукин, Т.К. Лукина, М.С. Якунина. – М.: Просвещение, 1999.
6. Алтынов, П.И. Алгебра и начала анализа 10 – 11 классы. Тесты. [Текст]: / П.И. Алтынов. – М.: Дрофа, 2003.
7. Аверьянов, Д.И. Математика для школьников и поступающих в ВУЗы. [Текст]: / Д.И. Аверьянов, П.И. Алтынов, И.И. Баврин. – М.: Дрофа, 2000.