§ 1. Примеры комбинаторных задач и общие принципы комбинаторики

- **Правило произведения**
- **Пусть объект a_1 можно выбрать n_1, различными способами, после каждого выбора объекта a_1 объект a_2 можно выбрать n_2 различными способами,..., после каждого выбора объектов a_1, $a2$,..., a_{p-1} объект a_p можно выбрать n_p различными способами. Тогда количество способов, которыми можно выбрать a_1, a_2, ..., a_p равно $n_1 n_2 \ldots n_p$.**

- Составление слова из восьми букв можно представить как заполнение буквами_клеток следующей таблицы:

- 1 2 3 4 5 6 7 8
- На первое место можно поставить любую из восьми букв, на второе - любую из семи оставшихся и т.д. вплоть до заполнения единственным способом клетки № 8 последней оставшейся буквой. Число способов заполнения таблицы будет равно $8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=8!$
- Напомним, что символом *п!* (читается «эн факториал») обозначается произведение всех натуральных чисел от 1 до *п*: $n!=1\cdot2\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$.
- <u>Ответ</u>: $n! = 1 \bullet 2 \bullet \ldots \bullet (n-1) \bullet n$.

- **Пример 2.** Сколько четырехбуквенных «слов» можно составить из карточек «в», «е», «ч», «н», «о», «с», «т», «ь»?
- Пусть $a_к$ - $к$ -я буква слова ($к$ =1,2,3,4). Тогда n_1 = 8,n_2 = 7, n_3=6, $n_А$ = 5 и по правилу произведения сразу получаем ответ:

  $8·7·6·5 = 1680.$
- <u>Ответ:</u> 1680.

- **Пример 3.** Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и черную ладью так, чтобы они не били друг друга?

- Выбор объекта a_1 - поля для белой ладьи - может быть сделан $n_1 = 64$ способами. Независимо от выбора этого поля белая ладья бьет 15 полей, поэтому для черной ладьи остается 64-15 =49 полей: $n_2 = 49$.
- <u>Ответ:</u> число расстановок ладей равно $64 \cdot 49 = 3136$.

- **Пример 5.** Сколь различных слов можно получить, переставляя буквы слова «комбинаторика»?

- В слове «комбинаторика» 13 букв. Если бы все они были различны, то, переставляя их, можно было бы получить 13! слов. Но в нашем слове буквы к, о, и, а встречаются по два раза. Обозначим их к1,к2,о1,о2, и1,и2,а1,а2. Ясно, что слова, отличающиеся перестановкой букв к1ик2 - одинаковые, так что 13! Слов разбиваются на пары одинаковых. Следовательно, если мы не различаем к1 и к2, то число всех слов будет равно 13!/2!. Но эта совокупность также разбивается на пары одинаковых с точки зрения буквы "о" слов и т.д.
-
- Ответ: $= \dfrac{13!}{2!2!2!2!} = \dfrac{13!}{16}.$

- **Пример 6.** Сколько существует четырехзначных чисел, у которых все цифры нечетные? Сколько существует четырехзначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна четная цифра?

- Всего нечетных цифр — пять, поэтому выбор *к*-й цифры числа может быть сделан $n_к$ =5 способами (*к* =1, 2, 3, 4) а количество четырехзначных чисел, у которых все цифры нечетные, равно 5·5·5·5 = 625.

- **Правило суммы**

Если объект *a* можно выбрать *т* различными способами, а объект *b* можно выбрать *n* различными способами, причем результаты выбора объектов *a* и *b* никогда не совпадают, то выбор “либо *a,* либо *b*» можно осуществить *т + n* различными способами.

- **Пример 7.** Сколько различных пар можно образовать из 28 костей домино так, чтобы кости, входящие в пару, можно было приложить друг к другу?

- Выбор пары костей — это выбор двух карточек вида a_1b_1, a_2b_2,
- где можно считать, что $a \leq b$.
- Выберем первую кость - это можно сделать 28 способами, из них в 7 случаях кость окажется дублем, т.е. кость вида ***aa***, а в 21 случае — кость вида ***ab***, $a < b$. В первом случае вторую кость можно выбрать 6 способами, а число способов выбора пары костей по правилу произведения равно $7 \cdot 6 = 42$.
- Во втором случае вторую кость можно выбрать 12 способами — 6 костей вида а|* и 6 костей вида *|***a*** ,а число способов выбора пары равно $21 \cdot 12 = 252$.
- Следовательно по правилу суммы всего получается $42 + 252 = 294$ способа выбора упорядоченной пары.
- <u>Ответ:</u> 147 пар.

§ 2. Размещения и перестановки

- **Определение.** Всякая упорядоченная выборка объема *k* из множества, состоящего из *n* элементов, называется *размещением из n элементов по k элементов* и обозначается через A_n^k.

- **Определение.** Размещение из *n* элементов по *n* называется *перестановкой из n элементов* и обозначается через P_n .

- Справедлива формула

$$A_n^k = n\,(n-1)\ldots(n - к + 1)$$

где $1 \le к \le n$.

- На первое место в выборке можно поместить любой из *n* элементов, на второе - любой из (*n* - 1) оставшихся и т.д. После выбора элементов на(k-1)-е место останется $n-(к-1) = n-к+1$ элемен-

		…		

1 2 k-1 k

- тов, любой из которых можно поместить на *к*-*е* место. По правилу произведения получаем

$$A_n^k = (n-1)\ldots(n - к + 1)$$

В частности,

- $P_n = A_n^n = n(n-1)\ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ (2)

$$A_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)\cdot(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- **Пример 9.** Сколько шестизначных чисел, кратных 5, можно составить из цифр 0, 1,2, ..., 9 при условии, что цифры в записи числа не повторяются?

- Последней цифрой искомого числа может быть 0 или 5. В первом случае остальные пять цифр можно выбирать из множества {1,2, ..., 9}
- и число вариантов равно $A_9^5 = \frac{9!}{4!} = 15120$. Если число
- оканчивается цифрой 5, то в качестве первой цифры можно взять любую из восьми цифр 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 - нельзя использовать 0, т.к. число должно быть шестизначным. Цифры со второй по четвертую можно выбрать
- $A_8^4 = 1680$ различными способами. Следовательно, по правилу произведения имеется $8 \cdot A_8^4$ чисел, оканчивающихся цифрой 5. По правилу суммы находим, сколько существует чисел, удовлетворяющих условию задачи.
- $A_9^5 + 8 \cdot A_8^4 = 28560$.
- <u>Ответ:</u> 28560.

- **Пример 10.** Сколькими способами можно расставить на книжной полке десятитомник Пушкина так, чтобы том 2 стоял рядом с томом 1 и справа от него?
- Ответ: 9!

§ 3. **Сочетания**

- *Определение.* Всякая неупорядоченная выборка объема *к* из множества, состоящего из *n* элементов *(к≤n)*, называется *сочетанием из n элементов по к элементов* и обозначается через C_n^k.

- Из любого набора,содержащего *к* элементов, можно с помощью перестановок получить *k*! *у*порядоченных выборок объема *k*, поэтому

$$A_n^k = C_n^k \cdot k!,$$

Откуда

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}. \qquad (4)$$

$$C_n^0 = 1, \quad C_n^1 = n, \quad C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

- **Пример 11.** Хоккейная команда состоит из 2 вратарей, 7 защитников и 10 нападающих. Сколькими способами тренер может образовать стартовую шестерку, состоящую из вратаря, двух защитников и трех нападающих?

- Вратаря можно выбрать $C_2^1 = 2$ способами, защитников – $C_7^2 = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ способом, нападающих – $C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 120$ способами. Всего, по правилу произведения, существует 2 · 21 · 120 = 5040 способов выбора стартовой шестерки.
- <u>Ответ:</u> 5040.

- **Пример 12.** На плоскости проведены *n* прямых, среди которых нет ни одной пары параллельных прямых и ни одной тройки прямых, пересекающихся в одной точке. Найти число точек пересечения этих прямых и число треугольников, образованных этими прямыми.

- Число точек пересечения прямых равно числу способов выбора неупорядоченной пары прямых, т.е. C_n^2 . Аналогично, каждый треугольник определяется тройкой прямых, поэтому общее число треугольников равно C_n^3 .
- <u>Ответ:</u> C_n^2 и C_n^3 .

- **Пример 13.** Для проведения письменного экзамена по комбинаторике надо составить 4 варианта по 7 задач в каждом. Сколькими способами можно разбить 28 задач на 4 варианта?

C_7^7

- Задачи для первого варианта можно выбрать C_{28}^7 способами. После этого останется 21 задача, так что второй вариант можно составить C_{21}^7 способами. Для третьего варианта задачи можно выбрать C_{14}^7 способами, а для четвертого - C_7^7 = 1 способом.

- По правилу произведения получаем число $C_{28}^{7} C_{21}^{7} C_{14}^{7} C_{14}^{7}$. Но так как варианты равноправны, то полученное число надо разделить на 4!
- Ответ: $\frac{1}{4!} C_{28}^{7} C_{21}^{7} C_{14}^{7} C_{14}^{7} = \frac{28!}{4!(7!)^{4}}$.

- Свойства чисел C_n^k :
- 1°. $C_n^k = C_n^{n-k}$, если $0 \leq к \leq n$;
- 2°. $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$, если $0 \leq к \leq n+1$;
- 3°. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n.$

- Свойство 1°

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k$$

- Свойство 2°

$$C_n^{k+1} + C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!(n-k-1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$= \frac{n!((n-k)+(k+1))}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = C_{n+1}^{k+1},$$

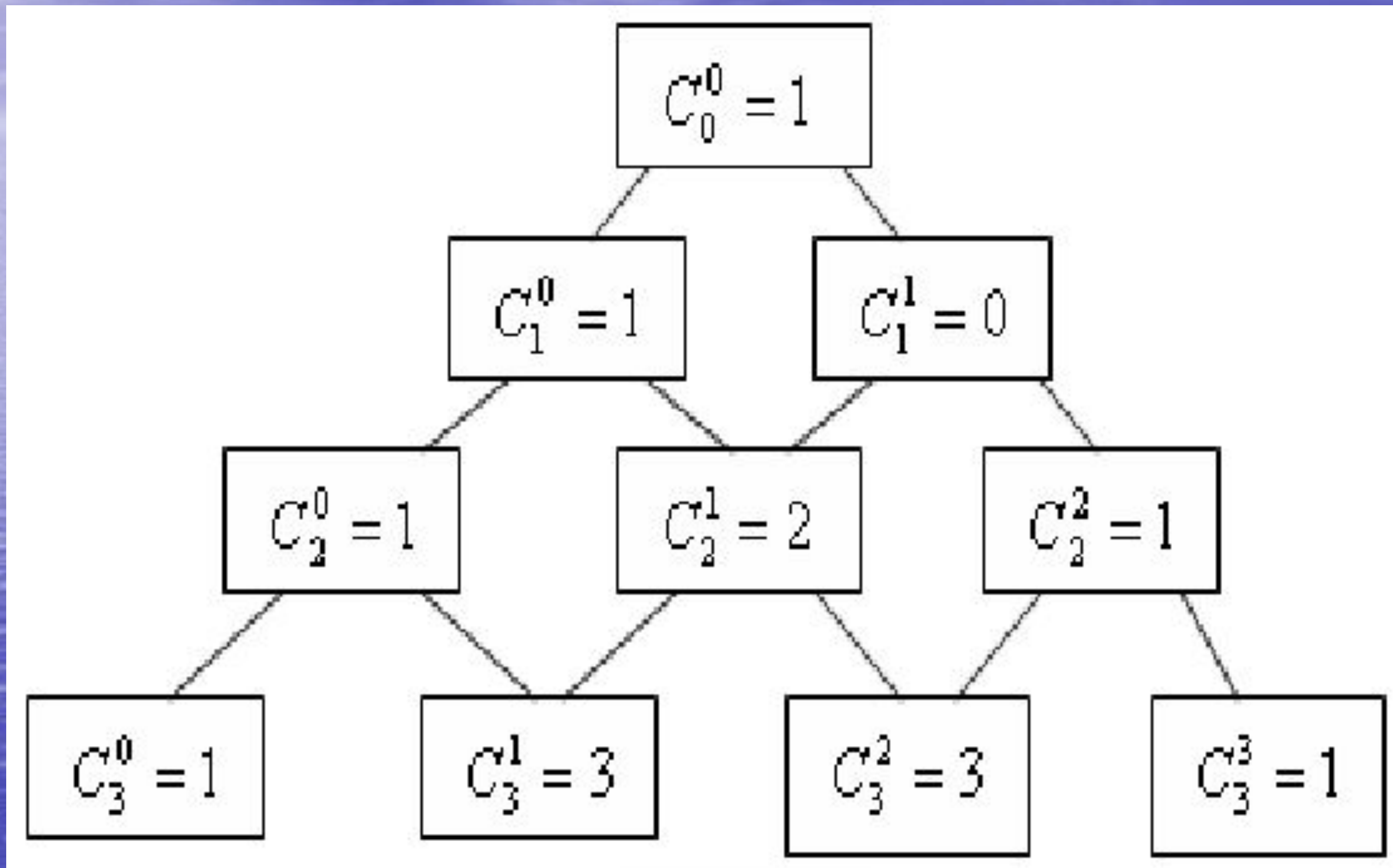
- $$C_1^0 = C_1^1 = 1$$

$$C_2^0 = C_2^2 = 1, \quad C_2^1 = C_1^0 + C_1^1 = 2,$$

$$C_3^0 = C_3^3 = 1, \quad C_3^1 = C_2^0 + C_2^1 = 3, \quad C_3^2 = C_2^1 + C_2^2 = 3,$$

$$C_4^0 = C_4^4 = 1, C_4^1 = C_3^0 + C_3^1 = 4, C_4^2 = C_3^1 + C_3^2 = 6, C_4^3 = C_3^2 + C_3^3 = 4$$

- Треугольник Паскаля:



- Свойство 3°

Положим

$$S_n = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n.$$

Так как каждое число строки с номером *n* входит в качестве слагаемого в два соседних числа следующей строки, то

$$S_{n+1} = 2S_n .$$

Следовательно, $S_{n+1} = 2S_n = 2^2 S_{n-1} = \ldots = 2^{n+1} S_0 = 2^{n+1}$, т.к. $S_0=1$.

§ 4. Бином Ньютона

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ и $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n.$$

- Если в формуле (5) взять *a* =*b* = 1, то получится известное нам свойство 3° чисел C_n^k, а если взять *a*=1, *b* = -1, то получим еще одно комбинаторное равенство:

$$C_1^0 - C_n^1 + C_n^2 + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0.$$

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_s)^n = \sum_{k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n} \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_s!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_s^{k_s},$$

- Формула (6) называется *полиномиальной.* Например,
- $(a + b + c)^2 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) + 6abc.$

- **Пример 14.** Найти n, если известно, что в разложении $(1 + x)^n$ коэффициенты при x^5 и x^{12} равны.

- В *n*-й строке треугольника Паскаля два коэффициента равны в том и только том случае, когда они занимают клетки, равноудаленные от крайних. Действительно, треугольник Паскаля симметричен: $C_n^k = C_n^{n-k}$, а при движении от края к середине строки коэффициенты возрастают: $C_n^{k+1} > C_n^k$ при $k < \frac{n-1}{2}$ и $C_n^{k+1} < C_n^k$ при $k > \frac{n-1}{2}$.

- Следовательно, C_n^5 равно C_n^{12} тогда и только тогда, когда 12 $= n-5$, т.е. $n = 17$.
- Ответ: $n = 17$.

- **Пример 15.** Найти коэффициент при x^{19} в разложении

$$(1 + x^{5} + x^{12})^{30}.$$

- В силу формулы (6)

$$(1+x^5+x^9)^{30} = \sum_{k_1+k_2+k_3=30} \frac{30!}{k_1!k_2!k_3!} 1^{k_1} x^{5k_2} x^{9k_3}.$$

- Так как уравнение $5k_2 + 9k_3 = 19$ имеет только одно решение в неотрицательных числах $k_2=2$, $k_3 = 1$, то коэффициент при x^{19} равен

$$\frac{30!}{27!2!1!} = \frac{30\cdot 29\cdot 28}{2} = 12180$$

- 2) Обозначим через $y = x^5(1+x^4)$. Тогда

$$(1+x^5+x^9)^{30} = (1+y)^{30} = 1 + C_{30}^1 y + \ldots + C_{30}^k y^k + \ldots + y^{30}.$$

Рассмотрим *k*-е слагаемое (0≤*k*≤30):

$$C_{30}^k y^k = C_{30}^k x^{5k}(1+x^4)^k = C_{30}^k x^{5k}(1 + C_k^1 x^4 + \ldots + C_k^m x^{4m} + \ldots + x^{4k}.$$

- Такое слагаемое будет содержать x^{19}, если для некоторого *m* выполняется равенство *5k* + 4*m* = 19. Ясно, что это возможно только при *k*=3 и *m=1.* Следовательно, коэффициент при x^{19} равен $C_{30}^3 C_3^1$ =12180.

- **Литература**

- 1. Кутасова А.Д., Пиголкина Т.С, Чехлов В.И., Яковлева Т.Х., Пособие по математике для поступающих в вузы. /под ред. Г.Н. Яковлева - М.: Наука, 1988.
- 2. Виленкин Н.Я. Популярная комбинаторика. — М.: Наука, 1975.
- 3. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. — Киров, 1994.

- **Контрольные вопросы**
- Сколько делителей у числа 2004^{20}?
- Сколько диагоналей в выпуклом 2004-угольнике?
- Сколько различных натуральных решений имеет неравенство
  n+m≤2004?
- 4. Чему равен коэффициент при $x^4 y^{2000}$ в выражении $(x + y)^{2004}$ после раскрытия скобок?
- 5. С помощью соответствующей строки треугольника Паскаля выпишите формулу для вычисления $(a-b)^7$.

- **Задачи**
- **1(3).** Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове «параллелограмм»?
- **2(4).** Сколькими способами можно переставлять буквы слова «размещение» так, чтобы три буквы «е» не шли подряд?
- **3(3).** Решите уравнение
- $$C_n^3 + C_n^4 = 11C_{n+1}^2.$$
- **4(3).** Известно, что никакие три диагонали выпуклого восьмиугольника не пересекаются в одной точке. Найдите число точек пересечения диагоналей.
- **5(4).** Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белого и черного слонов так, чтобы они не били друг друга?
- **6(5).** Найдите сумму всех трехзначных чисел, которые можно написать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5 (любую из цифр можно использовать несколько раз).
- **7(5).** Докажите тождество
  $$C_k^k + C_{k+1}^k + \ldots + C_n^k = C_{n+1}^{k+1} (0 \le k \le n).$$
- **8(6).** Сколькими способами можно распределить 12 различных книг по четырем полкам так, чтобы на каждой полке оказалась ровно три книги?
- **9(6).** Сколькими способами можно распределить 12 одинаковых книг по четырем полкам так, чтобы на каждой полке была хотя бы одна книга?

  В задачах №8 и №9 все полки разные.
- **10(6).** В выпуклом восьмиугольнике проведены все диагонали, причем известно, что никакие три диагонали не пересекаются в одной точке. На сколько частей разделится восьмиугольник?
- **11(6).** Найдите наибольший коэффициент многочлена $(1 + 2x)^{10}$.
- **12(6).** Найдите коэффициент при x^k в разложении по степеням x $1+(1+x)+\ldots+(1+x)^n$.