

**§ 1. Примеры
комбинаторных задач и
общие принципы
комбинаторики**

● **Правило произведения**

- Пусть объект a_1 можно выбрать n_1 , различными способами, после каждого выбора объекта a_1 объект a_2 можно выбрать n_2 различными способами, ..., после каждого выбора объектов a_1, a_2, \dots, a_{p-1} объект a_p можно выбрать n_p различными способами. Тогда количество способов, которыми можно выбрать a_1, a_2, \dots, a_p равно $n_1 n_2 \dots n_p$.

- Составление слова из восьми букв можно представить как заполнение буквами_клеток следующей таблицы:

--	--	--	--	--	--	--	--

- 1 2 3 4 5 6 7 8
- На первое место можно поставить любую из восьми букв, на второе - любую из семи оставшихся и т.д. вплоть до заполнения единственным способом клетки № 8 последней оставшейся буквой. Число способов заполнения таблицы будет равно $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8!$
- Напомним, что символом $n!$ (читается «эн факториал») обозначается произведение всех натуральных чисел от 1 до n : $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$.
- Ответ: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$.

- **Пример 2.** Сколько четырехбуквенных «слов» можно составить из карточек «в», «е», «ч», «н», «о», «с», «т», «ь»?
- Пусть a_k - k -я буква слова ($k = 1, 2, 3, 4$). Тогда $n_1 = 8, n_2 = 7, n_3 = 6, n_4 = 5$ и по правилу произведения сразу получаем ответ:
$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680.$$
- Ответ: 1680.

- **Пример 3.** Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и черную ладью так, чтобы они не били друг друга?

- Выбор объекта a_1 - поля для белой ладьи - может быть сделан $n_1 = 64$ способами. Независимо от выбора этого поля белая ладья бьет 15 полей, поэтому для черной ладьи остается $64 - 15 = 49$ полей: $n_2 = 49$.
- Ответ: число расстановок ладей равно $64 \cdot 49 = 3136$.

- **Пример 5.** Сколь различных слов можно получить, переставляя буквы слова «комбинаторика»?

- В слове «комбинаторика» 13 букв. Если бы все они были различны, то, переставляя их, можно было бы получить $13!$ слов. Но в нашем слове буквы к, о, и, а встречаются по два раза. Обозначим их $k_1, k_2, o_1, o_2, i_1, i_2, a_1, a_2$. Ясно, что слова, отличающиеся перестановкой букв k_1, k_2 - одинаковые, так что $13!$ слов разбиваются на пары одинаковых. Следовательно, если мы не различаем k_1 и k_2 , то число всех слов будет равно $13!/2!$. Но эта совокупность также разбивается на пары одинаковых с точки зрения буквы "о,, слов и т.д.



- $$\text{Ответ: } = \frac{13!}{2!2!2!2!} = \frac{13!}{16}$$



- **Пример 6.** Сколько существует четырехзначных чисел, у которых все цифры нечетные? Сколько существует четырехзначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна четная цифра?

- Всего нечетных цифр — пять, поэтому выбор k -й цифры числа может быть сделан $n_k = 5$ способами ($k = 1, 2, 3, 4$) а количество четырехзначных чисел, у которых все цифры нечетные, равно $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$.

● Правило суммы

Если объект a можно выбрать t различными способами, а объект b можно выбрать n различными способами, причем результаты выбора объектов a и b никогда не совпадают, то выбор «либо a , либо b » можно осуществить $t + n$ различными способами.

- **Пример 7.** Сколько различных пар можно образовать из 28 костей домино так, чтобы кости, входящие в пару, можно было приложить друг к другу?

- Выбор пары костей — это выбор двух карточек вида a_1b_1, a_2b_2 ,
- где можно считать, что $a \leq b$.
- Выберем первую кость - это можно сделать 28 способами, из них в 7 случаях кость окажется дублем, т.е. кость вида aa , а в 21 случае — кость вида $ab, a < b$. В первом случае вторую кость можно выбрать 6 способами, а число способов выбора пары костей по правилу произведения равно $7 \cdot 6 = 42$.
- Во втором случае вторую кость можно выбрать 12 способами — 6 костей вида $a|*$ и 6 костей вида $*|a$, а число способов выбора пары равно $21 \cdot 12 = 252$.
- Следовательно по правилу суммы всего получается $42 + 252 = 294$ способа выбора упорядоченной пары.
- Ответ: 147 пар.

§ 2. Размещения и перестановки

- **Определение.** Всякая упорядоченная выборка объема k из множества, состоящего из n элементов, называется *размещением из n элементов по k элементов* и обозначается через A_n^k .

- **Определение.** Размещение из n элементов по n называется *перестановкой из n элементов* и обозначается через P_n .

- Справедлива формула

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1)$$

где $1 \leq k \leq n$.

- На первое место в выборке можно поместить любой из n элементов, на второе - любой из $(n - 1)$ оставшихся и т.д. После выбора элементов на $(k-1)$ -е место останется $n - (k-1) = n - k + 1$ элемен-



- тов, любой из которых можно поместить на k -е место. По правилу произведения получаем

$$A_n = (n-1) \dots (n - k + 1)$$

В частности,

- $P_n = A_n = n(n-1) \dots \cdot 2 \cdot 1 = n! \quad (2)$

$$A_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)\cdot\underbrace{(n-k)!}_{(n-k)!}}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- **Пример 9.** Сколько шестизначных чисел, кратных 5, можно составить из цифр 0, 1, 2, ..., 9 при условии, что цифры в записи числа не повторяются?

- Последней цифрой искомого числа может быть 0 или 5. В первом случае остальные пять цифр можно выбирать из множества $\{1, 2, \dots, 9\}$
- и число вариантов равно $A_9 = \frac{9!}{4!} = 15120$. Если число
- оканчивается цифрой 5, то в качестве первой цифры можно взять любую из восьми цифр 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 - нельзя использовать 0, т.к. число должно быть шестизначным. Цифры со второй по четвертую можно выбрать
- $A_8 = 1680$ различными способами. Следовательно, по правилу произведения имеется $8 \cdot A_8$ чисел, оканчивающихся цифрой 5. По правилу суммы находим, сколько существует чисел, удовлетворяющих условию задачи.
- $A_9 + 8 \cdot A_8 = 28560$.
- Ответ: 28560.

- **Пример 10.** Сколькими способами можно расставить на книжной полке десятитомник Пушкина так, чтобы том 2 стоял рядом с томом 1 и справа от него?
- Ответ: 9!

§ 3. Сочетания

- *Определение.* Всякая неупорядоченная выборка объема k из множества, состоящего из n элементов ($k \leq n$), называется *сочетанием из n элементов по k элементов* и обозначается через C_n
 k

▪

- Из любого набора, содержащего k элементов, можно с помощью перестановок получить $k!$ упорядоченных выборок объема k , поэтому

$$A_n^k = C_n^k \cdot k!,$$

Откуда

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

(4)

$$C_n^0 = 1, \quad C_n^1 = n, \quad C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

- **Пример 11.** Хоккейная команда состоит из 2 вратарей, 7 защитников и 10 нападающих. Сколькими способами тренер может образовать стартовую шестерку, состоящую из вратаря, двух защитников и трех нападающих?

- Вратаря можно выбрать способами, защитников — способами, нападающих — способами. Всего, по правилу произведения, существует $2 \cdot 21 \cdot 120 = 5040$ способов выбора стартовой шестерки.

$$C_2^1 = 2$$

$$C_7^2 = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$$

$$C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 120$$

- Ответ: 5040.

- **Пример 12.** На плоскости проведены n прямых, среди которых нет ни одной пары параллельных прямых и ни одной тройки прямых, пересекающихся в одной точке. Найти число точек пересечения этих прямых и число треугольников, образованных этими прямыми.

- Число точек пересечения прямых равно числу способов выбора неупорядоченной пары прямых, т.е. C_n^2 . Аналогично, каждый треугольник определяется тройкой прямых, поэтому общее число треугольников равно C_n^3 .
- Ответ: C_n^2 и C_n^3 .

- **Пример 13.** Для проведения письменного экзамена по комбинаторике надо составить 4 варианта по 7 задач в каждом. Сколькими способами можно разбить 28 задач на 4 варианта?

- Задачи для первого варианта можно выбрать C_{28}^7 способами. После этого останется 21 задача, так что второй вариант можно составить C_{21}^7 способами. Для третьего варианта задачи можно выбрать C_{14}^7 способами, а для четвертого - $C_7^7 = 1$ способом.

- По правилу произведения получаем число $C_{28}^7 C_{21}^7 C_{14}^7 C_{14}^7$. Но так как варианты равноправны, то полученное число надо разделить на $4!$
- Ответ: $\frac{1}{4!} C_{28}^7 C_{21}^7 C_{14}^7 C_{14}^7 = \frac{28!}{4!(7!)^4}$.

- Свойства чисел C_n^k :

- 1°. $C_n^k = C_n^{n-k}$, если $0 \leq k \leq n$;

- 2°. $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$, если $0 \leq k \leq n$;

- 3°. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$.

- СВОЙСТВО 1°

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k$$

- СВОЙСТВО 2°

$$\begin{aligned} C_n^{k+1} + C_n^k &= \frac{n!}{(n-k)!(n-k-1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!((n-k)+(k+1))}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = C_{n+1}^{k+1}, \end{aligned}$$

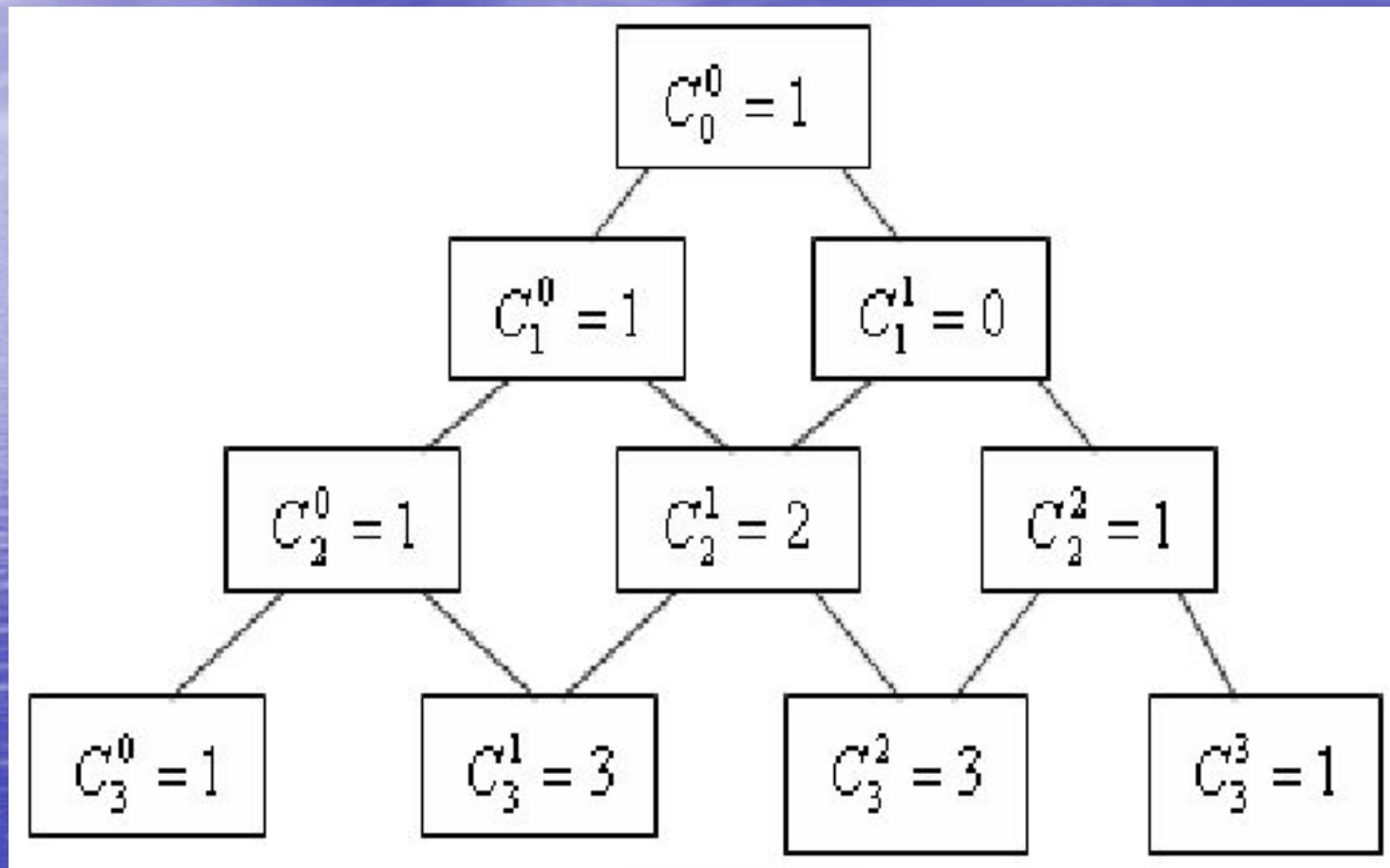
$$C_1^0 = C_1^1 = 1$$

$$C_2^0 = C_2^2 = 1, \quad C_2^1 = C_1^0 + C_1^1 = 2,$$

$$C_3^0 = C_3^3 = 1, \quad C_3^1 = C_2^0 + C_2^1 = 3, \quad C_3^2 = C_2^1 + C_2^2 = 3,$$

$$C_4^0 = C_4^4 = 1, C_4^1 = C_3^0 + C_3^1 = 4, C_4^2 = C_3^1 + C_3^2 = 6, C_4^3 = C_3^2 + C_3^3 = 4$$

- Треугольник Паскаля:



- СВОЙСТВО 3°

Положим

$$S_n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n.$$


Так как каждое число строки с номером n входит в качестве слагаемого в два соседних числа следующей строки, то

$$S_{n+1} = 2S_n.$$

Следовательно, $S_{n+1} = 2S_n = 2^2 S_{n-1} = \dots = 2^{n+1} S_0 = 2^{n+1}$,
т.к. $S_0 = 1$.

§ 4. Бином Ньютона

• $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ и $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.


$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n b^n.$$

- Если в формуле (5) взять $a = b = 1$, то получится известное нам свойство 3° чисел C_n^k а если взять $a=1, b = -1$, то получим еще одно комбинаторное равенство:

$$C_1^0 - C_n^1 + C_n^2 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0.$$

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_s)^n = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_s=n} \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_s!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_s^{k_s},$$

- Формула (6) называется *полиномиальной*.

Например,

- $(a^2 + b^2 + c^2)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) + 6abc.$

- **Пример 14.** Найти n , если известно, что в разложении $(1 + x)^n$ коэффициенты при x^5 и x^{12} равны.

- В n -й строке треугольника Паскаля два коэффициента равны в том и только том случае, когда они занимают клетки, равноудаленные от крайних.
Действительно, треугольник Паскаля симметричен: $C_n^k = C_n^{n-k}$, а при движении от края к середине строки коэффициенты возрастают: $C_n^{k+1} > C_n^k$ при $k < \frac{n-1}{2}$ и $C_n^{k+1} < C_n^k$ при $k > \frac{n-1}{2}$.

- Следовательно, C_n^5 равно C_n^{12} тогда и только тогда, когда $12 = n-5$, т.е. $n = 17$.
- Ответ: $n = 17$.

- **Пример 15.** Найти коэффициент при x^{19} в разложении

$$(1 + x^5 + x^{12} + x^{30})^{19}.$$

- В силу формулы (6)

$$(1 + x^5 + x^9)^{30} = \sum_{k_1+k_2+k_3=30} \frac{30!}{k_1!k_2!k_3!} 1^{k_1} x^{5k_2} x^{9k_3}.$$

- Так как уравнение $5k_2 + 9k_3 = 19$ имеет только одно решение в неотрицательных числах $k_2=2, k_3 = 1$, то коэффициент при x^{19} равен

$$\frac{30!}{27!2!1!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{2} = 12180$$

- 2) Обозначим через $y = x^5(1 + x^4)$.

Тогда

$$(1 + x^5 + x^9)^{30} = (1 + y)^{30} = 1 + C_{30}^1 y + \dots + C_{30}^k y^k + \dots + y^{30} .$$

Рассмотрим k -е слагаемое ($0 \leq k \leq 30$):

$$C_{30}^k y^k = C_{30}^k x^{5k} (1 + x^4)^k = C_{30}^k x^{5k} (1 + C_k^1 x^4 + \dots + C_k^m x^{4m} + \dots + x^{4k}) .$$

- Такое слагаемое будет содержать x^{19} ,
если для некоторого t выполняется
равенство $5k + 4t = 19$. Ясно, что это
возможно только при $k=3$ и $t=1$.

Следовательно, коэффициент при x^{19}
равен $C_{30}^3 C_3^1 = 12180$.

● Литература

- 1. Кутасова А.Д., Пиголкина Т.С, Чехлов В.И., Яковлева Т.Х.,
Пособие по математике для поступающих в вузы. /под ред. Г.Н. Яковлева - М.: Наука, 1988.
- 2. Виленкин Н.Я. Популярная комбинаторика. — М.: Наука, 1975.
- 3. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. — Киров, 1994.

● **Контрольные вопросы**

- Сколько делителей у числа 2004^{20} ?
- Сколько диагоналей в выпуклом 2004-угольнике?
- Сколько различных натуральных решений имеет неравенство $n+m \leq 2004$?
- 4. Чему равен коэффициент при $x^4 y^{2000}$ в выражении $(x + y)^{2004}$ после раскрытия скобок?
- 5. С помощью соответствующей строки треугольника Паскаля выпишите формулу для вычисления $(a-b)^7$.

● Задачи

- **1(3).** Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове «параллелограмм»?
- **2(4).** Сколькими способами можно переставлять буквы слова «размещение» так, чтобы три буквы «е» не шли подряд?
- **3(3).** Решите уравнение
$$C_n^3 + C_n^4 = 11C_{n+1}^2.$$
- **4(3).** Известно, что никакие три диагонали выпуклого восьмиугольника не пересекаются в одной точке. Найдите число точек пересечения диагоналей.
- **5(4).** Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белого и черного слонов так, чтобы они не били друг друга?
- **6(5).** Найдите сумму всех трехзначных чисел, которые можно написать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5 (любую из цифр можно использовать несколько раз).
- **7(5).** Докажите тождество
$$C_k^k + C_{k+1}^k + \dots + C_n^k = C_{n+1}^{k+1} (0 \leq k \leq n).$$
- **8(6).** Сколькими способами можно распределить 12 различных книг по четырем полкам так, чтобы на каждой полке оказалась ровно три книги?
- **9(6).** Сколькими способами можно распределить 12 одинаковых книг по четырем полкам так, чтобы на каждой полке была хотя бы одна книга?
В задачах №8 и №9 все полки разные.
- **10(6).** В выпуклом восьмиугольнике проведены все диагонали, причем известно, что никакие три диагонали не пересекаются в одной точке. На сколько частей разделится восьмиугольник? 10
- **11(6).** Найдите наибольший коэффициент многочлена $(1 + 2x)^n$.
- **12(6).** Найдите коэффициент при x^n в разложении по степеням x $1 + (1+x) + \dots + (1+x)^n$.