



РАНХиГС

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ



ИГСУ

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Зарубежное регионоведение

1 курс

Сафонова Татьяна Евгеньевна, к.ф.-м.н., доцент

Литературв

- Дискретная математика. Курс лекций / И.А. Палий. М.: Эксмо, 2008.
- Дискретная математика. Курс лекций и практических занятий/ С.Д. Шапорев. СПб.:БХВ-Петербург, 2007.
- Учебно-методическое пособие по математике. Математическая логика. Дискретная математика. Линейная алгебра / Под ред. А.Н. Данчула. М.: Изд-во РАГС, 2004.
- Кремер Н.Ш. Высшая математика для бакалавриата экономических специальностей. М.: Юрайт, 2014.



РАНХиГС

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Элементы линейной алгебры

Алгебра
матриц

Матрица

- **Матрица A размера $m \times n$ –**
*таблица чисел, содержащая m
строк и n столбцов.*
- **A_{mn}**

- *Элемент матрицы A , находящийся в i -ой строке и j -ом столбце – a_{ij} .*
- $A_{m\ n} = [a_{ij}]_{m\ n}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Матрица, в которой имеется только одна строка, – **вектор-строка**

$$A = (a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n})$$

- Матрица, в которой есть только один столбец, – **вектор-столбец**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица

- Матрица, в которой число строк равно числу столбцов, – **квадратная матрица n-го порядка**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица

- **Диагональная матрица** – квадратная матрица, у которой все элементы, не принадлежащие главной диагонали, равны нулю
- **Главная диагональ матрицы** – множество ее элементов, у которых номер строки равен номеру столбца

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Единичная матрица

- **Единичная матрица** – диагональная матрица, у которой все элементы, принадлежащие главной диагонали, равны единице

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- **Верхней (нижней) треугольной матрицей** называется квадратная матрица произвольного порядка, все элементы которой, стоящие под (над) главной диагональю, равны нулю.
- **Нулевой матрицей** называется матрица произвольного порядка, все элементы которой равны нулю.

ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

Транспонирование матрицы

- Результат транспонирования матрицы размера $m \times n$ – матрица размера $n \times m$, столбцы которой являются строками исходной матрицы и записаны в том же порядке.
- $B = A^T$ $[b_{ij}]_{n \times m} = [a_{ji}]_{m \times n}$

Умножение матрицы на число

- Результат умножения матрицы размера $m \times n$ на число λ – матрица того же размера, все элементы которой равны соответствующим элементам исходной матрицы, умноженным на это число.

$$B_{mn} = \lambda A_{mn} \quad [b_{ij}]_{mn} = [\lambda a_{ij}]_{mn}$$

Сложение матриц

- *Результат сложения двух матриц одинакового размера $m \times n$ – матрица того же размера, все элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц-слагаемых.*

$$C_{mn} = A_{mn} + B_{mn}$$

$$[c_{ij}]_{mn} = [a_{ij} + b_{ij}]_{mn}$$

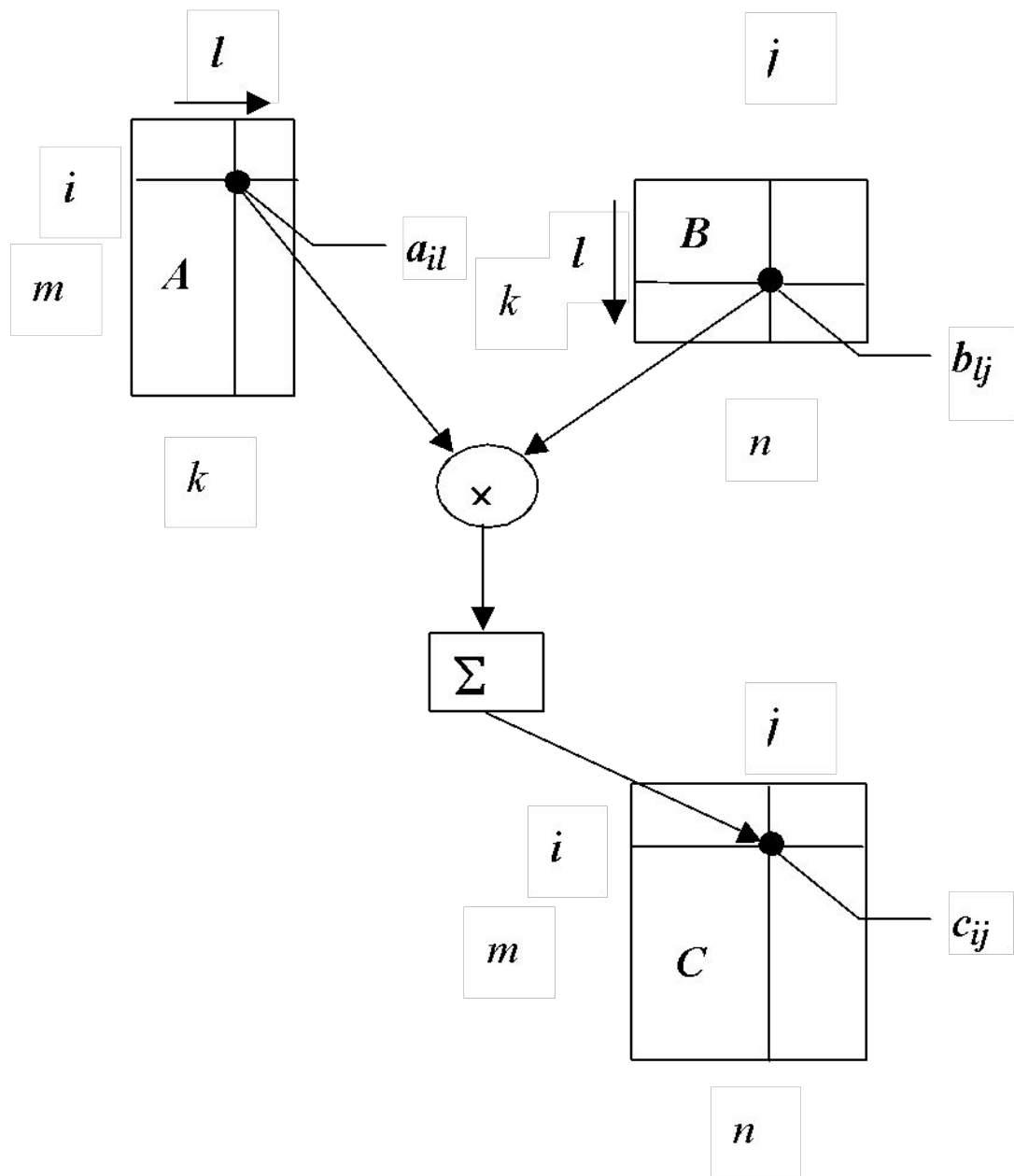
Вычитание матриц

- *Результат вычитания двух матриц одинакового размера $m \times n$ – матрица того же размера, все элементы которой равны разности соответствующих элементов матриц-слагаемых.*
- $C_{mn} = A_{mn} - B_{mn}$
- $[c_{ij}]_{mn} = [a_{ij} - b_{ij}]_{mn}$

Умножение матриц

- Результат умножения матрицы A размера $m \times k$ на матрицу B размера $k \times n$ – матрица C размера $m \times n$, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме всех попарных произведений элементов, стоящих на одинаковых местах в i -ой строке матрицы A и j -ом столбце матрицы B .
- $$C_{mn} = A_{mk} B_{kn}$$

Умножение матриц



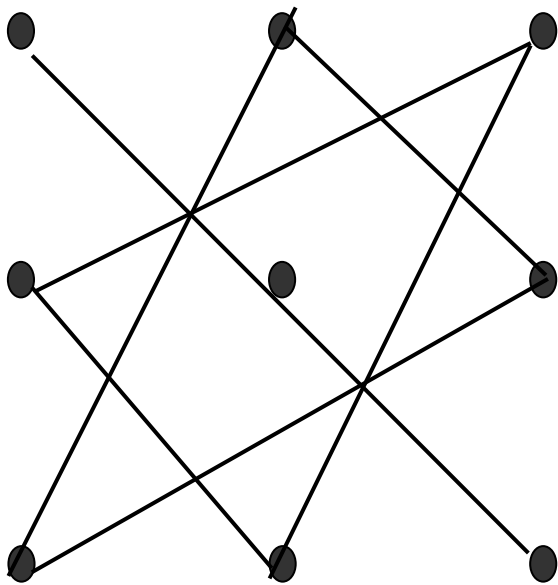
Свойства операций:

- 1. $A+B = B+A$
- 2. $(A+B)+C = A+(B+C)$
- 3. $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$
- 4. $A(B+C) = AB+AC$ $(A+B)C = AC+BC$
- 5. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
- 6. $A(B C) = (AB)C$
- 7. В общем случае $AB \neq BA$

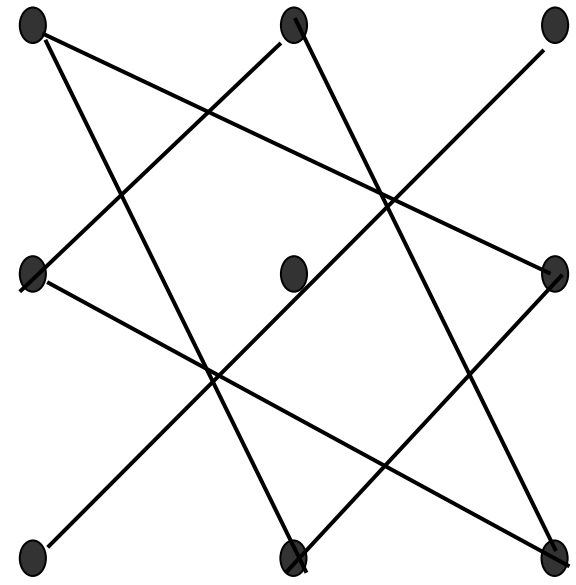
ОПРЕДЕЛИТЕЛИ КВАДРАТНЫХ МАТРИЦ

- A – квадратная матрица порядка n , ее определитель обозначается $\det(A)$ или $|A|$.
- Если $n = 1$, то $|A| = |a_{11}| = a_{11}$
- Если $n = 2$, то:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$



+



-

- **Минор** M_{ij} элемента a_{ij} матрицы A n -го порядка – определитель матрицы $(n-1)$ -го порядка, полученной из A вычеркиванием i -ой строки и j -го столбца.
- **Алгебраическое дополнение** A_{ij} элемента a_{ij} матрицы A n -го порядка – его минор, взятый со знаком, определяемым по правилу шахматной доски

Разложение определителя по строке (или столбцу):

$$|A| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_{l=1}^n a_{il} \cdot A_{il}$$

$$|A| = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \dots + a_{nj} \cdot A_{nj} = \sum_{l=1}^n a_{lj} \cdot A_{lj}$$

- *Квадратная матрица, определитель которой равен нулю – **вырожденная.***



РАНХиГС
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ



ИГСУ
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Спасибо за внимание!