



**РАНХиГС**

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА  
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ  
ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ



**ИГСУ**

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА  
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ  
ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

# ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

*Зарубежное регионоведение*

*1 курс*

Сафонова Татьяна Евгеньевна, к.ф.-м.н., доцент

# Литературв

- Дискретная математика. Курс лекций / И.А. Палий. М.: Эксмо, 2008.
- Дискретная математика. Курс лекций и практических занятий/ С.Д. Шапорев. СПб.:БХВ-Петербург, 2007.
- Учебно-методическое пособие по математике. Математическая логика. Дискретная математика. Линейная алгебра / Под ред. А.Н. Данчула. М.: Изд-во РАГС, 2004.
- Кремер Н.Ш. Высшая математика для бакалавриата экономических специальностей. М.: Юрайт, 2014.



**РАНХиГС**

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА  
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ  
ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

# Элементы линейной алгебры

Алгебра  
матриц

# Матрица

- **Матрица  $A$  размера  $m \times n$  –**  
*таблица чисел, содержащая  $m$   
строк и  $n$  столбцов.*
- **$A_{mn}$**

- *Элемент матрицы  $A$ , находящийся в  $i$ -ой строке и  $j$ -ом столбце –  $a_{ij}$ .*
- $A_{m n} = [a_{ij}]_{m n}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Матрица, в которой имеется только одна строка, – **вектор-строка**

$$A = (a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n})$$

- Матрица, в которой есть только один столбец, – **вектор-столбец**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

# Квадратная матрица

- Матрица, в которой число строк равно числу столбцов, – **квадратная матрица n-го порядка**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

# Диагональная матрица

- **Диагональная матрица** – квадратная матрица, у которой все элементы, не принадлежащие главной диагонали, равны нулю
- **Главная диагональ матрицы** – множество ее элементов, у которых номер строки равен номеру столбца

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$



# Единичная матрица

- **Единичная матрица** – диагональная матрица, у которой все элементы, принадлежащие главной диагонали, равны единице

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- **Верхней (нижней) треугольной матрицей** называется квадратная матрица произвольного порядка, все элементы которой, стоящие под (над) главной диагональю, равны нулю.
- **Нулевой матрицей** называется матрица произвольного порядка, все элементы которой равны нулю.

# **ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ**

# Транспонирование матрицы

- Результат транспонирования матрицы размера  $m \times n$  – матрица размера  $n \times m$ , столбцы которой являются строками исходной матрицы и записаны в том же порядке.
- $B = A^T$        $[b_{ij}]_{n \times m} = [a_{ji}]_{m \times n}$

## Умножение матрицы на число

- Результат умножения матрицы размера  $m \times n$  на число  $\lambda$  – матрица того же размера, все элементы которой равны соответствующим элементам исходной матрицы, умноженным на это число.

$$B_{mn} = \lambda A_{mn} \quad [b_{ij}]_{mn} = [\lambda a_{ij}]_{mn}$$

## Сложение матриц

- *Результат сложения двух матриц одинакового размера  $m \times n$  – матрица того же размера, все элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц-слагаемых.*

$$C_{mn} = A_{mn} + B_{mn}$$

$$[c_{ij}]_{mn} = [a_{ij} + b_{ij}]_{mn}$$

## Вычитание матриц

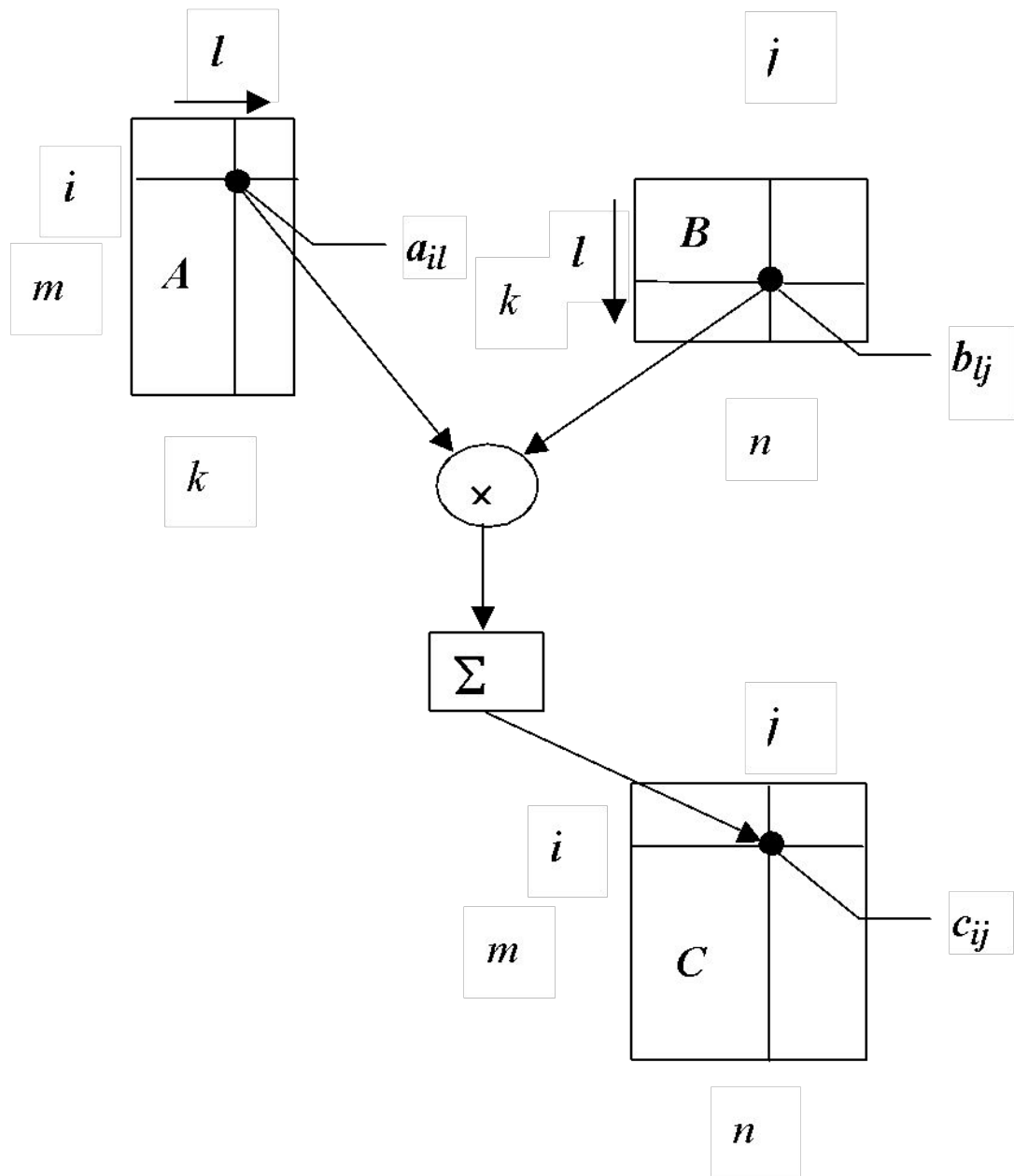
- *Результат вычитания двух матриц одинакового размера  $m \times n$  – матрица того же размера, все элементы которой равны разности соответствующих элементов матриц-слагаемых.*
- $C_{mn} = A_{mn} - B_{mn}$
- $[c_{ij}]_{mn} = [a_{ij} - b_{ij}]_{mn}$

## Умножение матриц

- Результат умножения матрицы  $A$  размера  $m \times k$  на матрицу  $B$  размера  $k \times n$  – матрица  $C$  размера  $m \times n$ , каждый элемент которой  $c_{ij}$  равен сумме всех попарных произведений элементов, стоящих на одинаковых местах в  $i$ -ой строке матрицы  $A$  и  $j$ -ом столбце матрицы  $B$ .
- $$C_{mn} = A_{mk} B_{kn}$$



# Умножение матриц



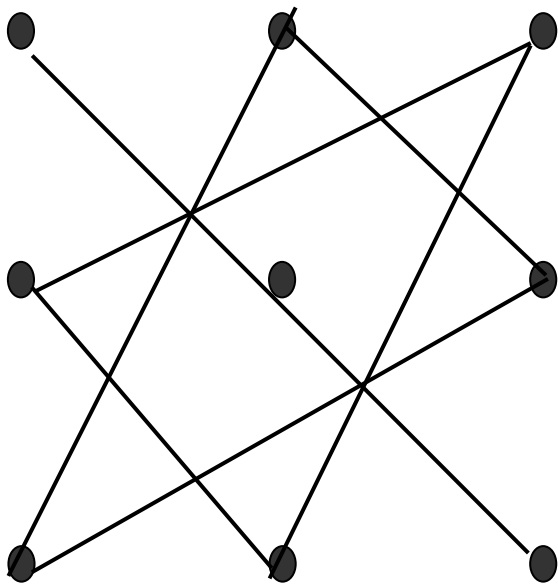
## Свойства операций:

- 1.  $A+B = B+A$
- 2.  $(A+B)+C = A+(B+C)$
- 3.  $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$
- 4.  $A(B+C) = AB+AC$      $(A+B)C = AC+BC$
- 5.  $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
- 6.  $A(B C) = (AB)C$
- 7. В общем случае  $AB \neq BA$

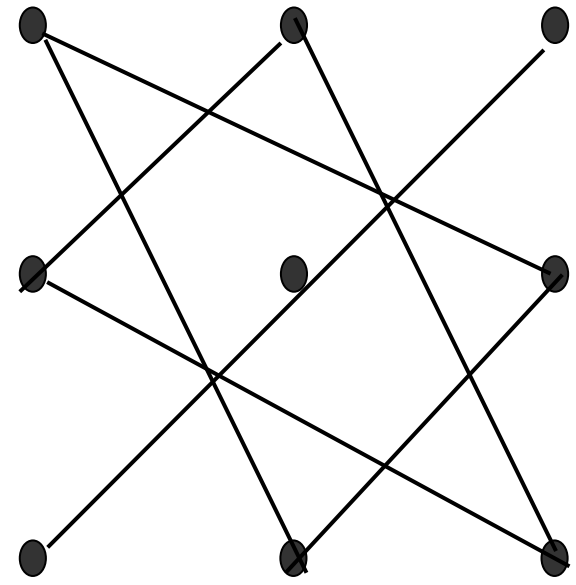
# ОПРЕДЕЛИТЕЛИ КВАДРАТНЫХ МАТРИЦ

- $A$  – квадратная матрица порядка  $n$ , ее определитель обозначается  $\det(A)$  или  $|A|$ .
- Если  $n = 1$ , то  $|A| = |a_{11}| = a_{11}$
- Если  $n = 2$ , то:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$



+



-

- **Минор**  $M_{ij}$  элемента  $a_{ij}$  матрицы  $A$   $n$ -го порядка – определитель матрицы  $(n-1)$ -го порядка, полученной из  $A$  вычеркиванием  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца.
- **Алгебраическое дополнение**  $A_{ij}$  элемента  $a_{ij}$  матрицы  $A$   $n$ -го порядка – его минор, взятый со знаком, определяемым по правилу шахматной доски

# Разложение определителя по строке (или столбцу):

$$|A| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_{l=1}^n a_{il} \cdot A_{il}$$

$$|A| = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \dots + a_{nj} \cdot A_{nj} = \sum_{l=1}^n a_{lj} \cdot A_{lj}$$

- *Квадратная матрица, определитель которой равен нулю – **вырожденная.***



**РАНХиГС**  
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА  
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ  
ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ



**ИГСУ**  
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА  
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ  
ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Спасибо за внимание!