ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИИ СИСТЕМ

«Никакое определение не может в полном объёме охватить реально существующую деятельность по математическому моделированию»

ЛЕКЦИЯ 7

Математическая модель — это «„эквивалент“ объекта, отражающий в математической форме важнейшие его свойства — законы, которым он подчиняется, связи, присущие составляющим его частям, и т. д.»

Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. — 2-е изд., испр.. — М.: Физматлит, 2001. — ISBN 5-9221-0120-X.

ОСНОВЫ МЕТОДОЛОГИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Этапы построения математической модели

1
- Постановка задачи
- Изучение и сбор информации об объекте-оригинале

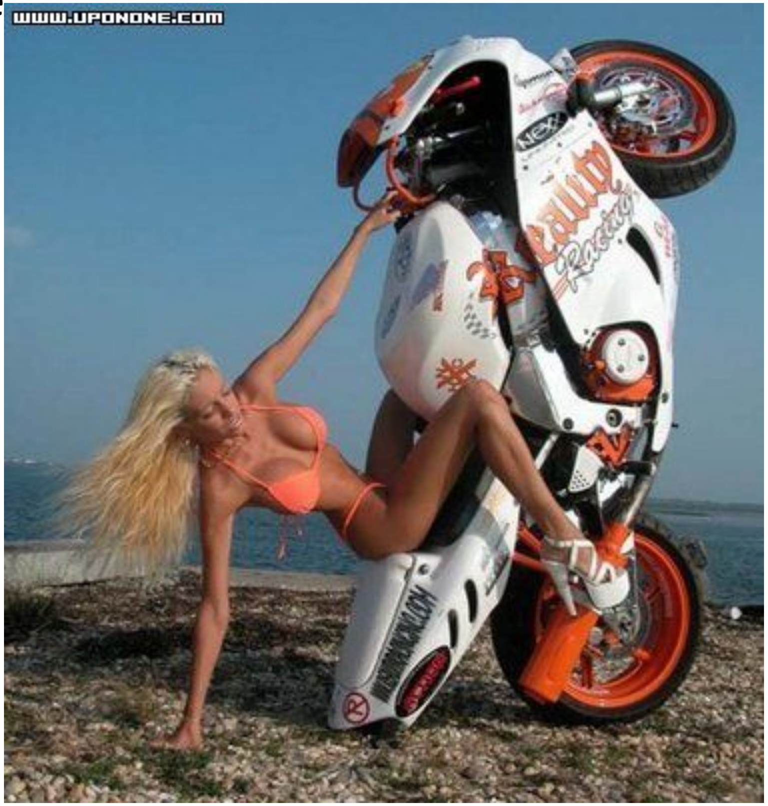
2
- Формализация операций
- Выбор метода решения

3
- Анализ полученных результатов
- Корректировка модели
- Оптимизация модели

ЭТАПЫ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Постановка задачи

Mathematical model an equation representing an idea (http://www.cliffsnotes.com/Section/id-305499,articleId-57021.html)



Оценивая проблему исследования или проектирования вырабатывается общий подход к исследуемой проблеме. Определяется основная цель моделирования и пути ее достижения. Выделяются задачи моделирования, в результате решения которых цель моделирования может быть достигнута. Осуществляется анализ или подбор подходящих гипотез, аналогий, теорий. В результате этого этапа возникает **гипотетическая модель**

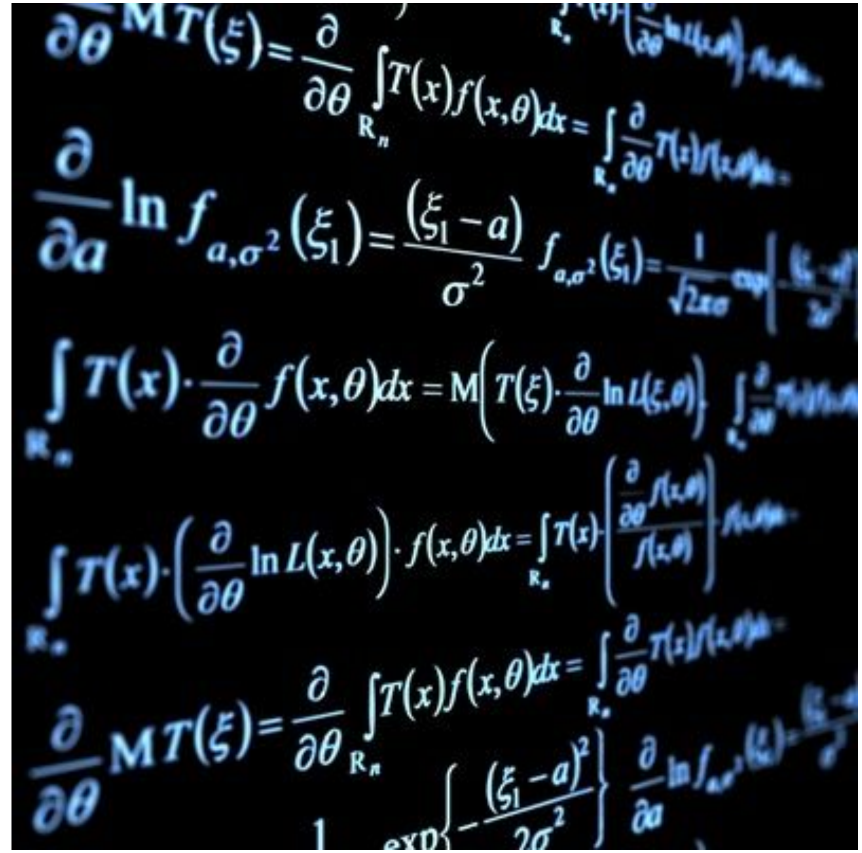
ЭТАПЫ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Изучение и сбор информации об объекте-оригинале

Проводится подробное описание моделируемого объекта с позиций системного подхода. Осуществляется сбор и обработка экспериментальных данных и данных наблюдений, их учет и систематизация. Выявляются возможные состояния системы. Для каждого из состояний определяются входные и выходные характеристики, определяются элементы системы и их свойства, взаимосвязи между элементами, строятся структура модели или моделей, если состояний системы несколько. Накладываются ограничения. Логически соединяют функции элементов и связывают их с состоянием системы в целом. Такое представление называется **концептуальной моделью**.

ЭТАПЫ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Формализация



На основе концептуальной модели, опираясь на цель моделирования и понимание природы исследуемой системы, выделят существенные характеристики. Выделяют управляемые и неуправляемые параметры и производят символизацию. Опираясь на структурную схему системы, описывают связи между элементами объекта в виде математических выражений. Накладываются принятые ограничения на значения управляемых параметров. Формируется критерий эффективности и целевая функция. Полученное описание называют **аналитической или математической**

ЭТАПЫ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Выбор метода решения

На основании принятой математической модели обосновывается метод ее решения с учетом знаний и предпочтений пользователя и разработчика. Выбирается среда для решения вычислительных задач: ручные и/или машинные методы проектирования, расчета и исследований, стандартные аппаратные и программные средства. В случае необходимости применения уникальных приёмов обработки и анализа принимается решение о необходимости разработки специального программного обеспечения для выполнения системного анализа и синтеза модели системы. Планируется эксперимент. Реализуется алгоритмы и сценарии эксперимента. Принимается критерий оценки эффективности модели. На этом этапе создаётся экспериментальный образец модели или **экспериментальная**

ЭТАПЫ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Опытные испытания

Полученная экспериментальная модель подвергается проверочным испытаниям. Получают выборки данных в виде приращений параметров, зависимостей выходных параметров от входных воздействий, результаты измерений внутренних параметров и другие характеристики. В результате этого этапа получают **экспериментальный материал**.

ЭТАПЫ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Анализ полученных результатов

Полученный экспериментальный материал сопоставляется предполагаемым показателям. Проводится оценка адекватности и погрешности моделирования. Проверочный процесс является итеративным. В случае неудовлетворительных результатов проверки адекватности переходят к этапу корректировки модели. В случае удовлетворительных результатов принимается решение о возможности ее практического использования. Уточнение модели происходит до тех пор, пока не будут получены приемлемые результаты. Заключения о состоятельности проверки не носят формального характера, поскольку основываются на опыте и интуиции исследователя. Опытные испытания и анализ полученных результатов составляют **экспериментальную проверку модели**, которая позволяет выявить грубые ошибки

ЭТАПЫ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Корректировка

Уточняются существенные параметры, ограничения на значения управляемых параметров, связи и критерий эффективности.
После внесения изменений в модель снова осуществляется экспериментальная проверка.

ЭТАПЫ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

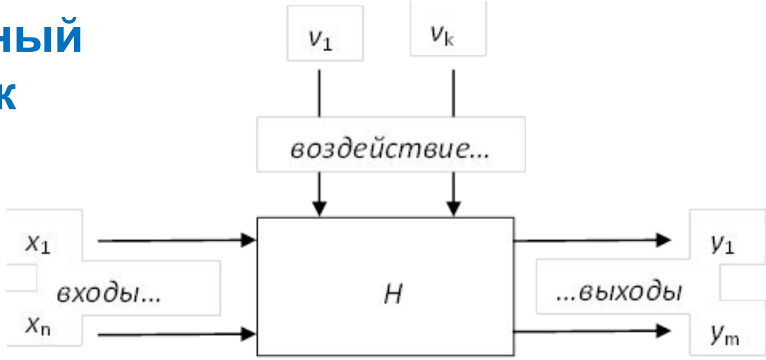
Оптимизация модели

Сущность оптимизации моделей состоит в их упрощении при заданном уровне адекватности.

Этот этап не является обязательным. .

ПОДХОДЫ К МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ С ПОЗИЦИИ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА

Чёрный ящик



Модель объекта моделирования, т. е. системы ***S***, можно представить в виде множества величин, описывающих процесс функционирования реальной системы и образующих в общем случае следующие подмножества:

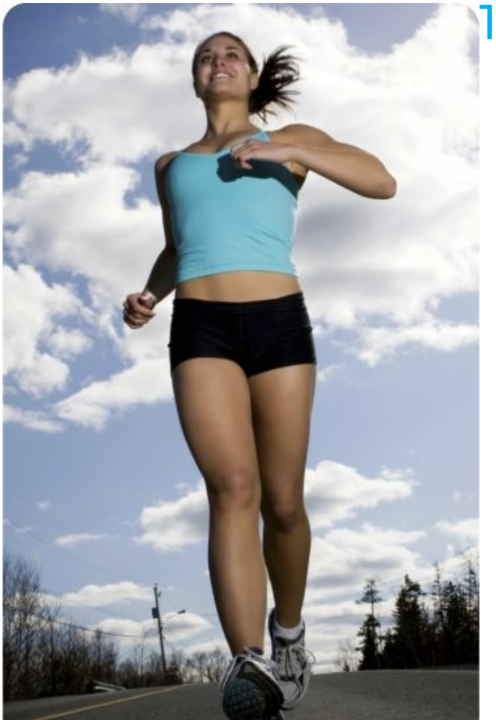
входных воздействий на систему: $x_i \in X, i = \overline{1, n_X}$

воздействий внешней среды: $v_l \in V, l = \overline{1, n_V}$

внутренних (собственных) параметров системы: $h_k \in H, k = \overline{1, n_H}$

выходных характеристик системы: $y_j \in Y, j = \overline{1, n_Y}$

ПОДХОДЫ К МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ С ПОЗИЦИИ ИЗА



Динамическая модель системы

-процесс функционирования системы ***S*** описывается во времени оператором $\boldsymbol{F_s}$, который в общем случае преобразует независимые переменные в зависимые в соответствии с соотношениями вида

$$\vec{y}(t) = F_S(\vec{x}, \vec{v}, \vec{h}, t).$$

Совокупность зависимостей выходных характеристик системы от времени $y_j(t)$ для всех видов $j = \overline{1, n_Y}$ называется <u>*выходной траекторией*</u>

Статическая модель системы

представляет собой отображение между двумя подмножествами свойств моделируемого объекта *Y* и *{X, V, H}*, что в векторной форме может быть записано как

$$\vec{y} = f(\vec{x}, \vec{v}, \vec{h}).$$

Такие соотношения в ряде случаев могут быть получены через свойства системы ***S*** в конкретные моменты времени, называемые состояниями системы

ПОДХОДЫ К МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ С ПОЗИЦИИ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА

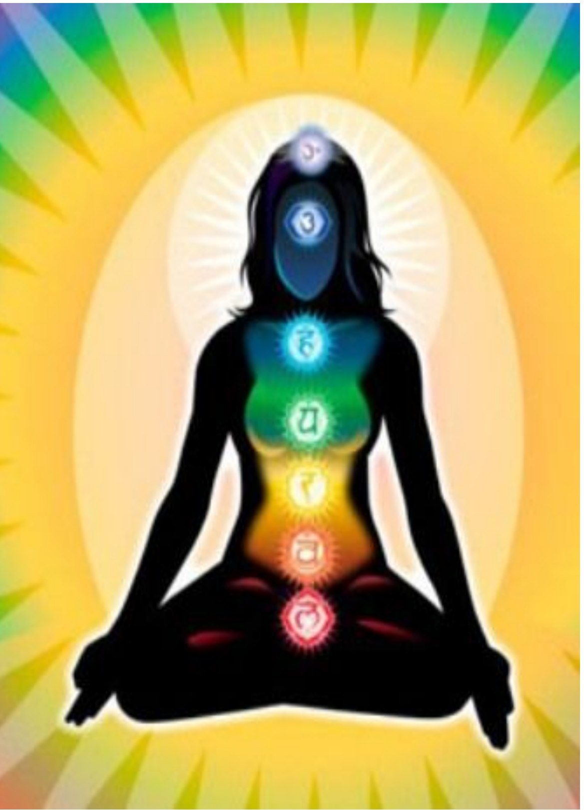
Состояние системы

Состояние системы ***S*** характеризуется векторами

$$\vec{z}\,' = (z_1', z_2', \ldots, z_k',), \quad \vec{z}\,'' = (z_1'', z_2'', \ldots, z_k'',),$$

Где $z_1' = z_1(t'), z_2' = z_2(t'), \ldots, z_k' = z_k(t')$, в момент $t' \in (t_0, T)$,

$z_1'' = z_1(t''), z_2'' = z_2(t''), \ldots, z_k'' = z_k(t'')$, в момент $t'' \in (t_0, T)$.



Состояния системы ***S*** в момент времени $t_0 < t^* \leq T$ полностью определяются начальными условиями $\vec{z}^{\,0} = (z_1^0, z_2^0, \ldots, z_k^0,)$, входными воздействиями $\vec{x}(t)$, внутренними параметрами $\vec{h}(t)$ и воздействиями внешней среды $\vec{v}(t)$, которые имели место за промежуток времени $t^* - t_0$, с помощью двух векторных уравнений

$$z(t) = \Phi(\vec{z}^{\,0}, \vec{x}, \vec{v}, \vec{h}, t)$$

$$\vec{y}(t) = F(\vec{z}, t)$$

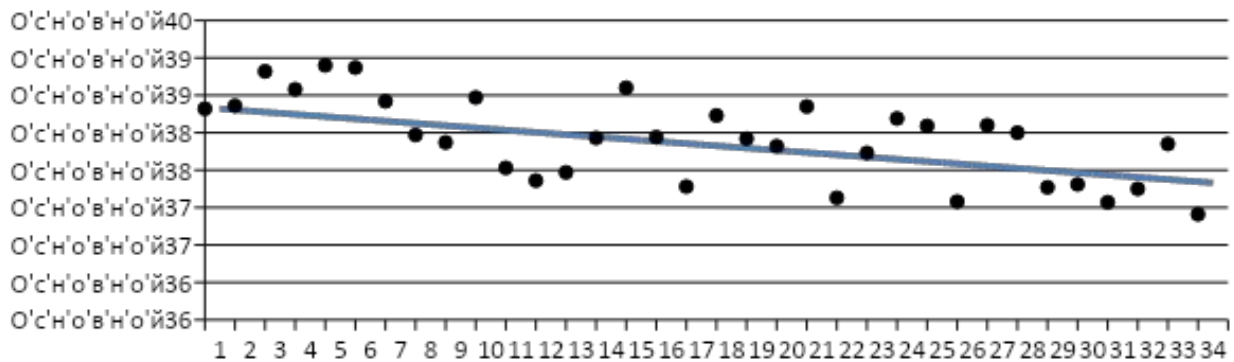
ПОДХОДЫ К МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ С ПОЗИЦИИ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА

Моделирование статических систем

Статическое моделирование объединяет множество моделей, которые отражают характеристики реальных систем таких, что сколь угодно длительное рассматриваемое в эксперименте внешнее воздействие не оказывает влияние на их характеристики. Такие системы и соответственно их модели называют системами (моделями) «без памяти».

Задача состоит в том, чтобы, зная множество значений на входах [*x*] и выходах [*y*], построить модель, то есть определить функцию ящика *h*. Одним из методов решения такой задачи может быть **регрессионный анализ**.

Пример: Пронаблюдаем за изменением температуры некоторого гипотетического больного. Пусть врач ставит задачу определить момент выздоровления по данным изменения температуры больного за время лечения в медицинском стационаре. Результаты ежедневных измерений температуры представлены на графике



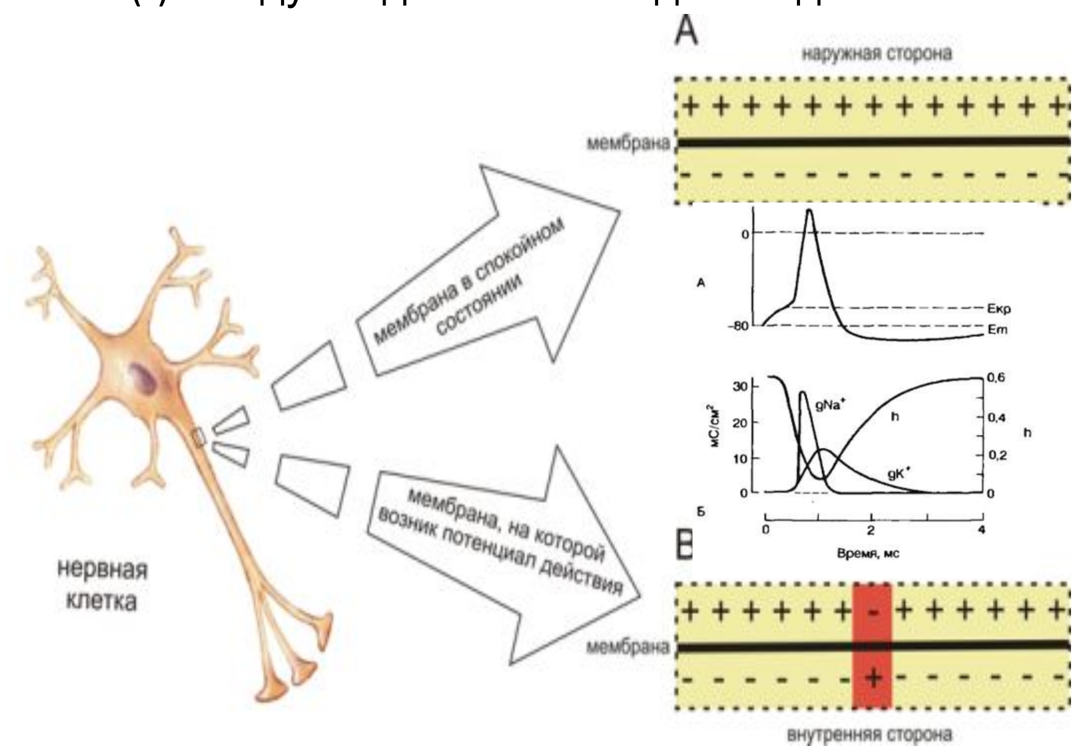
Поскольку для врача важна именно тенденция изменения температуры, то вполне можно принять зависимость между входом и выходом линейной. Таким образом, для пациента принята гипотеза связи выходных и входных данных $y(i) = ax(i) + b$. Дальнейшие расчёты должны позволить определить параметры линейной модели a и b.

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

Моделирование динамических систем

Динамические системы (и их модели, соответственно) – это системы, внутренняя функция и/или структура которых способна изменяться под действием внешних воздействий (включая входные данные и управляющие сигналы). При этом зависимость от внешних воздействий может быть связана в той или иной степени с предшествующими состояниями самой системы. в отличие от статических систем, динамические системы учитывают свое прошлое состояние, то есть обладают памятью.

Задача формулируется так: на входе и выходе черного ящика имеются совокупности синхронно измеренных данных $x(t)$и $y(t)$, соответственно. Необходимо установить функцию связи $h(t)$ между входными и выходными данными.



Пример, если обнаружено, что при подаче единичного скачка тока на мембрану клетки с внешней стороны её внутренний потенциал будет меняться по экспоненциальному закону, то клетка будет рассматриваться как система первого порядка. Её описание представляется одной производной:

$$U\frac{dy}{dx} + y = kx$$

Здесь U и k – параметры системы, характеризующие вид экспоненты.

ПОДХОДЫ К МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ С ПОЗИЦИИ СИ

имитация — это постижение сути явления, не прибегая к экспериментам на реальном объекте

Имитационное моделирование — это частный случай *математического моделирования*. Имитационное моделирование применяется к классу объектов (систем), для которых по каким-либо причинам не разработаны аналитические модели, либо не разработаны методы решения полученной модели. В этом случае математическая модель заменяется *имитатором* или *имитационной моделью*.

Имитационная модель - это логико-математическое описание объекта, которое обычно используется для эксперимента на компьютере в целях анализа и оценки функционирования системы, а также при её проектировании. Роль имитатора выполняет компьютерная программа. Экспериментирование с моделью называют имитацией (имитация — это постижение сути явления, не прибегая к экспериментам на реальном объекте).

Задача: определяются значения входных переменных, обеспечивающих оптимальное значение *целевой функции*: $E = f(x_1, x_2, \ldots x_n) \to \max$

Целевая функция, *или функция критерия,* - это точное отображение целей или задач системы и необходимых правил оценки их выполнения.

Разновидности имитации

Метод статистических испытаний

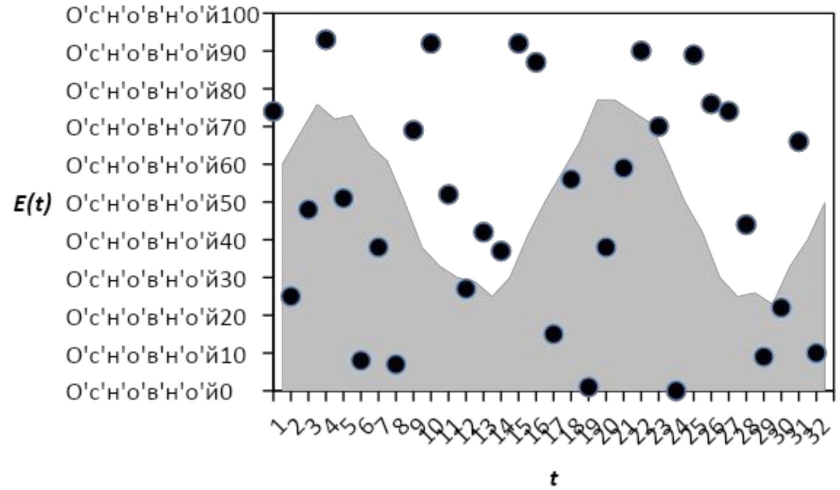
Метод статистического моделирования

Имитационное моделирование

Метод статистических испытаний

Метод Монте-Карло

Суть его состоит в том, что результат испытания ставится в зависимость от значения некоторой случайной величины, описываемой по известному закону распределения вероятностей.



Пример: Пусть стоит задача вычисления потребления энергии некоторой подсистемой организма со сложным законом поведения *E(t)*

$$W = \int_{t=1}^{32} E(t)dt$$

Распределим случайным образом точки в выделенном прямоугольнике поиска. Обозначим через *n* общее количество распределённых точек, а n_E - количество точек под кривой.

$$\frac{n}{n_E} = \frac{W}{(t_{32} - t_1)(d_T - d_B)}$$

Имитационное моделирование

Метод статистического моделирования

При значительном количестве опытов N частота появления события, полученная экспериментальным путем, стремится к значению теоретической вероятности появления события:

$$\lim_{N\to\infty} P_{Э} = P_{И}$$

Имитационное моделирование

С позиции системного анализа используют следующие подходы к имитационному моделированию:

Имитационное моделирование

Имитационное

Дискретно-событийное

подход к моделированию (или вид имитационного моделирования), предлагающий абстрагироваться от непрерывной природы событий и рассматривать только основные события моделируемой системы.

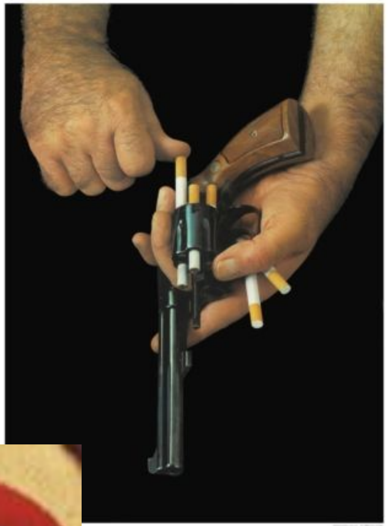
Детерминированные события

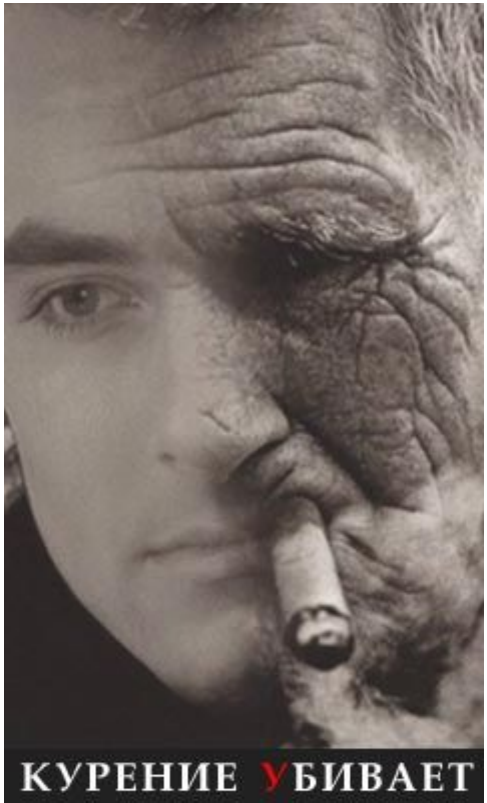
Стохастические события

Системная динамика

абстрактные элементы:

Уровни - характеризуют накопленные значения величин внутри системы.
<u>Пример:</u> накопление токсинов в организме в результате курения.



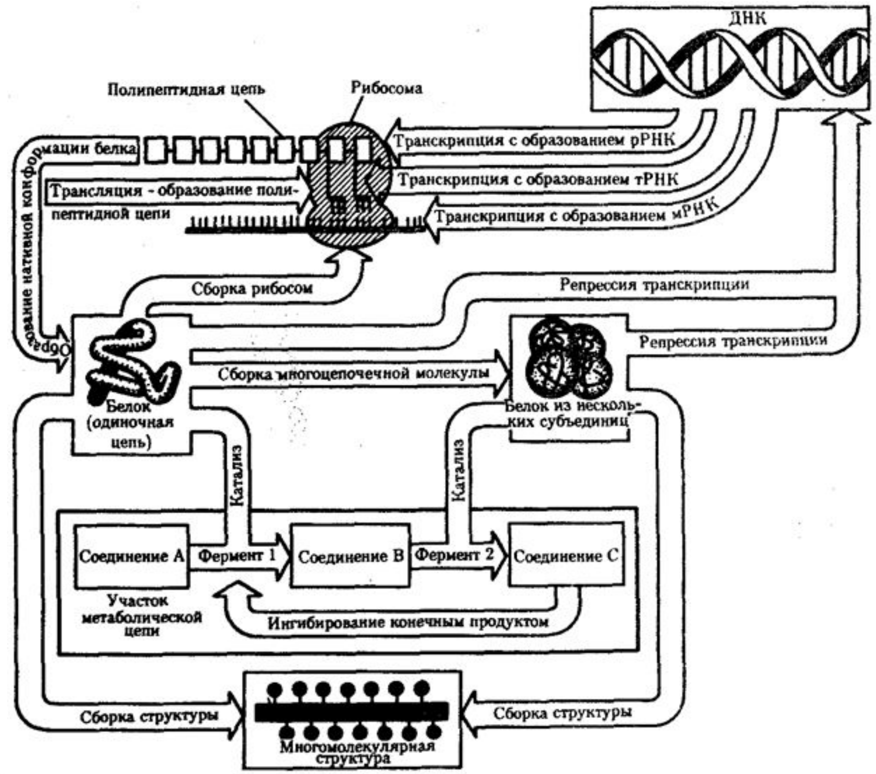


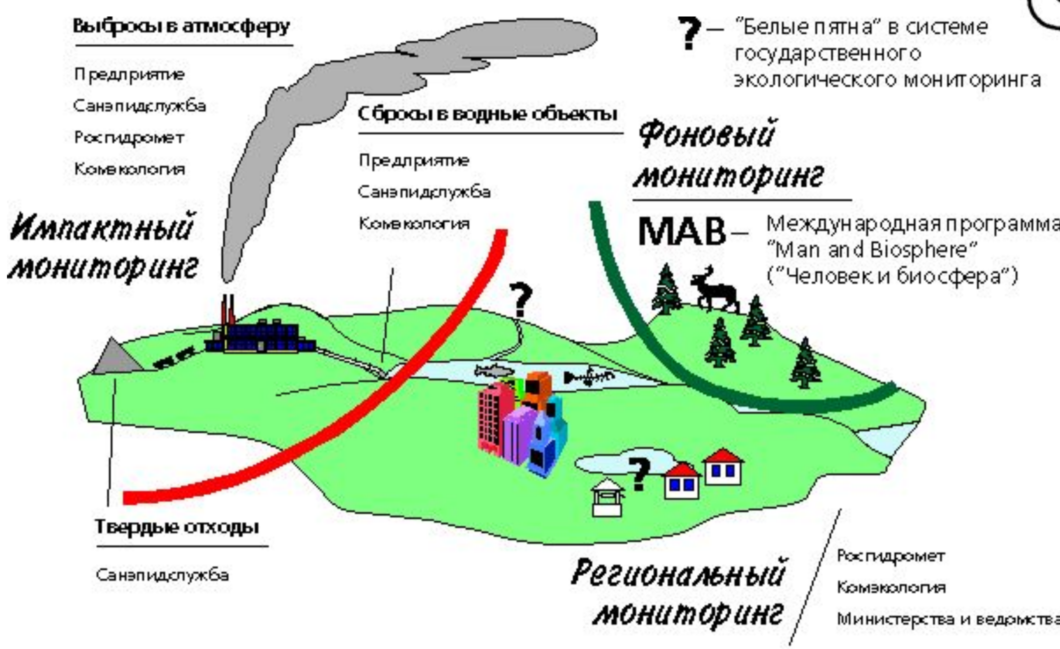
Имитационное моделирование

абстрактные элементы:

Потоки - скорости изменения уровней. Например, потоки визуальной или аудио информации, изменение уровня гемоглобина в крови, снижение или повышение концентрации нейромедиаторов, температурный баланс, суперпозиция электрической нейронной активности.

$$\Phi = dW/dt$$

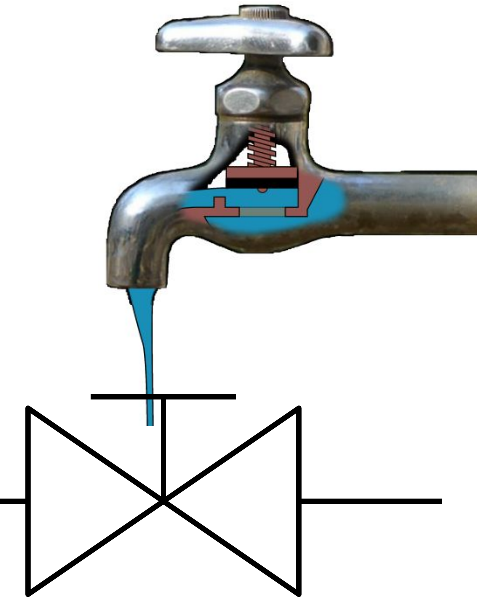




Имитационное моделирование

абстрактные элементы:

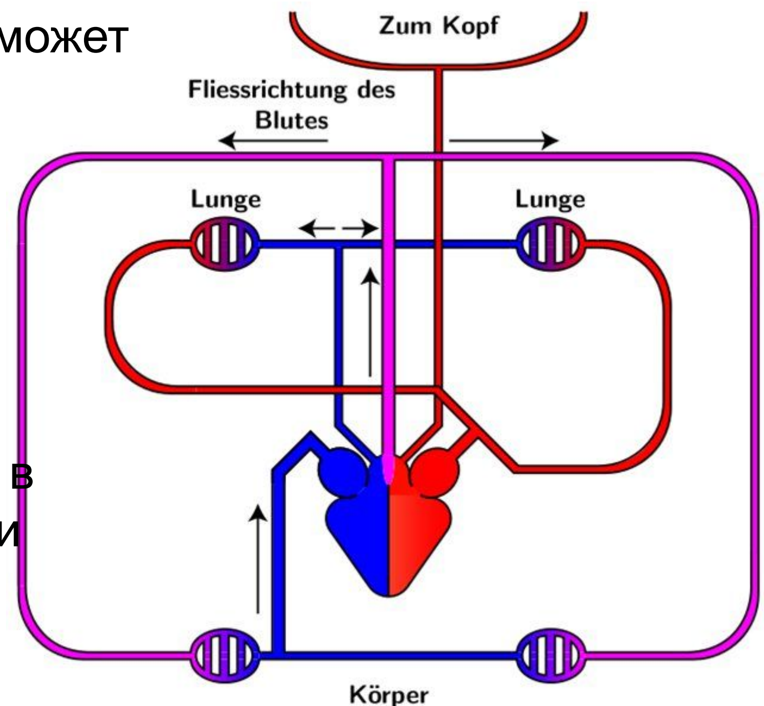
Функции решений (вентили) - функции зависимости потоков от уровней. Функция решения может иметь форму простого уравнения, определяющего реакцию потока на состояние одного или двух уровней. Например, производительность кровотворительной системы организма может быть выражена количеством питательных веществ, поступающих в неё, концентрацией кислорода во входном потоке крови и способностью к генерации новых клеток в процессе метаболизма.



Каналы информации, соединяющие вентили с уровнями. Примером такого канала в организме может служить аксон нейрона в нервной системе. Изображаются штриховыми стрелками.

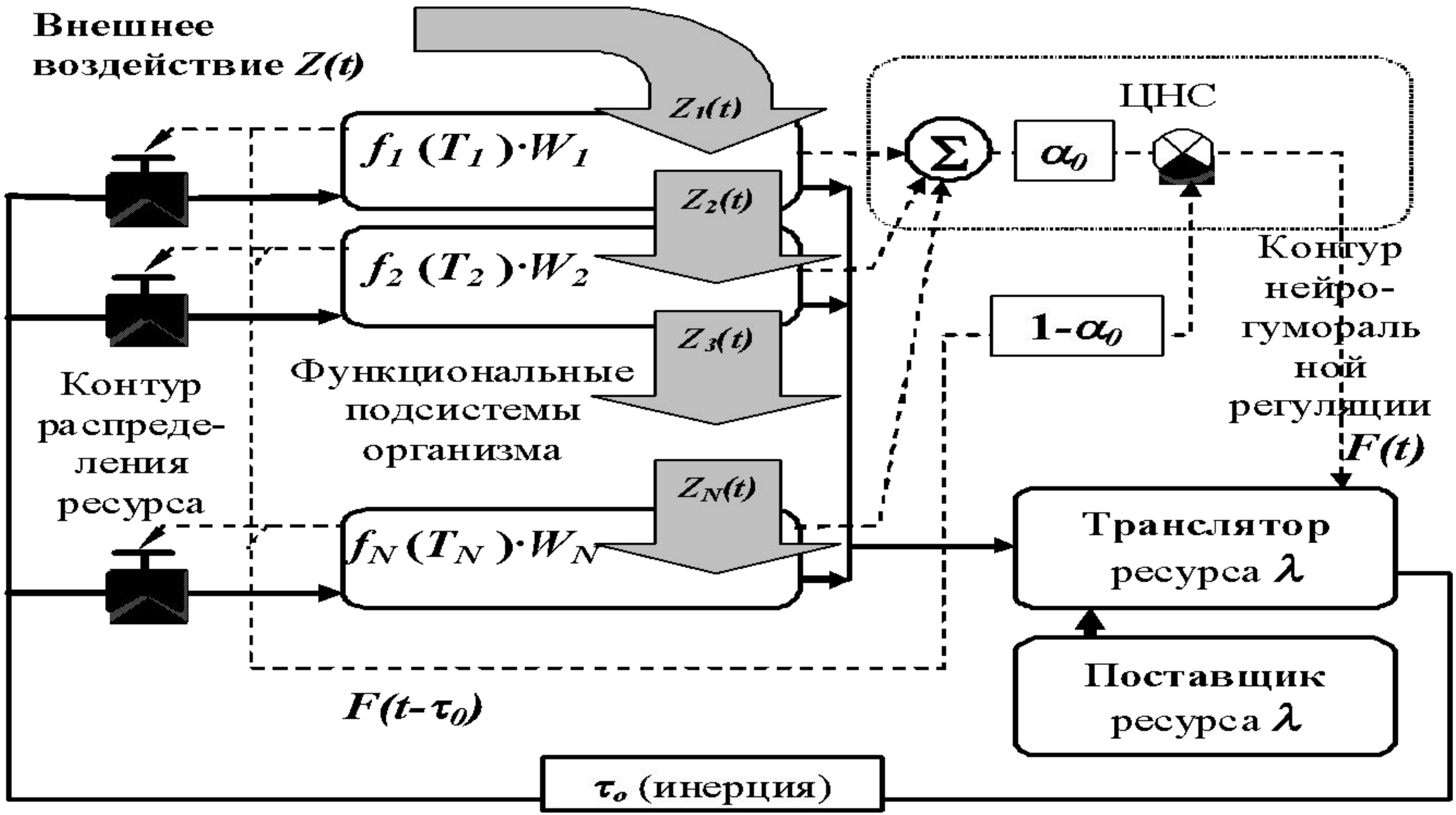
Линии задержки (запаздывания) - служат для имитации задержки потоков. Характеризуются параметрами среднего запаздывания и типом неустановившейся реакции.

Вспомогательные переменные - располагаются в каналах информации (потоках) между уровнями и функциями решений и определяют некоторую функцию.



Имитационное моделирование

Имитационная модель физиологического процесса адаптации организма к изменяющимся внешним воздействиям



Формализация

Имитационное моделирование

$$\begin{cases} F(t) = \alpha_0 \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^{N} W_i^{(S)} \cdot f_i(t) \cdot Z_i(t) \right) - (1 - \alpha_0) \cdot F(t - \tau_0) \\ \sum\limits_{i=1}^{N} \left[W_i^{(S)} \cdot f_i(T_i) \cdot Z_i(t) \right] \le \theta \cdot \lambda(r) \\ \dfrac{dr}{dt} = \lambda(r) \\ f_i(t) = \sin^2\left(\dfrac{2\pi}{T_i} \cdot t + \varphi_i\right) \end{cases}$$

где *λ(r)* - функция, характеризующая производительность ресурса *r* системы;

- W_i - *i*-й весовой коэффициент в *S*-м устойчивом состоянии;
- $f_i(T_i)$ - *i*- я функция вынуждающего воздействия подсистемы с циклом T_i;
- τ_0 - время задержки реакции (инерция) системы;
- *N* - число подсистем формирующих воздействие;
- *Z(t)* – функция воздействия.

-Поведение модели полностью задается набором весовых коэффициентов на множестве $\{W_i\}$.

Имитационное моделирование

m-код

$W_1 := 180$ $W_2 := 180$ $W_3 := 120$ $W_4 := 120$

$T_0 := 130$ $T_1 := \frac{256}{1.7}$ $T_2 := \frac{256}{19}$ $T_3 := \frac{256}{26}$ $T_4 := \frac{256}{35}$

$\alpha := .7$ $\beta := 2$ $\tau := 5$ $\lambda := .9$ $t\_max := 256$ $t := 0..\, t\_max - 1$ $N := 4$

$$F(t) := \begin{cases} T_0 & \text{if } ((t-\tau)<0) \\ \lambda\cdot\left[T_0 + \left[\left[\sum_{i=1}^{N}\left[W_i\cdot\left(\sin\left(2\cdot\pi\cdot\frac{t}{T_i}\right)\right)^2\right]\right]\right]^{\alpha}\right] - (1-\lambda)\cdot\left[T_0 + \left[\left[\sum_{i=1}^{N}\left[W_i\cdot\left(\sin\left(2\cdot\pi\cdot\frac{t-\tau}{T_i}\right)\right)^2\right]\right]\right]^{\alpha}\right] & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$F1(t) := (4\cdot\pi\cdot\alpha)\cdot\left[\lambda\cdot\left[\left[\sum_{i=1}^{N}\left[W_i\cdot\left(\sin\left(2\cdot\pi\cdot\frac{t}{T_i}\right)\right)^2\right]\right]\right]^{\alpha}\cdot\frac{\left[\left[\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{W_i}{T_i}\cdot\left(\sin\left(2\cdot\pi\cdot\frac{t}{T_i}\right)\right)\cdot\left(\cos\left(2\cdot\pi\cdot\frac{t}{T_i}\right)\right)\right]\right]\right]}{\left[\left[\sum_{i=1}^{N}\left[W_i\cdot\left(\sin\left(2\cdot\pi\cdot\frac{t}{T_i}\right)\right)^2\right]\right]\right]}\right]$$

$$-(4\cdot\pi\cdot\alpha)\cdot\left[\left[(1-\lambda)\cdot\left[\left[\sum_{i=1}^{N}\left[W_i\cdot\left(\sin\left(2\cdot\pi\cdot\frac{t-\tau}{T_i}\right)\right)^2\right]\right]\right]^{\alpha}\right]\cdot\frac{\left[\left[\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{W_i}{T_i}\cdot\left(\sin\left(2\cdot\pi\cdot\frac{t-\tau}{T_i}\right)\right)\cdot\left(\cos\left(2\cdot\pi\cdot\frac{t-\tau}{T_i}\right)\right)\right]\right]\right]}{\left[\left[\sum_{i=1}^{N}\left[W_i\cdot\left(\sin\left(2\cdot\pi\cdot\frac{t-\tau}{T_i}\right)\right)^2\right]\right]\right]}\right]$$

Имитационное моделирование

❑ *Анализ результатов моделирования*