Математические методы в биологии

Блок 1. Основы теории вероятностей, или случайные события

Лекция 1

Козлова Ольга Сергеевна
89276755130, olga-sphinx@yandex.ru

В.Е. ГМУРМАН

Теория вероятностей и математическая статистика

Издание девятое, стереотипное

Рекомендовано
Министерством образования
Российской Федерации
в качестве учебного пособия
для студентов вузов

Москва
«Высшая школа» 2003

Основные понятия теории вероятностей

- Испытание (опыт, эксперимент) – > событие

Пример. Бросок монеты –> выпадение «орла»

- Элементарный исход – каждый из результатов испытания

Элементарный исход может благоприятствовать наступлению события, или не благоприятствовать

Пример. Событие – выпадение чётного числа очков на игральной кости. Этому событию благоприятствует 3 элементарных исхода (2, 4, 6 очков).

- Классическое определение вероятности

Вероятность – некое число, характеризующее степень возможности возникновения данного события в данном испытании.

Вероятность выражается **отношением числа равновероятных элементарных исходов, благоприятствующих данному событию, к общему числу возможных элементарных исходов.**

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Вероятность (*probability*)

Основные формулы комбинаторики

- Перестановки – комбинации, состоящие из одних и тех же n элементов, различающиеся только их порядком

Пример. Перестановки из трёх карточек – жёлтой, красной и синей

1 2 3 4 5 6

Число перестановок из n элементов

$$Pn = n * (n-1) * (n-2) * (n-3) * \cdots * 1 = n!$$

Число сомножителей (включая 1)= числу мест = n

- Размещения – комбинации, состоящие из n возможных элементов, взятых по m штук, и различающиеся либо <u>порядком расположения</u> элементов, либо <u>составом элементов</u> (либо и тем, и другим)

Пример. Размещение двух карточек из четырех возможных (n=4, m=2)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

$$A_n^m = n * (n-1) * (n-2) * \cdots * (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

-0 -1 -2 -(m-1)

Число размещений из n по m

Число сомножителей = числу мест = m

Основные формулы комбинаторики

- Размещения с повторением – комбинации из n **типов** элементов, взятых по m штук

Пример. Размещения из 3 ***типов*** *карточек по две (n=3, m=2)*

1 2 3 4 5 6 7 8 9

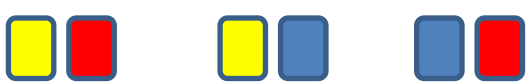
$$A_n^m = n * n * \cdots * n = n^m$$

Число сомножителей = числу мест = m

Число размещений из n по m с повторением

- Сочетания – комбинации, состоящие из n возможных элементов, взятых по m штук, которые различаются между собой хотя бы одним элементом (<u>без учёта порядка элементов!</u>)

Пример. Сочетания из 3 карточек по 2 карточки (n=3, m=2)



1 2 3

$$C_n^m = \frac{n * (n-1) * (n-2) * \cdots * (n-m+1)}{P_m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

Число сочетаний из n по

Так как порядок не важен, число размещений из n по m делим на число перестановок из m элементов

Теоремы сложения и умножения вероятностей

- Вероятность – число => с ним можно (и нужно!) выполнять арифметические операции
- Но складывать и умножать можно не только вероятности, но и сами события

Суммой нескольких событий называют событие, которое заключается в появлении хотя бы одного из этих событий *(произойдёт либо А, либо В, либо С, либо несколько из них (или даже все) сразу)*

Теорема сложения вероятностей. Вероятность появления одного из двух несовместных событий (безразлично, какого), равна сумме вероятности этих событий: $P(A+B) = P(A) + P(B)$

Полная группа событий – исчерпывающий перечень событий для испытания. Сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна 1. Если полная группа событий включает в себя всего 2 события, их называют противоположными (событие A и событие $\bar{A}$).

Следствие из теоремы. Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий (безразлично, какого), равна сумме вероятностей этих событий.

Теоремы сложения и умножения вероятностей

- Произведением нескольких событий называют событие, состоящее в совместном появлении (совмещении) всех этих событий.

Теорема умножения независимых событий. Для независимых событий A и B вероятность произведения этих событий равна произведению вероятностей:

$$P(AB) = P(A) * P(B)$$

*Пример. Вероятность выпадения шестёрки на обеих одновременно бросаемых костях равна 1/6*1/6=1/36 (число всевозможных элементарных исходов равно 6*6=36, благоприятствующим событию является только один из них).*

Независимые **в совокупности** события – события, которые попарно независимы и каждое из которых независимо со всеми возможными произведениями остальных.

Следствие из теоремы. Вероятность появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий.

Условная вероятность

- **Условная вероятность $P_A(B)$** – вероятность события B при условии, что произошло событие A.

вероятность наступления B при условии наступления A

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}, P(A) > 0$$

Общий вид теоремы умножения вероятностей

Отсюда $P(AB) = P(A) * P_A(\mathrm{B})$

Пример. В ящике лежат 6 шаров: 3 чёрных и 3 белых. Найти вероятность появления белого шара вторым, если первым был вытянут чёрный шар.
Событие A – появление чёрного шара . P(A)=1/2
Событие B – появление белого шара.
Возможных размещений из 6 шаров по 2 (элементарных исходов) 6!/(6-2)!=5*6=30.
Из них благоприятствующими появлению белого шара являются 3*3=9 исходов.
Значит, P(AB) = 9/30. P_A(B)=9/30:1/2=9/15=3/5

Вероятность появления хоть бы одного события

- Вероятность появления хотя бы одного из независимых в совокупности событий $A1, A2, \ldots An$ равна разности между 1 и произведением вероятностей $\overline{A1}$, $\overline{A2}$, $\ldots\overline{An}$ (противоположных событий)

Пример. Пусть известны вероятности попадания в цель из 3х орудий, и требуется найти вероятность попадания в цель хотя бы одного из них при одновременном залпе. Событие «хотя бы одно орудие попало в цель» противоположно событию «ни одно из орудий не попало в цель» (вместе они составляют полную группу событий). Событие «ни одно из орудий не попало в цель» является произведением событий «Орудие 1 не попало в цель», «Орудие 2 не попало в цель», «Орудие 3 не попало в цель», т.е. вероятность такого события равна произведению (1-вероятность_попадания1), (1-вероятность_попадания2) и (1-вероятность_попадания3).

Типовые задачи (на вероятность появления хотя бы одного события)

Задача 1.

Чему равна вероятность того, что при бросании трёх игральных костей 6 очков появится хотя бы на одной из них?

Решение

Рассчитаем вероятность невыпадения 6 очков ни на одной кости. Число элементарных исходов, благоприятствующих такому событию - 5*5*5 = 125, общее число элементарных исходов – 6*6*6=216. Вероятность = 125/216. Значит, вероятность выпадения хотя бы одной шестёрки = 1-125/216=91/216.

Задача 2.

Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадёт в десятку, равна 0.6. Сколько выстрелов должен сделать стрелок, чтобы с вероятностью не менее 0.8 он попал в десятку хотя бы один раз?

Решение

Вероятность непопадания стрелка в десятку при каждом выстреле – 0.4. Запишем неравенство: $0.8 \le 1-0.4^n$, где n – количество выстрелов. $0.4^n \le 0.2$, значит, должно быть равно как минимум **2** (0.4*0.4=0.16).

Типовые задачи (на сложение вероятностей)

Задача 3.

В ящике лежат 10 деталей, из них 2 бракованные. Какова вероятность, что при случайном извлечении 6 деталей среди них окажется не более одной бракованной?

Решение

«Не более одной бракованной» эквивалентно двум событиям – «Не окажется ни одной бракованной» (А) и «Окажется ровно одна бракованная» (В). $P(A)=C_8^6/C_{10}^6$ сколькими способами можно выбрать 6 небракованных деталей из 8 возможных / сколькими способами можно выбрать 6 деталей из 10 возможных

$P(B)= 2*C_8^5/C_{10}^6$ сколькими способами можно выбрать 5 небракованных деталей из 8 возможных / сколькими способами можно выбрать 6 деталей из 10 возможных (домножение на 2, так как может попасться 1я или 2я брак.деталь)

$C_8^6/C_{10}^6=(8!/6!*2!)/(10!/6!*4!)=28/210=4/30$

$2*C_8^5/C_{10}^6=2*(8!/5!*3!)/(10!/6!*4!)=2*56/210=2*8/30=16/30$

$4/30+16/30=20/30=2/3$

Типовые задачи (на сложение вероятностей)

Задача 4.

Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0.8, а вторым стрелком – 0.6. Найти вероятность того, что цель будет поражена только одним стрелком.

Решение

Цель может поразить либо первый, либо второй стрелок, значит, интересующее нас событие разбивается на два: первый точен, второй – нет, и наоборот (при этом нам абсолютно всё равно, какой из двух вариантов случится). Для первого случая P1 = 0.8*(1-0.6)=0.8*0.4=0.32, для второго случая P2=0.6*(1-0.8)=0.6*0.2=0.12.

По формуле сложения вероятностей вероятности этих несовместных событий можно сложить, то есть вероятность поражения цели только одним стрелком равна 0.44.

Резюме

- Вероятность события – число равновероятных элементарных исходов, благоприятствующих событию, к общему числу возможных элементарных исходов
- P_n=n!; A_n^m=n!/(m-n!); C_n^m=n!/(m!(m-n!))
- $P(A+B)=P(A)+P(B)$ для несовместных событий
- $P(AB)=P(A)*P(B)$ для независимых событий
- $P(AB)=P(A)*P_A(\mathrm{B})$ в общем виде
- Чтобы рассчитать вероятность возникновения хотя бы одного события из группы независимых в совокупности событий, надо из 1 вычесть произведение вероятностей событий, противоположных событиям этой группы