

Тригонометрия

- Тригонометрия-это часть геометрии, где с помощью тригонометрических функций связываются элементы треугольника.
- Тригонометрия-это объект математического анализа, где тригонометрические уравнения изучаются методами алгебры.

Этапы развития тригонометрии

- Тригонометрия в древности являлась вспомогательным разделом астрономии. Древнегреческие ученые разработали «тригонометрию хорд».
- Древнеиндийские ученые заменили хорды синусами.
- В VIII веке математики Востока превратили тригонометрию в самостоятельную математическую дисциплину. Ими были введены другие тригонометрические функции и составлены таблицы.
- Окончательный вид тригонометрия приобрела в XVIII веке в трудах Л.Эйлера.

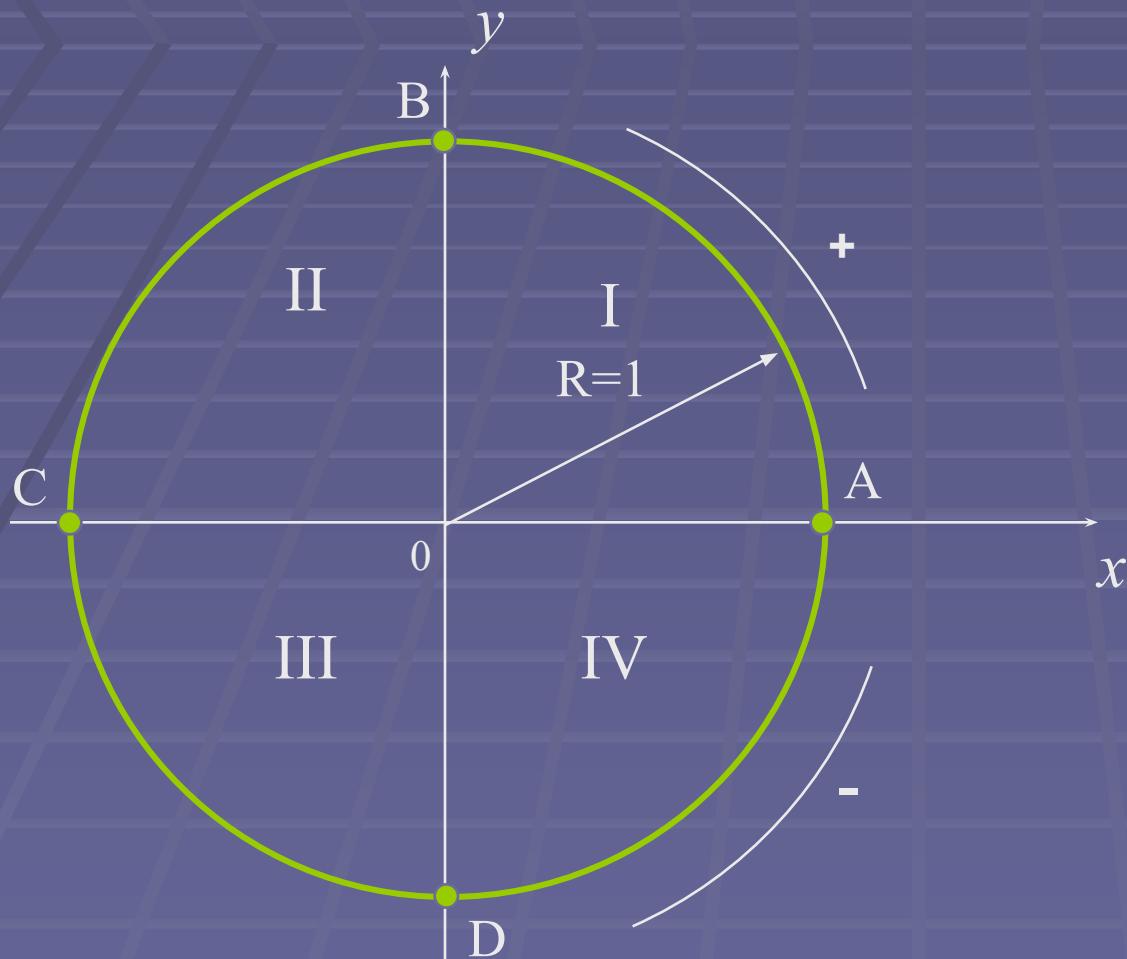
Вопросы для повторения:

- *Основные понятия*
- *Уравнения*
- *Неравенства*
- *Системы неравенств*

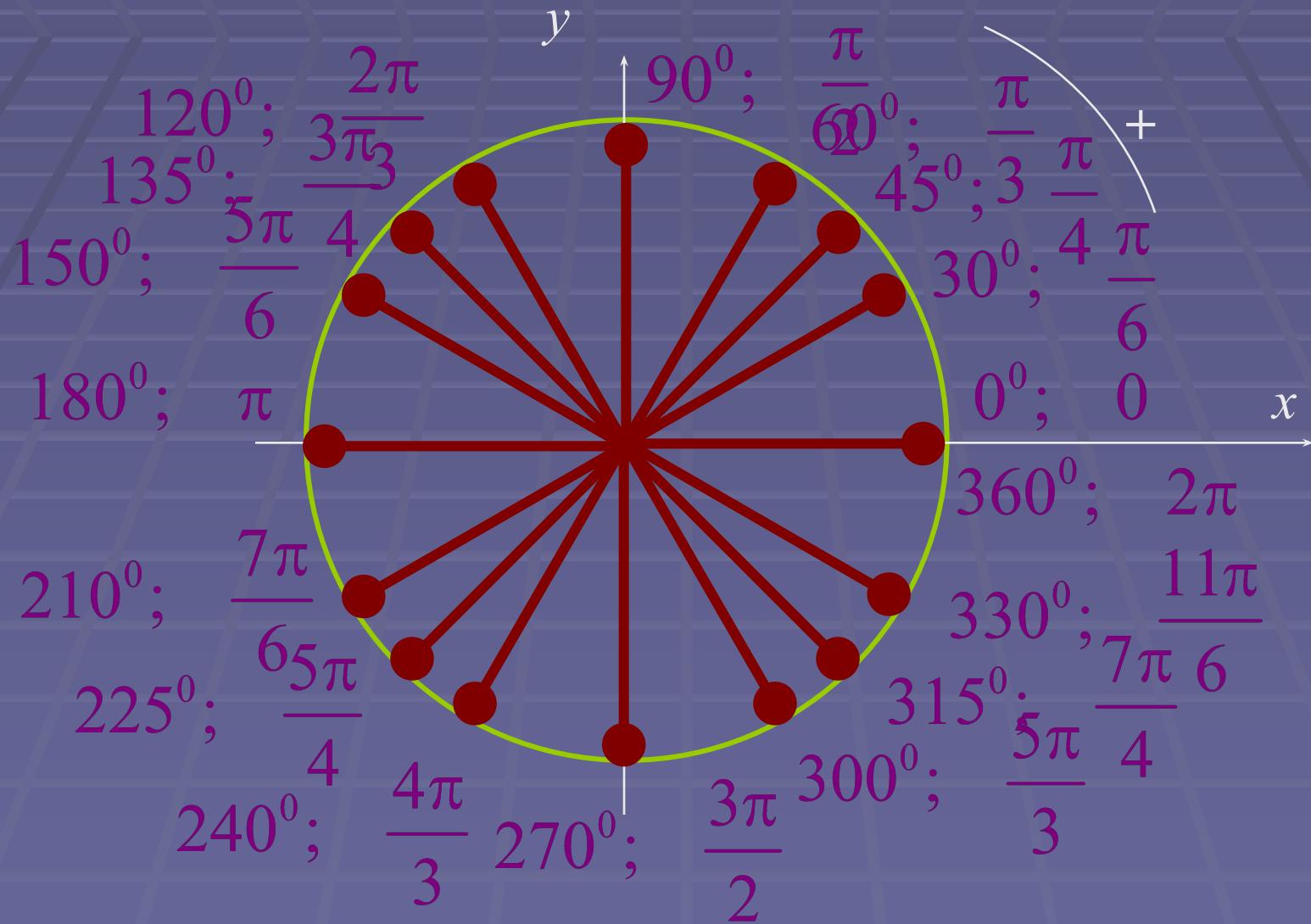
Основные понятия

- ✓ тригонометрическая окружность
- ✓ градусы и радианы
- ✓ синус и косинус
- ✓ тангенс и котангенс

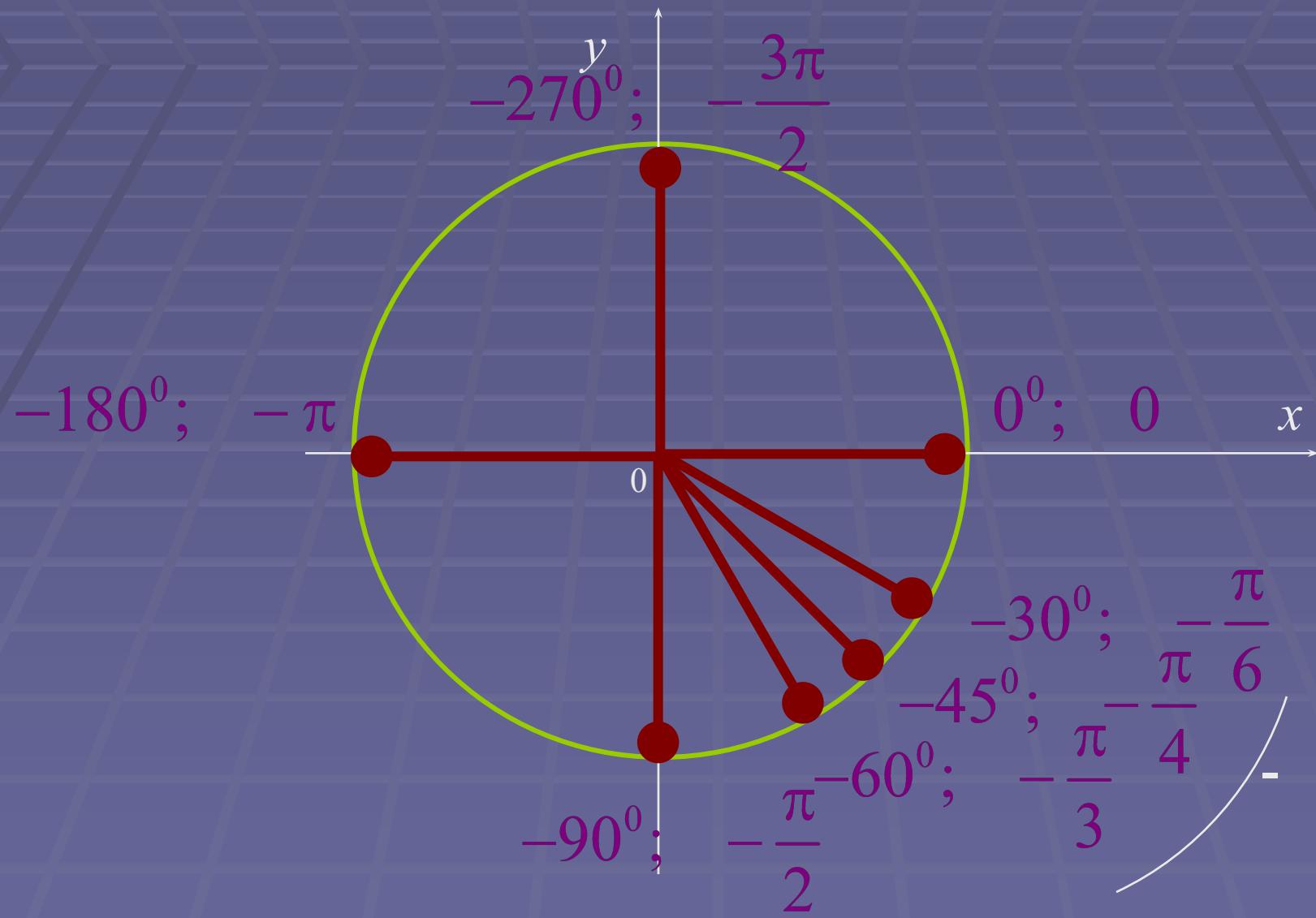
Тригонометрическая окружность



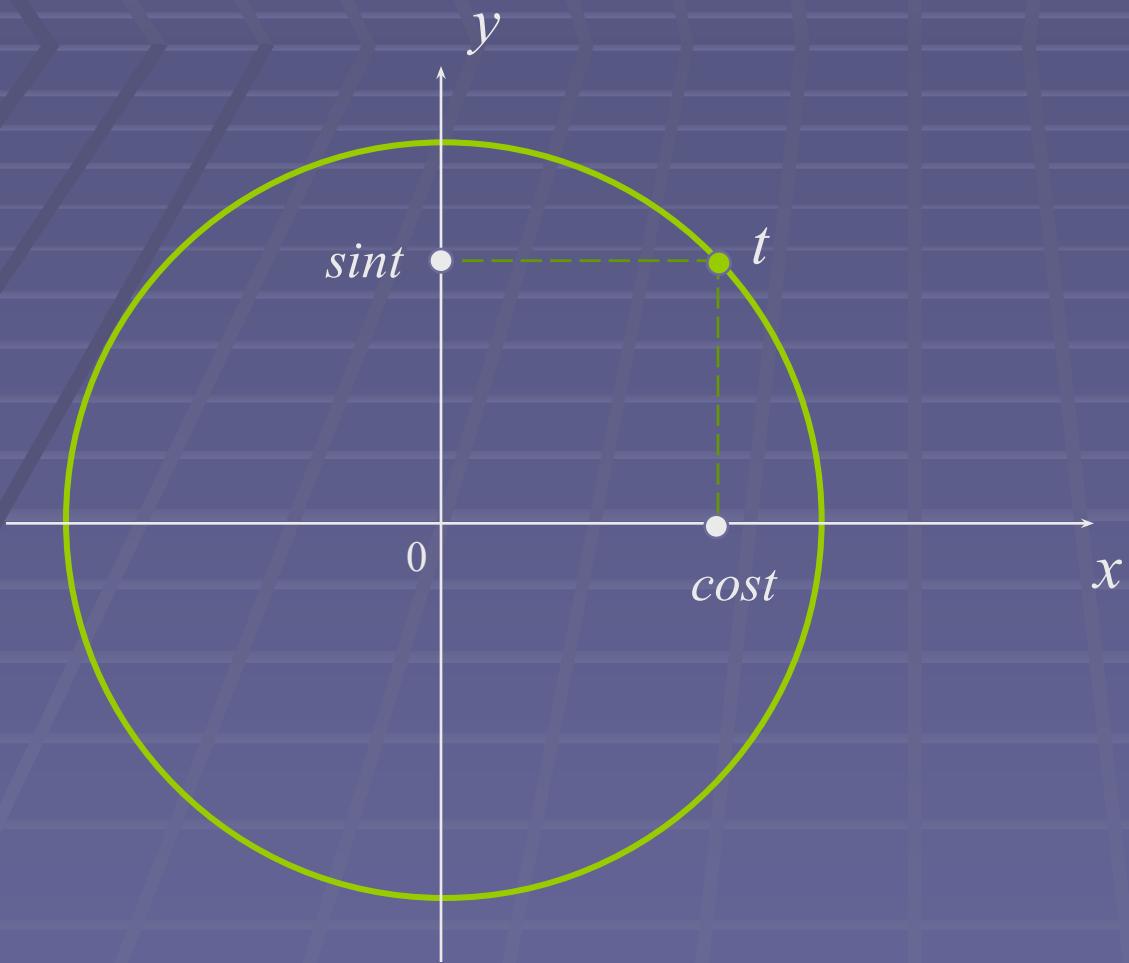
Градусы и радианы



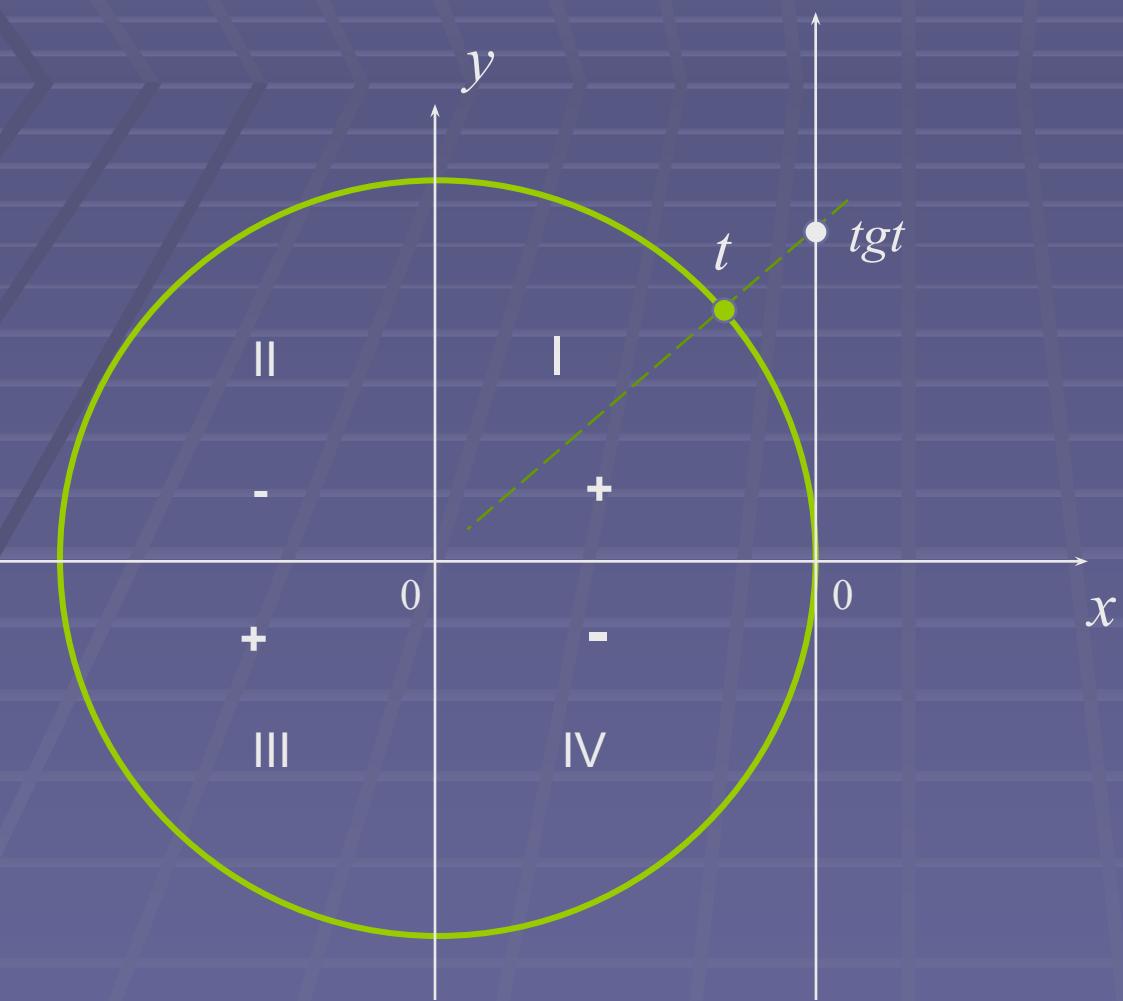
Градусы и радианы



Косинус и синус

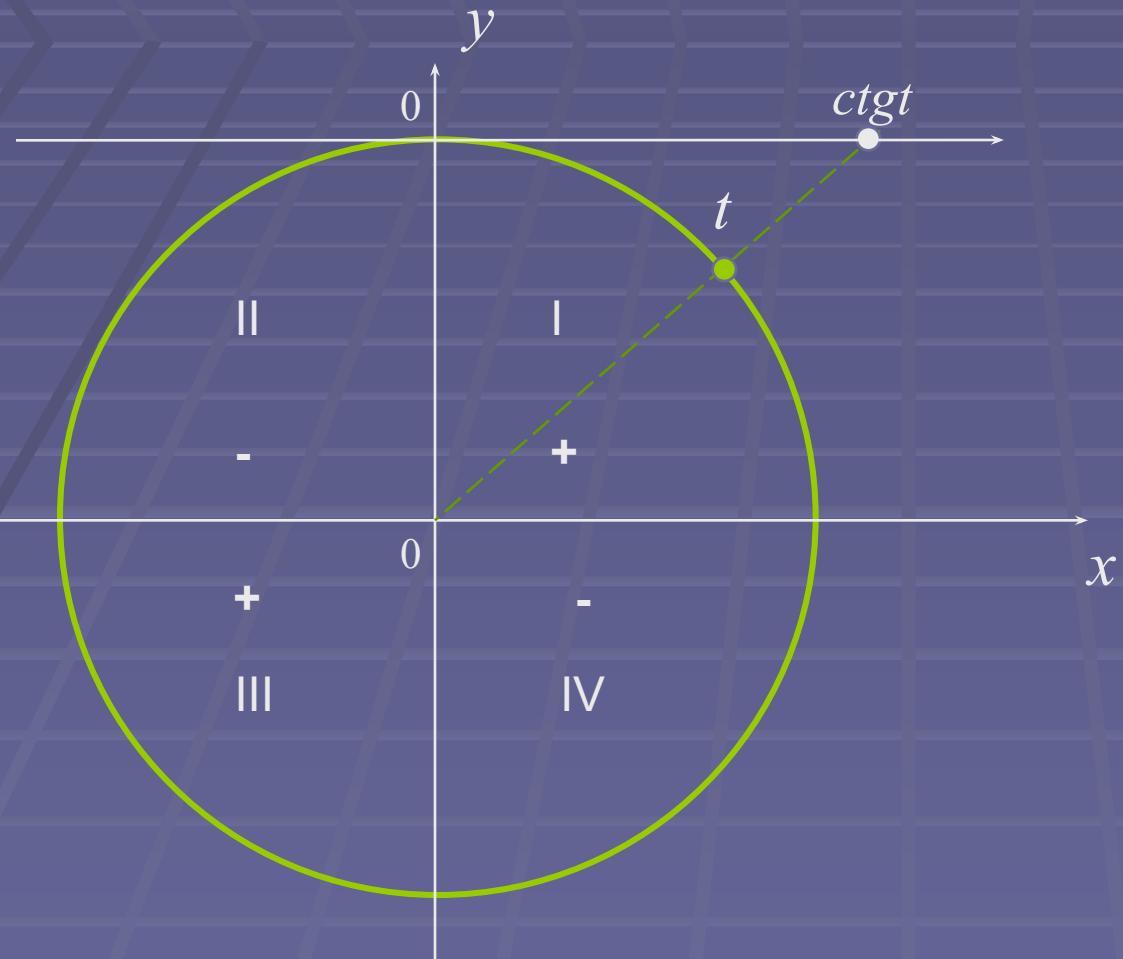


Тангенс



$$\text{tgt} = \frac{\sin t}{\cos t}$$

Котангенс



$$\operatorname{ctgt} = \frac{\cos t}{\sin t}$$

Значения тригонометрических функций некоторых углов

t	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\operatorname{tg} t$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	-
$\operatorname{ctg} t$	-	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0

Основные тригонометрические тождества

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\operatorname{tg} t = \sin t / \cos t$, где $t \neq \pi/2 + \pi k$
- $\operatorname{ctg} t = \cos t / \sin t$, где $t \neq \pi k$
- $\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1$, где $t \neq \pi k / 2$
- $1 + \operatorname{tg}^2 t = 1 / \cos^2 t$, где $t \neq \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$
- $1 + \operatorname{ctg}^2 t = 1 / \sin^2 t$, где $t \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

Тригонометрические функции углового аргумента

- $a^0 = \pi a / 180^0$ рад.
- $1^0 = \pi / 180^0$ рад.
- $1 \text{ рад} = 180^0 / \pi$

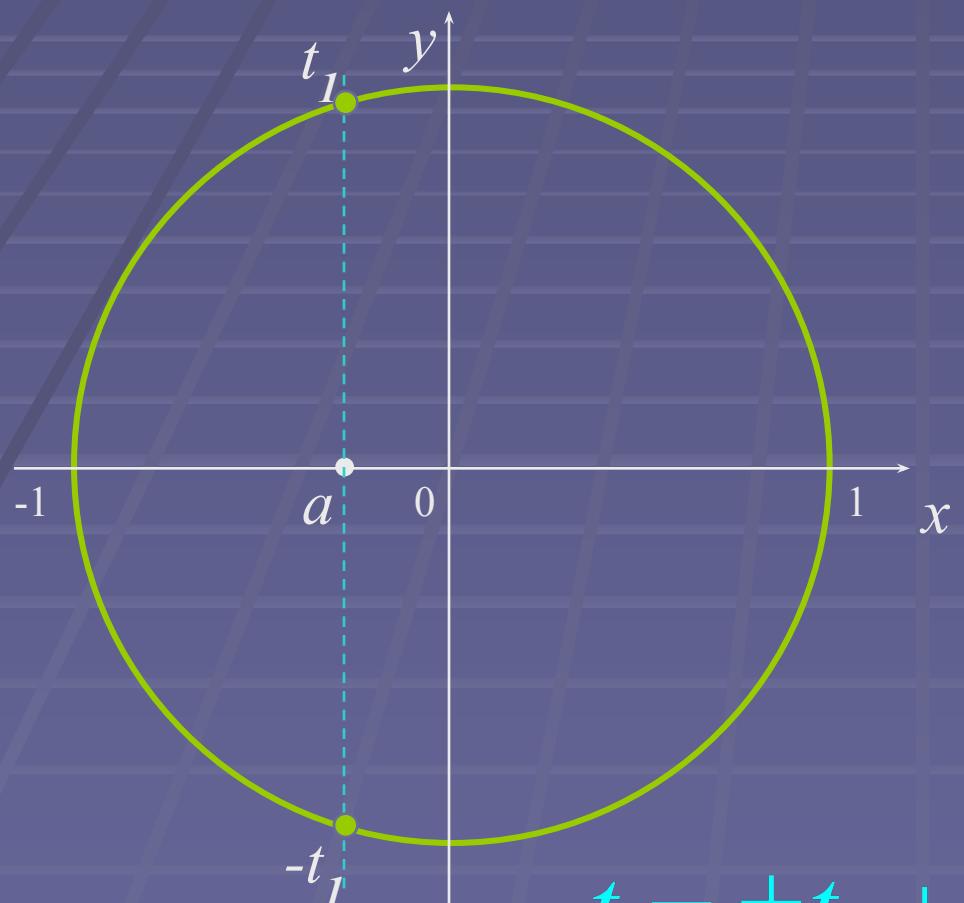
Угол в 1 радиан-это центральный угол, опирающийся на дугу длиной 1, длина которой равна радиусу окружности.

✓ $\cos t = a$

✓ $\sin t = a$

Уравнения

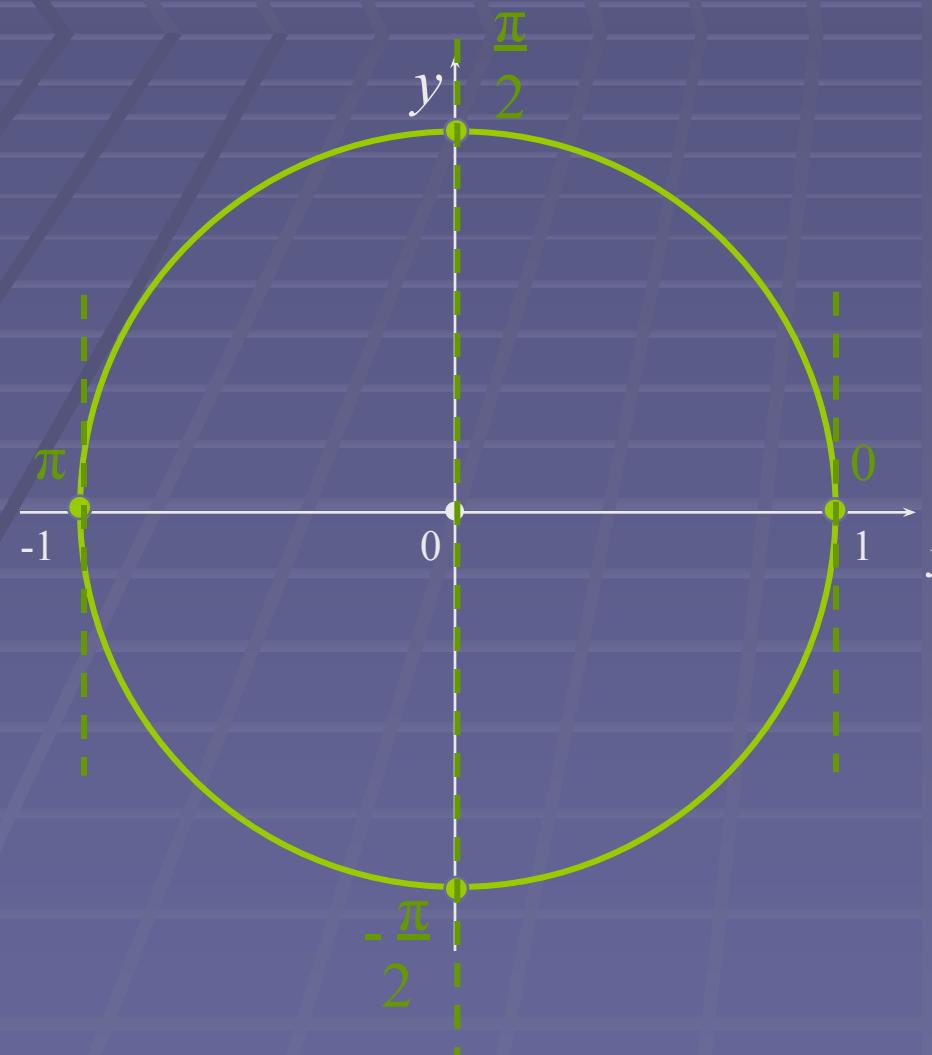
Уравнение $\cos t = a$



1. Проверить условие $| a | \leq 1$
2. Отметить точку a на оси абсцисс.
3. Построить перпендикуляр в этой точке.
4. Отметить точки пересечения перпендикуляра с окружностью.
5. Полученные точки – решение уравнения $\cos t = a$.
6. Записать общее решение уравнения.

$$t = \pm t_1 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Частные случаи уравнения $\cos t = a$

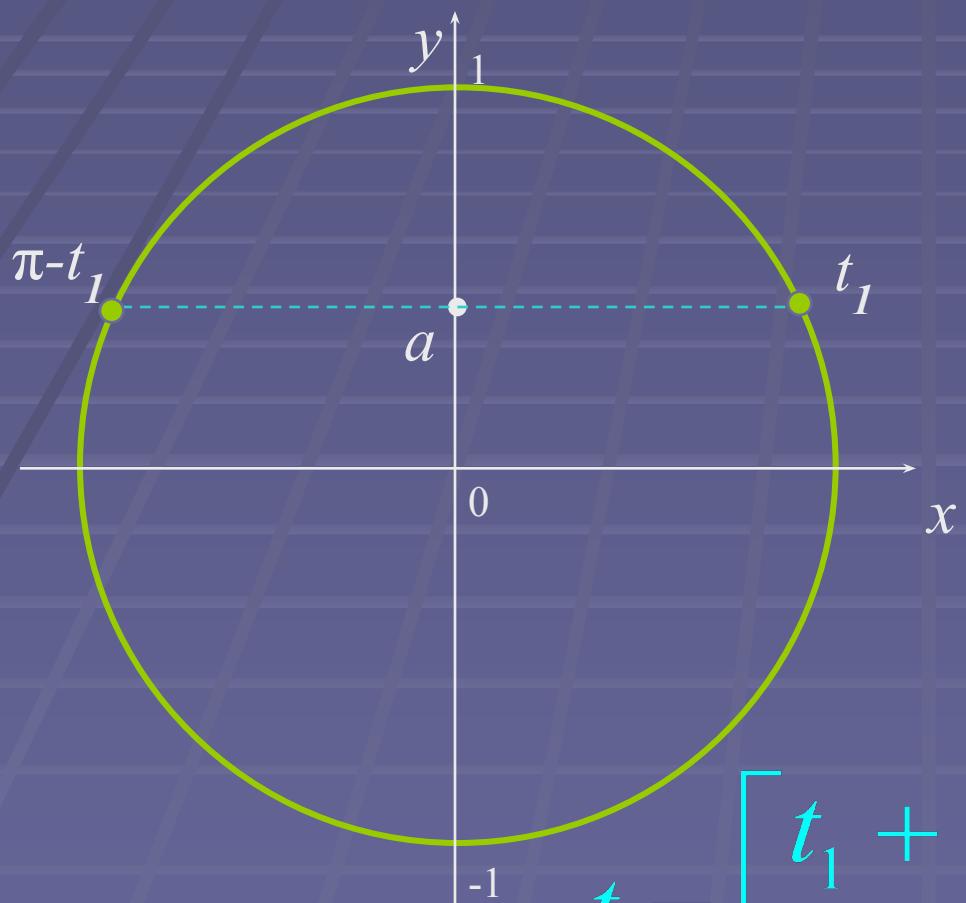


$$\cos t = 1 \quad t = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos t = 0 \quad t = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos t = -1 \quad t = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

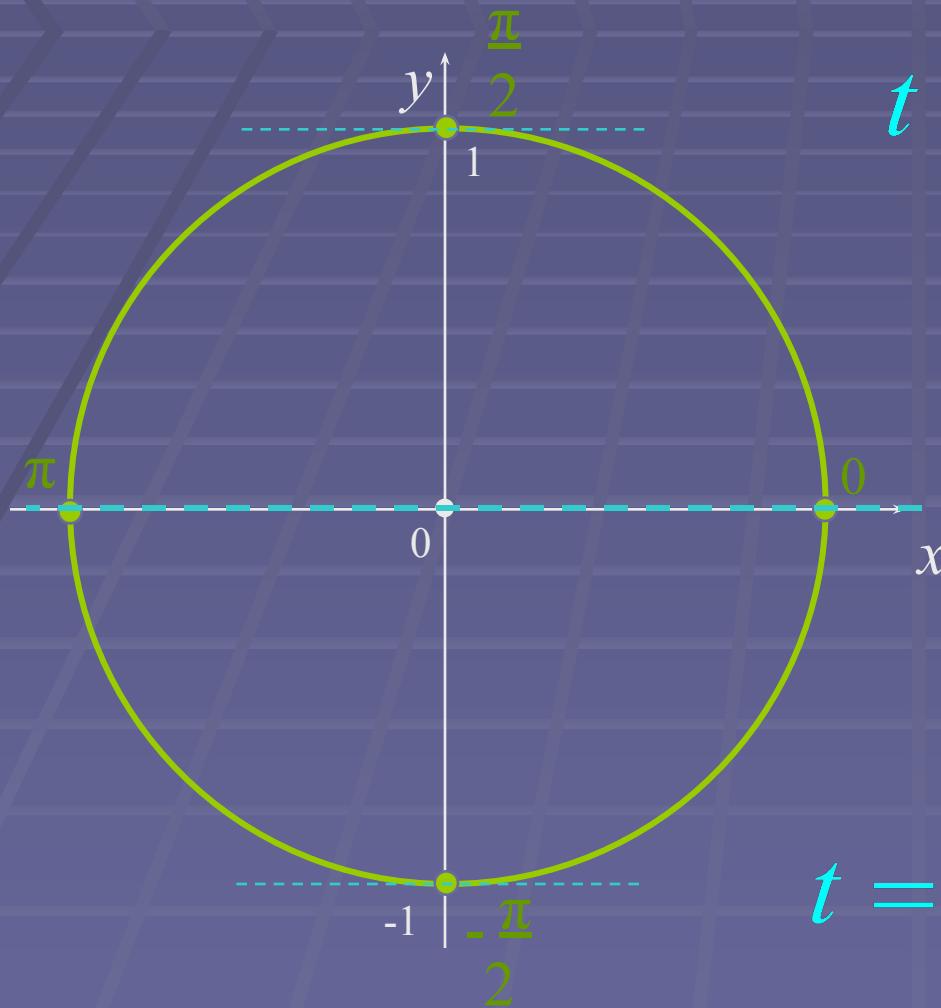
Уравнение $\sin t = a$



$$t = \begin{cases} t_1 + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \\ \pi - t_1 + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

1. Проверить условие $| a | \leq 1$
2. Отметить точку a на оси ординат.
3. Построить перпендикуляр в этой точке.
4. Отметить точки пересечения перпендикуляра с окружностью.
5. Полученные точки – решение уравнения $\sin t = a$.
6. Записать общее решение уравнения.

Частные случаи уравнения $\sin t = a$



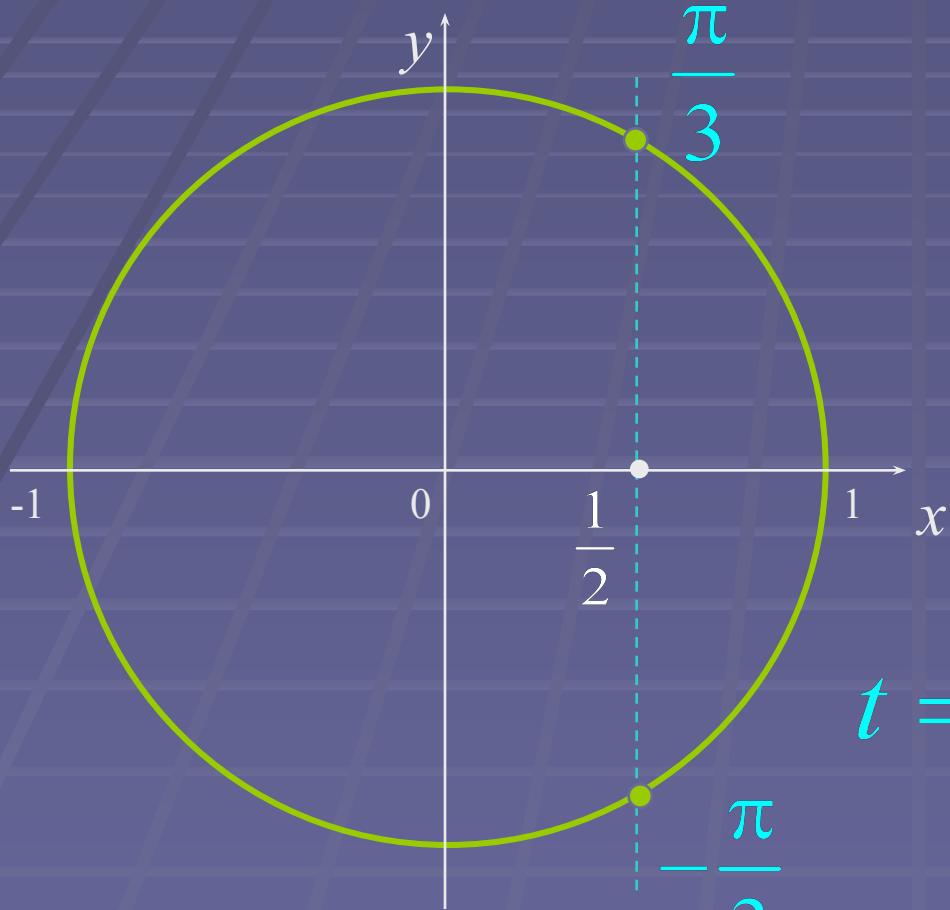
$$t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$t = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin t = -1$$

$$t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

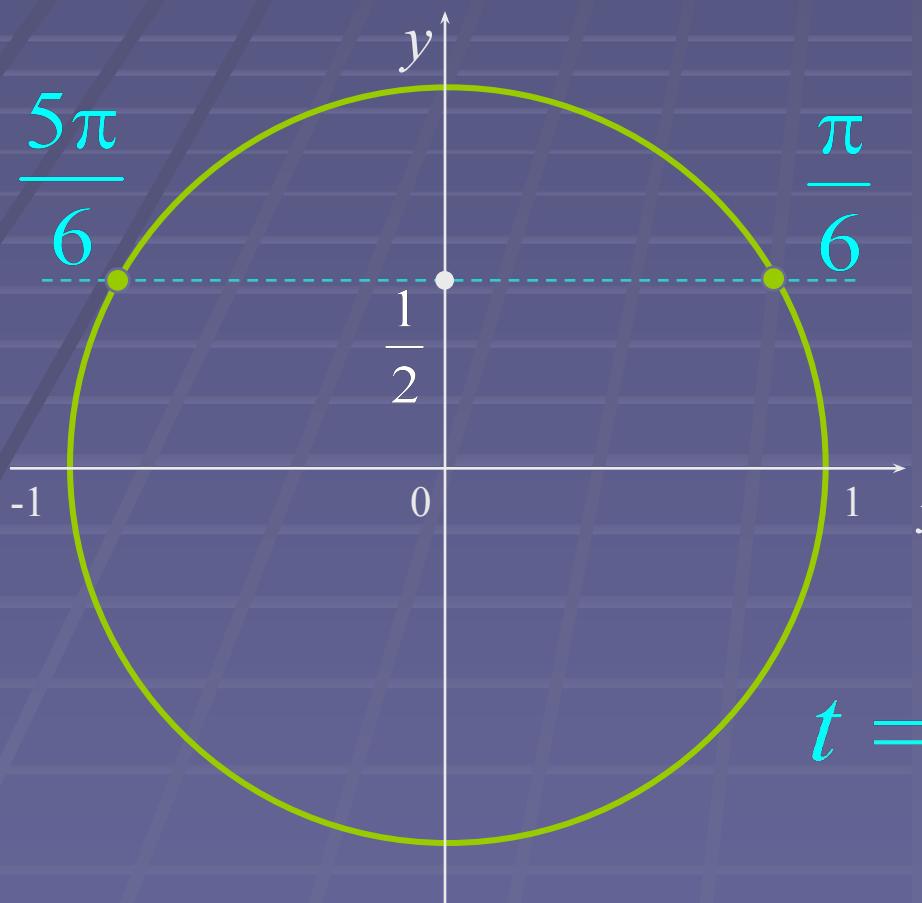
Примеры уравнений



$$\cos t = \frac{1}{2}$$

$$t = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Примеры уравнений



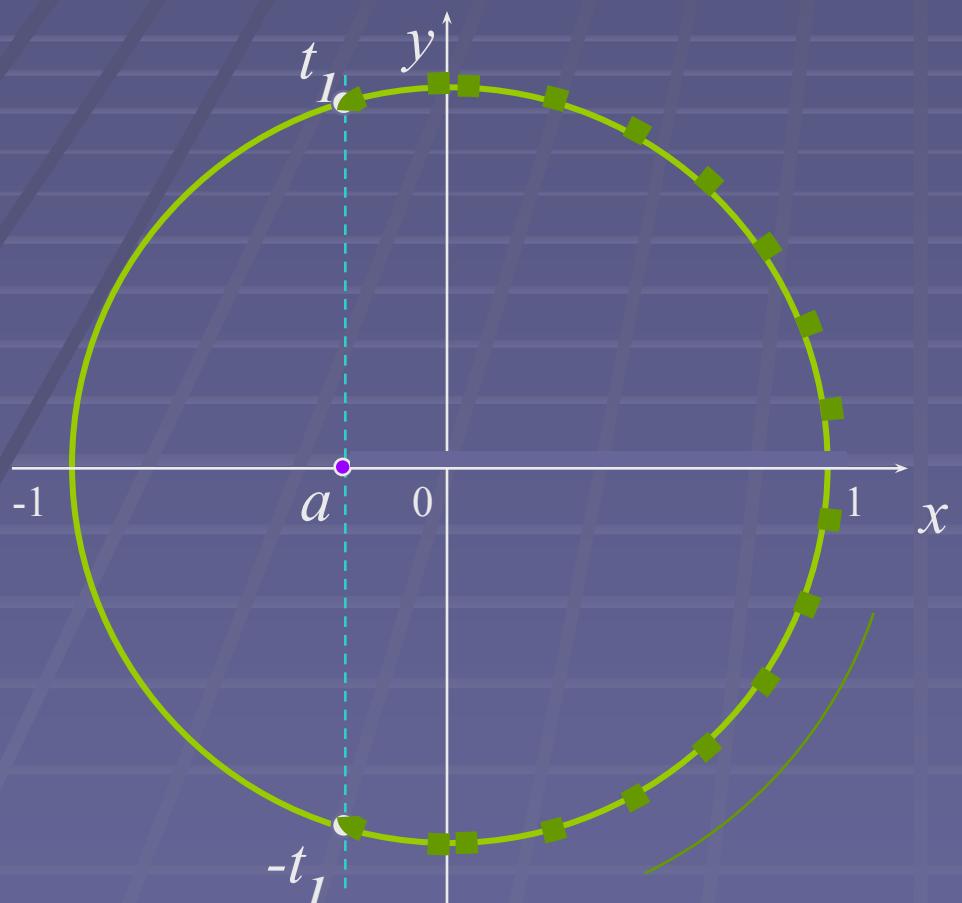
$$\sin t = \frac{1}{2}$$

$$t = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

- ✓ $cost > a, cost \leq a$
- ✓ $sint > a, sint \leq a$

Неравенства

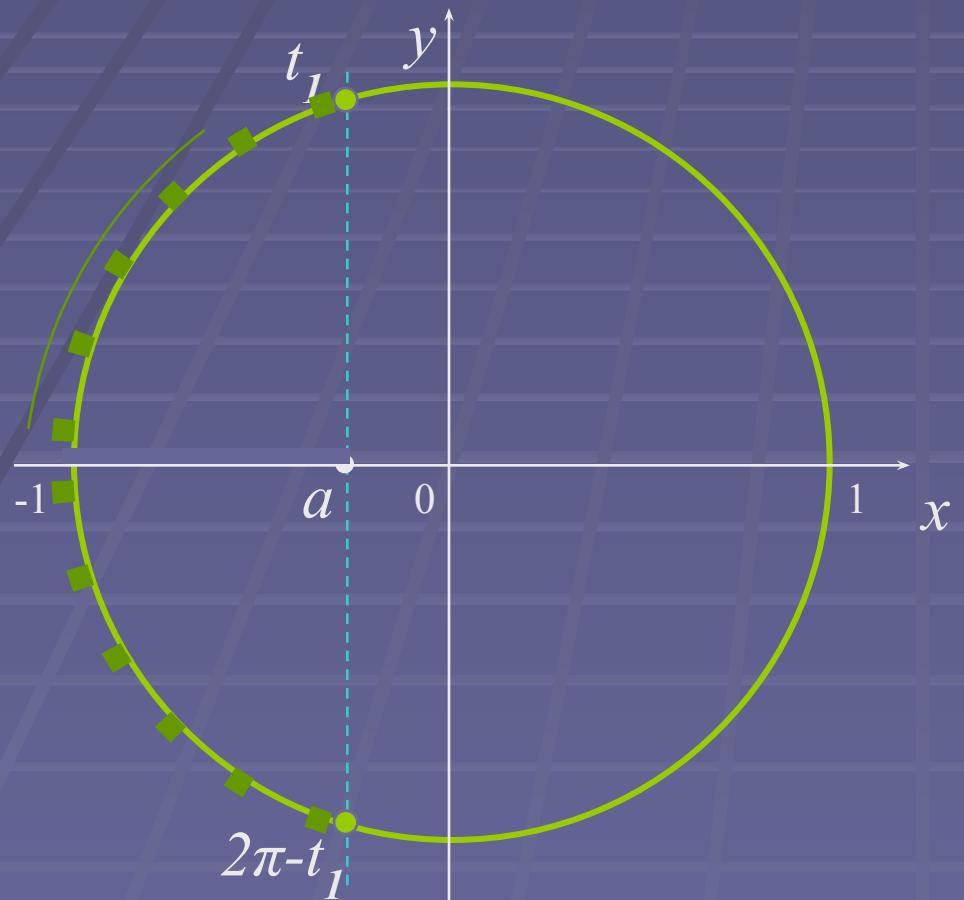
Неравенство $\cos t > a$



1. Отметить на оси абсцисс интервал $x > a$.
2. Выделить дугу окружности, соответствующую интервалу.
3. Записать числовые значения граничных точек дуги.
4. Записать общее решение неравенства.

$$t \in (-t_1 + 2\pi n; t_1 + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}$$

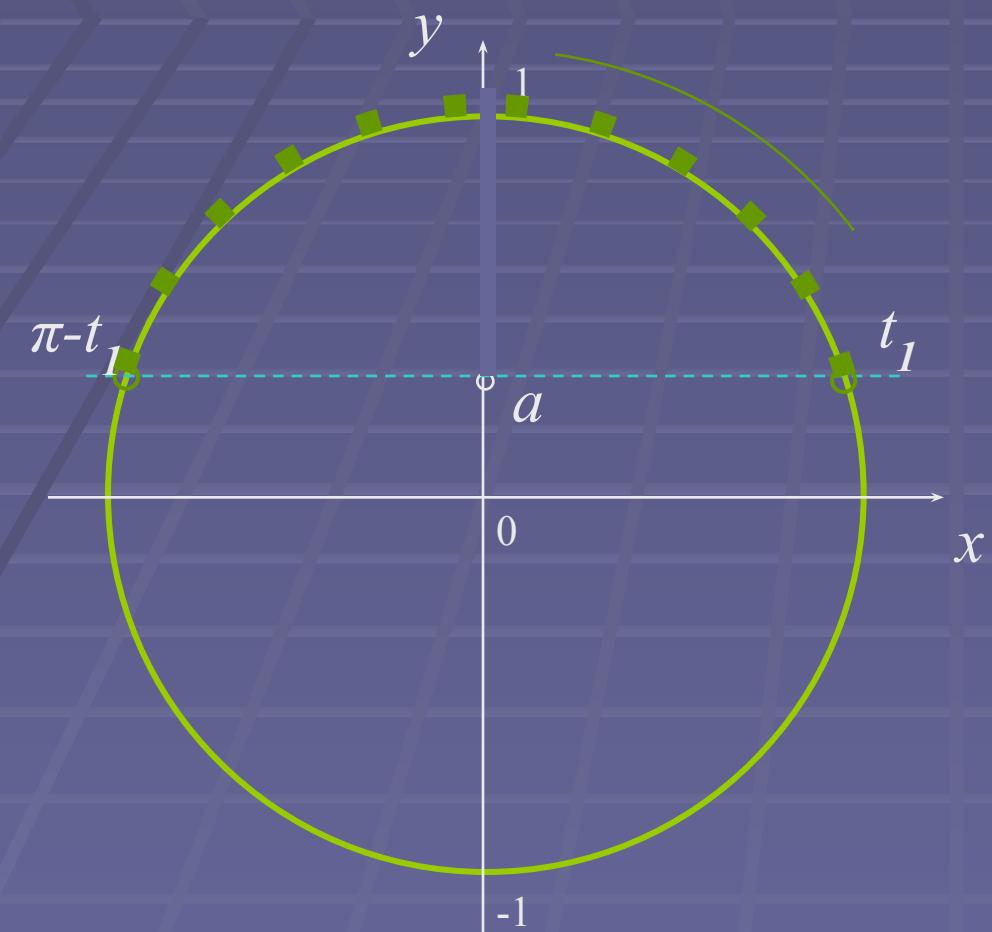
Неравенство $\cos t \leq a$



$$t \in [t_1 + 2\pi n; 2\pi - t_1 + 2\pi n], \quad n \in \mathbb{Z}$$

1. Отметить на оси абсцисс интервал $x \leq a$.
2. Выделить дугу окружности, соответствующую этому интервалу.
3. Записать числовые значения граничных точек дуги.
4. Записать общее решение неравенства.

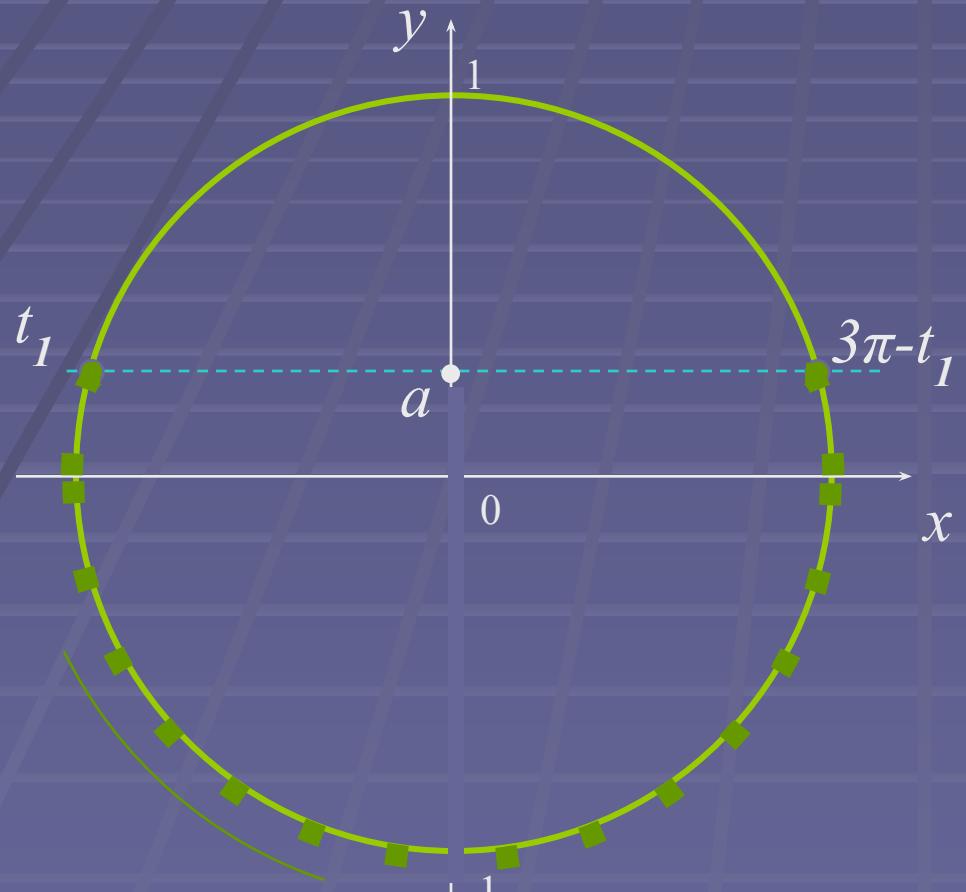
Неравенство $\sin t > a$



1. Отметить на оси ординат интервал $y > a$.
2. Выделить дугу окружности, соответствующую этому интервалу.
3. Записать числовые значения граничных точек дуги.
4. Записать общее решение неравенства.

$$t \in (t_1 + 2\pi n; \pi - t_1 + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}$$

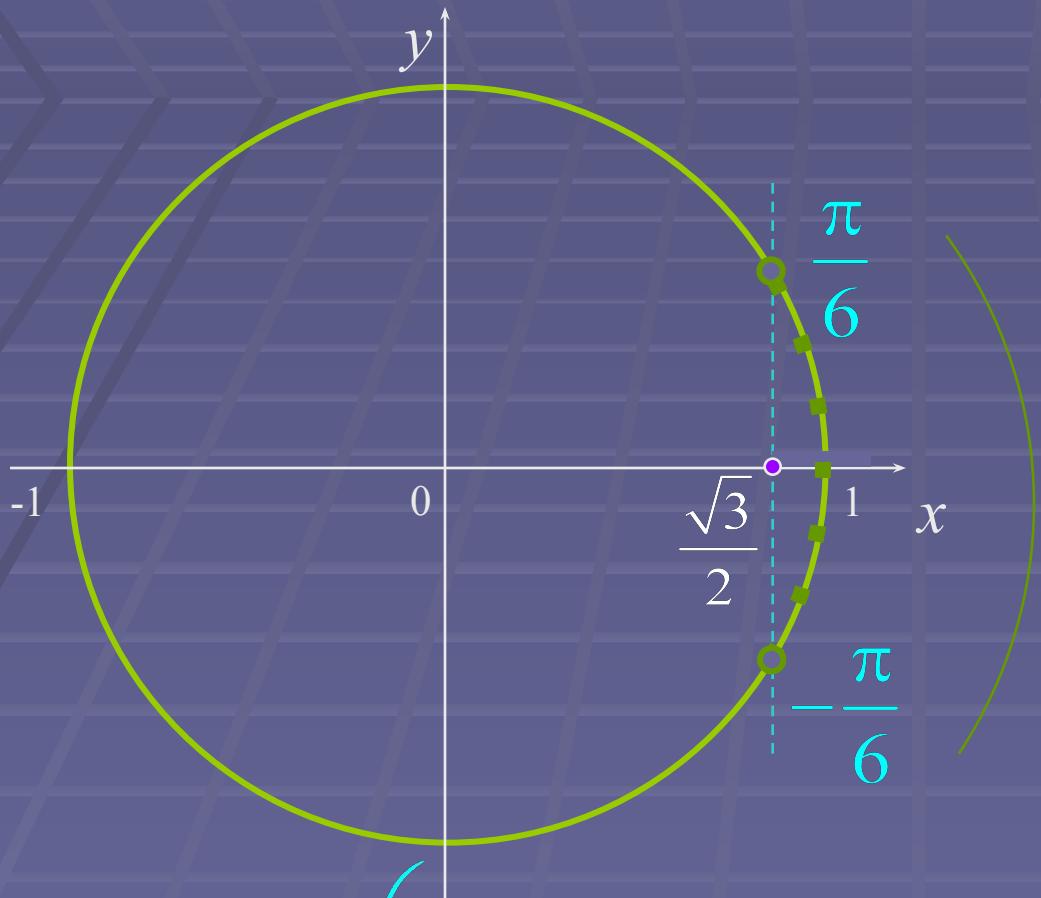
Неравенство $\sin t \leq a$



1. Отметить на оси ординат интервал $y \leq a$.
2. Выделить дугу окружности, соответствующую интервалу.
3. Записать числовые значения граничных точек дуги.
4. Записать общее решение неравенства.

$$t \in [t_1 + 2\pi n; 3\pi - t_1 + 2\pi n], \quad n \in \mathbb{Z}$$

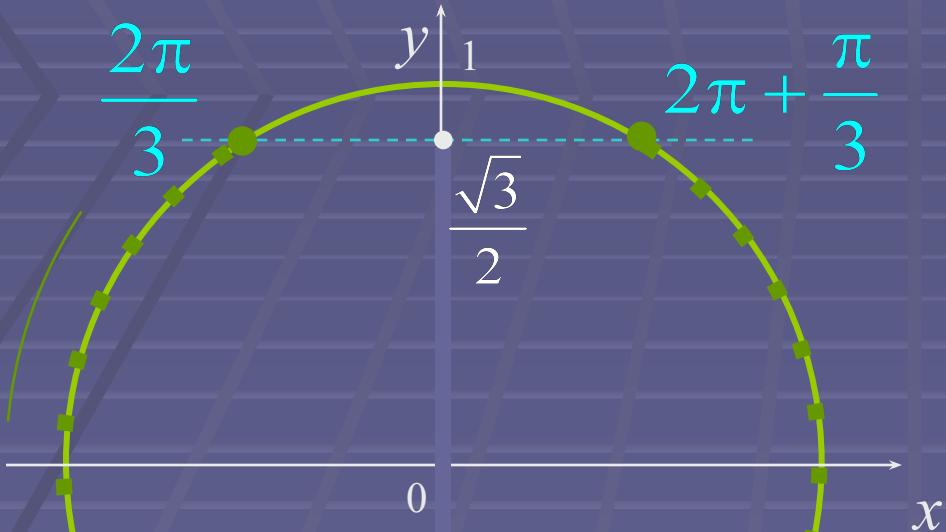
Примеры неравенств



$$\cos t > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$t \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n \right), \quad n \in \mathbb{Z}$$

Примеры неравенств

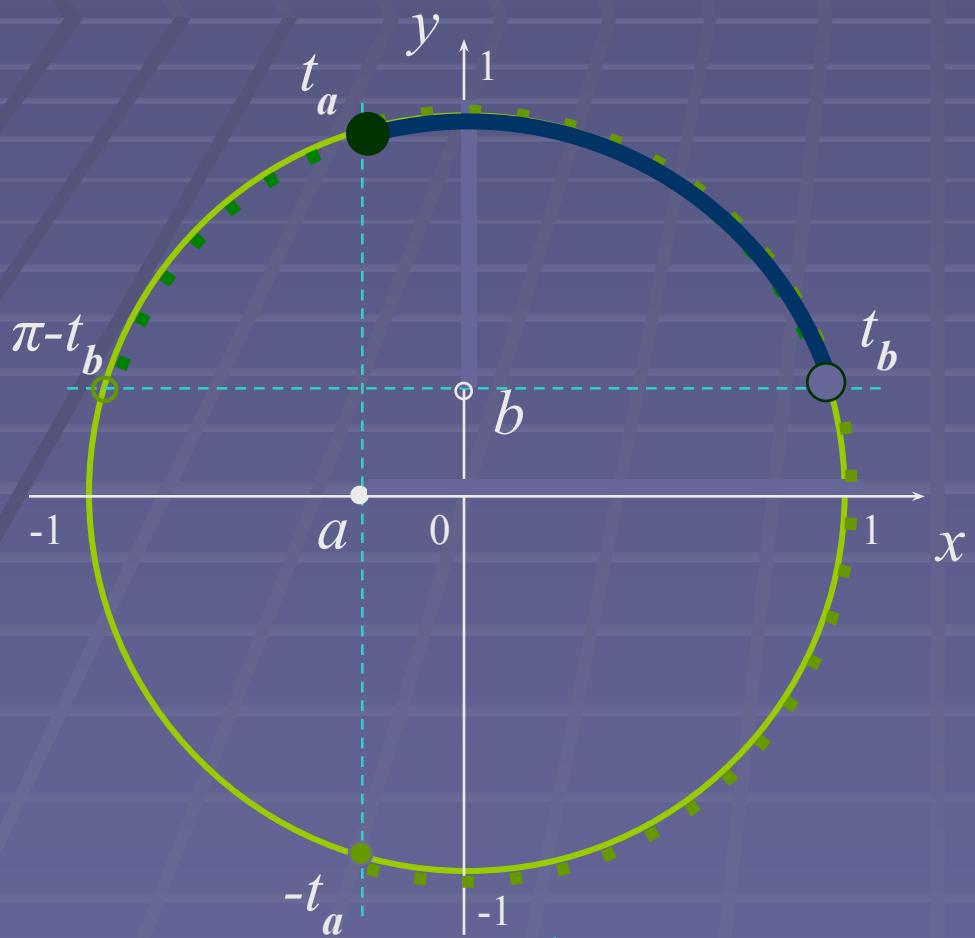


$$\sin t \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$t \in \left[\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{7\pi}{3} + 2\pi n \right], \quad n \in \mathbb{Z}$$

Система неравенств:

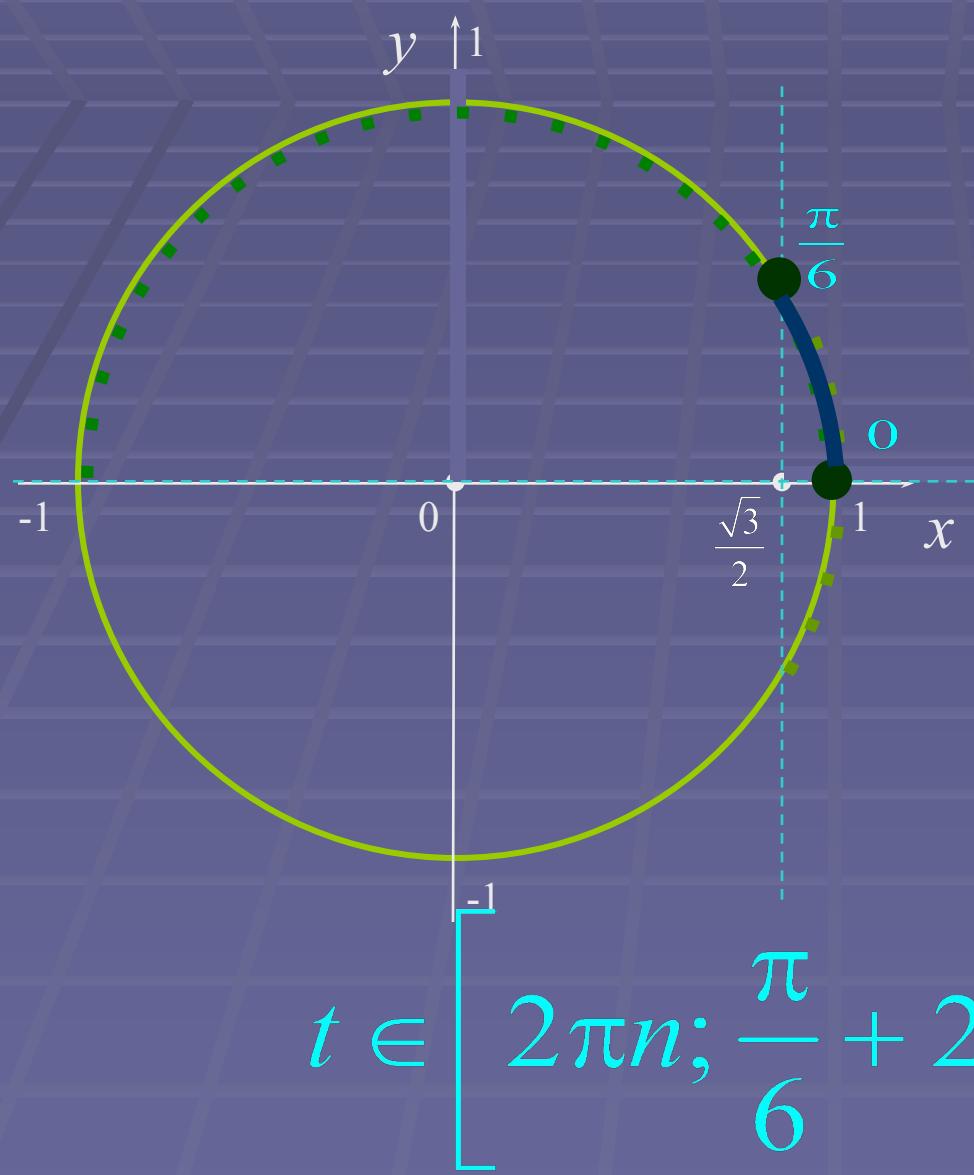
$$\begin{cases} \cos t \geq a, \\ \sin t > b \end{cases}$$



1. Отметить на окружности решение первого неравенства.
2. Отметить решение второго неравенства.
3. Выделить общее решение (пересечение дуг).
4. Записать общее решение системы неравенств.

$$t \in (t_b + 2\pi n; t_a + 2\pi n], \quad n \in \mathbb{Z}$$

Примеры систем



$$\begin{cases} \cos t \geq \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin t \geq 0 \end{cases}$$

$$t \in \left[2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n \right], \quad n \in \mathbb{Z}$$

Заключение

Основные понятия

- ✓ *тригонометрическая окружность*
- ✓ *градусы и радианы*
- ✓ *синус и косинус*
- ✓ *тангенс и котангенс*

Уравнения

- ✓ $\cos t = a$
- ✓ $\sin t = a$

Неравенства

- ✓ $\cos t > a, \cos t \leq a$
- ✓ $\sin t > a, \sin t \leq a$

Система неравенств

$$\begin{cases} \cos t \geq a, \\ \sin t > b \end{cases}$$