Основы высшей математики и математической статистики

Учебники:

1. *Н.Л. Лобоцкая и др.* **Высшая математика**. *Мн.1987г.*
2. *Морозов Ю.В.* **Основы высшей математики и статистики**. *М. 1998г.*
3. *И.В. Павлушков и соавт.* **Основы высшей математики и математической статистики**. *М.2004г.*

Лекция 1

Предел функции.
Производная функции.
Дифференциал функции.

§2. Пределы
п.1. Предел функции

Любой интервал (a,b), содержащий точку x_0, называется **окрестностью** точки x_0.

Интервал (x_0- δ, x_0+ δ), где ε>0, симметричный относительно x_0, называется δ **-окрестностью** точки x_0.

Пусть функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, может быть, самой точки x_0.

Число A называется **пределом функции** f(x) **в точке x_0**, если для любого числа ε>0 найдется такое положительное число δ, что для любого x≠ x_0, удовлетворяющего неравенству $|x- x_0|<$ δ, выполняется соотношение |f(x)-A|< ε.

ОБОЗНАЧЕНИЕ: $$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

Число A_1 называется ***пределом функции y=f(x) слева в точке x_0***, если для любого наперёд заданного сколь угодно малого ε>0 существует такое δ>0, что при всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ выполняется неравенство $|f(x)-A| < \varepsilon$.

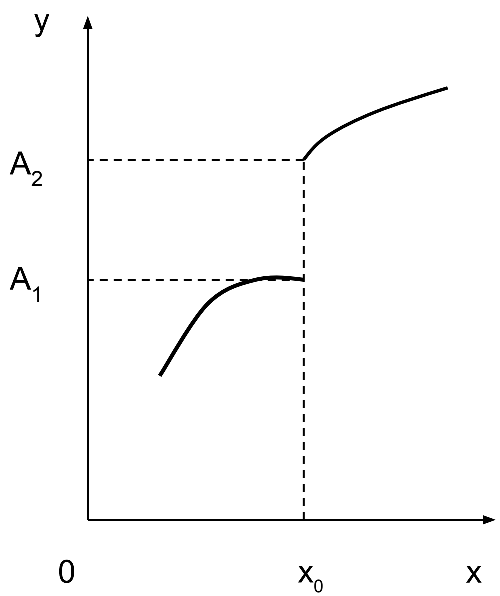
ОБОЗНАЧЕНИЕ: $$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$$

Предел функции y=f(x) справа: $$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$$

Пределы слева и справа называются *<u>односторонними</u>* пределами.

Если существуют односторонние пределы, оба равные A, то существует и предел функции, равный также A.

Если $A_1 \neq A_2$, то предел функции f(x) в точке x_0 не сущ-ет.



П.2. Бесконечно малые функции.

Функция f(x) называется **бесконечно малой** при $x \to x_0$, если

$$. \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

Обозначение: α, β, γ и т.д.

Если $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция (величина), то

$\frac{1}{\alpha(x)} = \beta(x)$ - бесконечно большая величина, т.е. $\lim_{x \to x_0} \beta(x) = \infty$

Свойства бесконечно малых.

Теорема 1. Если функция f(x) имеет предел при $x \to x_0$, равный A, то она представима в виде

$f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – б.м.ф.

Справедливо и обратное: если функция f(x) представима равенством $f(x) = A + \alpha(x)$ при $x \to x_0$, то её предел равен A.

Теорема 2. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых в точке функций есть бесконечно малая функция

Теорема 3. Произведение ограниченной при функции на бесконечно малую есть бесконечно малая функция.

Следствие 1. Произведение постоянной величины на бесконечно малую есть функция бесконечно малая.

Следствие 2. Произведение конечного числа бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая

<u>п.3. Непрерывные функции</u>

Функция f(x) называется **непрерывной** в точке $x=x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Функция f(x) называется **непрерывной в данной <u>точке</u>**, если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

Функция f(x) называется **непрерывной в <u>интервале</u>**, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Если функция f(x) в точке x_0 не является непрерывной, то эта точка называется **точкой разрыва**, а функция **разрывной в данной точке**.

П.4. Основные теоремы о пределах

Теорема 1.

Предел алгебраической суммы конечного числа функций равен сумме пределов этих функций.

$$\lim_{x\to x_0}\left(\sum_{i=1}^{n}k_i f_i(x)\right)=\sum_{i=1}^{n}k_i\left(\lim_{x\to x_0} f_i(x)\right)$$, k - const

Следствие.

Предел постоянной равен самой постоянной $\lim\limits_{x\to x_0} C = C$, C – const.

Теорема 2.

Предел произведения конечного числа функций равен произведению пределов этих функций

$$\lim_{x\to x_0}\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(x)\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(\lim_{x\to x_0} f_i(x)\right)$$

Теорема 3.

Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций в случае, если предел знаменателя отличен от нуля.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)},\ \text{если}\ \lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0$$

Теорема 4.

Предел сложной, непрерывной функции определяется формулой

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x))=f(\lim_{x\to x_0} g(x))$$

Т.е. знак предела и функции можно менять местами

П.5. Методы вычисления пределов

1. С помощью теорем о пределах и подстановки $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$$\lim_{x\to 4}\left(4x^2-2\right)=\lim_{x\to 4}\left(4x^2\right)-\lim_{x\to 4}2=4\lim_{x\to 4}\left(x^2\right)-2=4\left(\lim_{x\to 4}x\right)^2-2=4\cdot 4^2-2=62$$

2. Разложение на множители

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2+4x-5}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+5)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x+5}=\frac{1-2}{1+5}=-\frac{1}{6}.$$

3. Умножение на сопряженное выражение

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(x+3-4)}=\lim_{x\to 1}(\sqrt{x+3}+2)=4.$$

4. Деление на наивысшую (наименьшую) степень аргумента

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^5-31x+16}{1-x^3-x^5}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5(3-\frac{31}{x^4}+\frac{16}{x^5})}{x^5(\frac{1}{x^5}-\frac{1}{x^2}-1)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{31}{x^4}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{16}{x^5}}{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^5}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}1}=\frac{3-31\cdot 0+16\cdot 0}{0-0-1}=-3$$

5. С использованием замечательных пределов

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

2. $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e=2.718281\ldots$$ - основание натурального логарифма

1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 6x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 5x}{x}}{\frac{\sin 6x}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{6\sin 6x}{6x}}=$$

$$=\frac{5\lim\limits_{5x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}}{6\lim\limits_{6x\to 0}\frac{\sin 6x}{6x}}=\frac{5\cdot 1}{6\cdot 1}=\frac{5}{6}.$$

2.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-2}\right)^{x}=\begin{bmatrix} t=x-2 \\ x=t+2 \\ x\to\infty, mo \\ \mathrm{t}\to\infty \end{bmatrix}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+2}=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2}\right]=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\cdot\left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]^{2}=e\cdot 1^{2}=e$$

§2. **Производная функции**

п.1. Приращение аргумента. Приращение функции

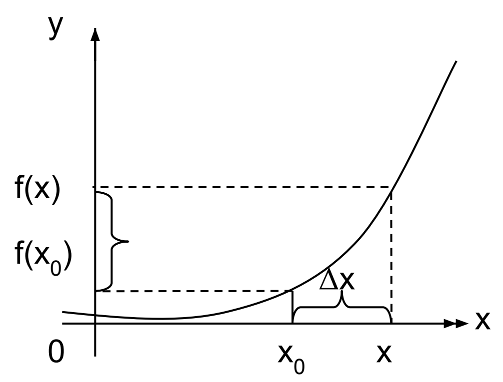
Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором интервале,

x_0 и x – два произвольных значения аргумента из этого интервала.

Разность между двумя значениями аргумента называется **ПРИРАЩЕНИЕМ АРГУМЕНТА.** $\mathbf{\Delta x = x - x_0 \Rightarrow x = x_0 + \Delta x}$

ПРИРАЩЕНИЕМ ФУНКЦИИ в т. x_0, соответствующим приращению Δx аргумента в этой точке, называется разность

$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$



Определение производной.

Пусть дана функция f(x), определенная и непрерывная на интервале (a, b).

Дадим аргументу *x*є(a, b) приращение Δx, такое что (x+ Δx)є(a, b).

Тогда функция f(x) получит приращение Δf =f(x+ Δx)- f(x):

Предел отношения приращения **Δf** функции f(x) к соответствующему приращению **Δx** аргумента x при стремлении **Δx** к нулю, называется **ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ f(x) в точке *x***, при условии, что этот предел существует.

ОБОЗНАЧЕНИЕ:

$$f_x^{/} = y_x^{/} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Функция, для которой в точке x существует конечная производная называется **дифференцируемой в данной точке.**

Если функция имеет конечные производные во всех точках некоторого промежутка, то она называется **дифференцируемой на данном промежутке**.

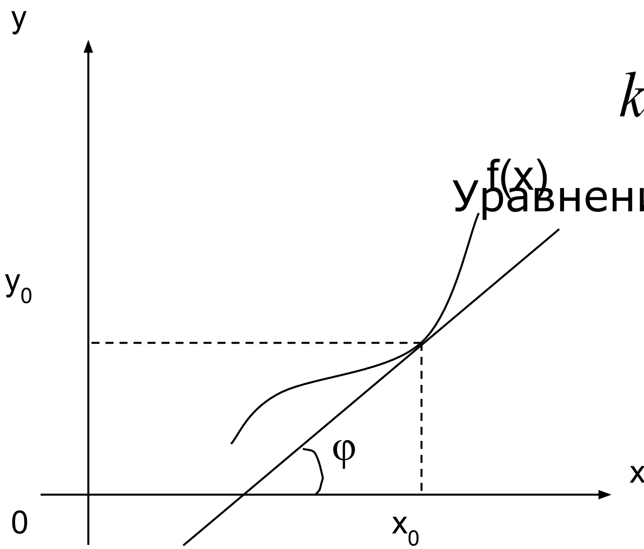
Физический смысл первой производной функции.

мгновенная скорость протекания физических, химических и др. процессов находится как предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю. (*физический смысл производной*)

Геометрический смысл первой производной.

Угловой коэффициент касательной, проведенной к графику дифференцируемой функции в некоторой точке, численно равен производной функции в данной точке.

(угл. коэф. касательной = тангенс угла наклона касательной)



$$k = tg\varphi = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Уравнение касательной к функции $y=f(x)$ в точке (x_0,y_0) имеет вид:

$$\mathbf{y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0}$$

, где $y_0=f(x_0)$

<u>Связь непрерывности и дифференцируемости</u>

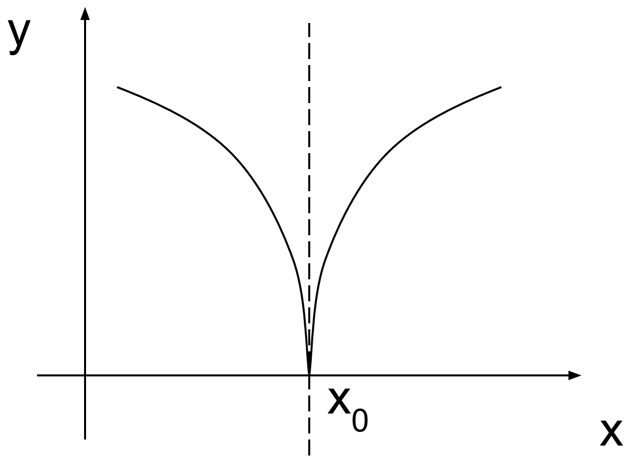
<u>Теорема</u>.

Если функция f(x) <u>дифференцируема</u> в некоторой точке x, то она <u>непрерывна</u> в этой точке.

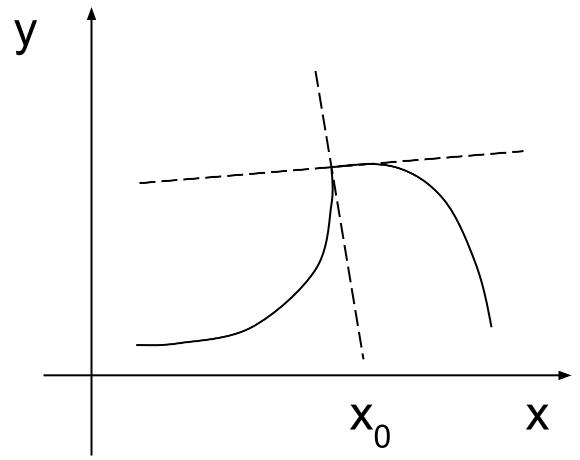
$$\textit{дифференцируемость} \Rightarrow \textit{непрерывность}$$

Обратное утверждение неверно!

$$\textit{непрерывность} \not\Rightarrow \textit{дифференцируемость}$$



Бесконечная производная



Нет производной

<u>Следствие</u>.

Если функция разрывна в некоторой точке, то она не имеет производной в этой точке.

Правила дифференцирования.

1. Производная постоянной величины равна нулю.

$$(C)_x^{/} = 0, если \quad C - const$$

2. Производная алгебраической суммы конечного числа функций равна сумме производных слагаемых

$$(u + v + w + \ldots + m)^{/} = u^{/} + v^{/} + w^{/} + \ldots + m^{/}$$

3. Производная произведения двух функций определяется формулой

$$(u \cdot v)^{/} = u^{/} \cdot v + u \cdot v^{/}$$

4. Производная частного от деления двух функций определяется формулой

$$\left(\frac{u}{v}\right)^{/} = \frac{u^{/} \cdot v - u \cdot v^{/}}{v^2}$$

Производная сложной функции

Теорема.

Если функция **u=g(x)** имеет производную $u'_x = g'(x)$ в точке **x**, а функция **y=f(u)** – производную $y'_u = f'(u)$ в соответствующей точке **u**, то сложная функция **y=f(g(x))** в данной точке x имеет производную $y'_x = F'(x)$, которая находится по формуле

$$y'_x = f'_u \cdot u'_x$$

Нахождение производной идет в порядке, противоположном порядку вычисления функции.

Пример. Вычислить производную функции $y = \ln \sin e^{3x}$

Решение.

Нахождение **y'**:

$$\frac{1}{\sin e^{3x}} \to \cos e^{3x} \to e^{3x} \to 3 \to 1$$

Т.о.

$$y' = \frac{1}{\sin e^{3x}} \cdot \cos e^{3x} \cdot e^{3x} \cdot 3 \cdot 1 = 3e^{3x} \cdot ctge^{3x}$$

§2. Дифференциал функции

Согласно определению производной $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x)$

На основании теоремы о представлении функции как суммы её предела и б.м.ф., данное равенство означает, что

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$$

$$\Delta f = f'(x)\Delta x + \Delta x \cdot \alpha(\Delta x)$$ где $\alpha(\Delta x)$ – б.м. при $\Delta x \to 0$

Первое слагаемое стремится к нулю при Δx->0 медленнее второго, поэтому его называют **главной частью приращения функции**.

Главная часть приращения функции Δy, равная произведению **y’ Δx**, называется **дифференциалом первого порядка** от функции y=f(x), соответствующим выбранным значениям x и Δx. (аналитический смысл дифференциала)

Обозначение: **dy = f’(*x*)Δ*x***

Механический смысл дифференциала

Если s=f(t) есть путь, пройденный материальной точкой за время t, то производная s'_t есть скорость движения в момент времени t.

Тогда **дифференциал** пути **ds =f′(t)Δt приближенно равен пути, пройденному материальной точкой от момента времени t до момента времени t+Δt,** если пренебречь изменением скорости движения на данном промежутке времени.

Вторая форма записи дифференциала

dx = Δ*x*, т.к. y = x => dy = dx = x′· Δ*x* = Δ*x*

Тогда **dy = f′(*x*) · dx**

$$f^{/}(x)=\frac{dy}{dx}$$ - другое обозначение производной

Свойства дифференциала

1. $d(u \pm v) = du \pm dv$

2. $d(u \cdot v) = du \cdot v + dv \cdot u$

3. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u dv}{v^{2}}$

4. $d(k \cdot u) = k \cdot du$, k- const

5. Дифференциал сложной функции

Если y = f(u), u = g(x) – дифференцируемые функции своих аргументов, то производная функция y = f(g(x)) выражается формулой

$$y'_x = f'(u) \cdot u'_x(x)$$

$$dy = y'_x dx = f'_u \cdot u'_x dx = f'_u \cdot du$$

Пример. Вычислить дифференциал функции

$$y = \ln(x^2 + 1),\ y = \ln u,\ u = x^2 + 1$$

Решение. $dy = \dfrac{1}{u} du = \dfrac{1}{x^2+1} d(x^2+1) = \dfrac{1}{x^2+1} \cdot 2x dx$

Производные высших порядков.

Производную f′(x) функции y = f(x) называется **ПРОИЗВОДНОЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА** или просто **первой производной** этой функции.

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Производная функции является функцией => ее можно дифференцировать.

ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ или **производной второго порядка** называется производная от ее первой производной.

$$y'' = \left(y'\right)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Производная (n-1)й производной (n϶N) называется **ПРОИЗВОДНОЙ n-го ПОРЯДКА** или n-й производной.

Обозначение: $f^{(n)}(x)$

Физический смысл второй производной

Вторая производная функции есть мгновенное ускорение $a_{мгн}$ прямолинейно движущейся точки в момент времени t

$$a_{мгн} = \lim_{\Delta t \to 0} a_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vartheta}{\Delta t} = \vartheta'_t = s''_t$$

Спасибо за внимание.

До свидания!