ОСОБЫЕ СЛУЧАИ ПРИМЕНЕНИЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДА

Вырожденность решения

$$f = 3x_1 + 9x_2 \to \max$$

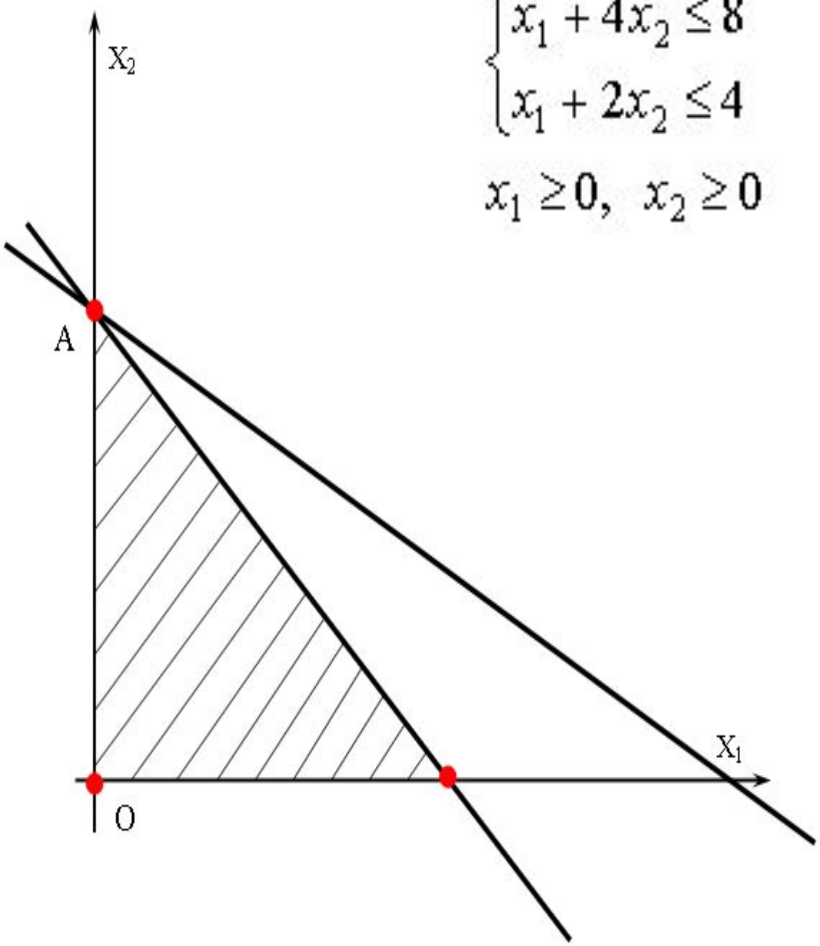
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 8 \\ x_1 + 2x_2 \le 4 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

$$f = 3x_1 + 9x_2 + 0x_3 + 0x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0, \quad x_4 \ge 0$$

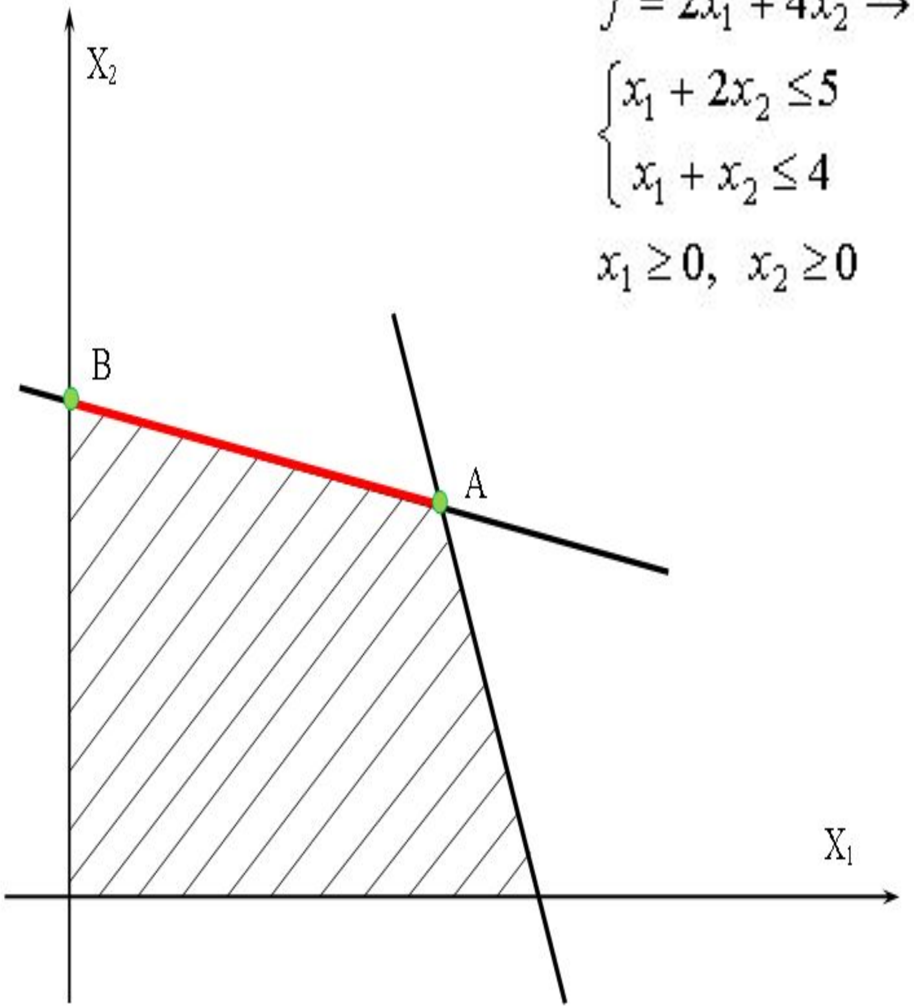


О	БП	x1	x2	x3	x4	Решение	
	x3	1	4	1	0	8	2
	x4	1	2	0	1	4	2
	f	-3	-9	0	0	0	

А	БП	x1	x2	x3	x4	Решение	
	x2	0,25	1	0,25	0	2	8
	x4	0,5	0	-0,5	1	0	0
	f	-0,75	0	2,25	0	18	

А	БП	x1	x2	x3	x4	Решение
	x2	0	1	0,5	-0,5	2
	x1	1	0	-1	2	0
	f	0	0	1,5	1,5	18

II Альтернативные оптимальные решения



$$f = 2x_1 + 4x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 5 \\ x_1 + x_2 \le 4 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

$$f = 2x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 4 \end{cases}$$

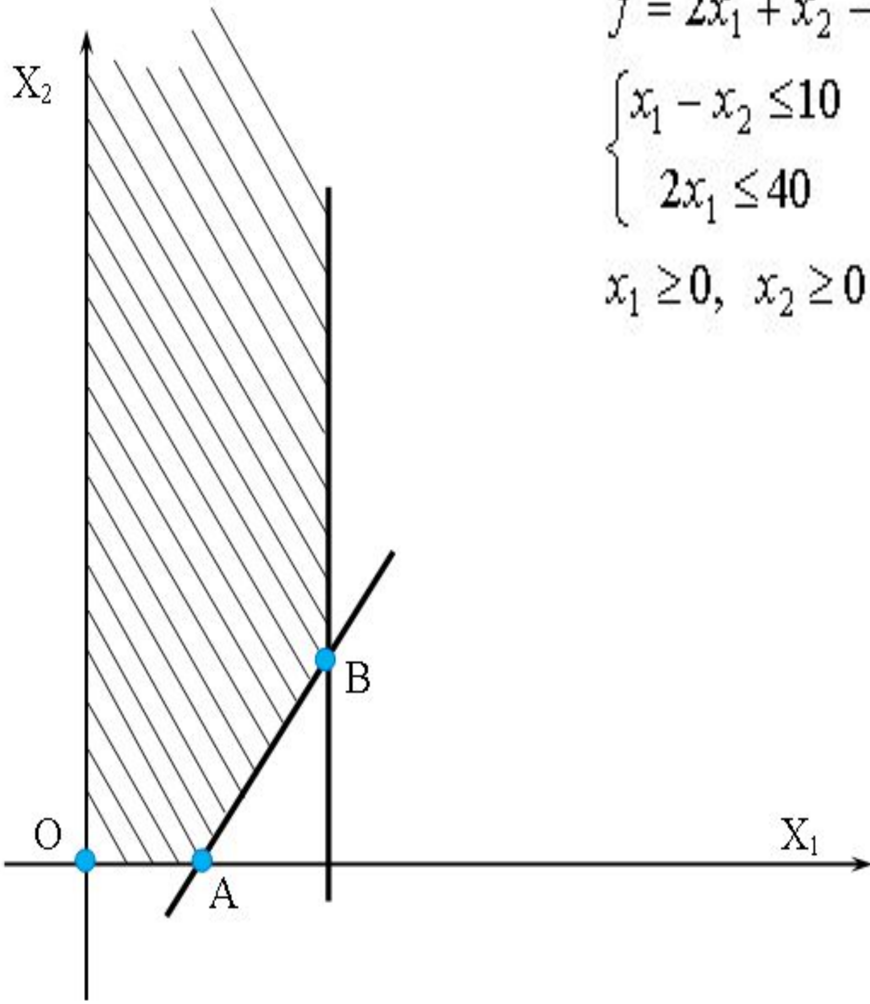
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0, \quad x_4 \ge 0$$

O	БП	x1	x2	x3	x4	решение	
	x3	1	2	1	0	5	2,5
	x4	1	1	0	1	4	4
	f	-2	-4	0	0	0	

B	БП	x1	x2	x3	x4	решение	
	x2	0,5	1	0,5	0	2,5	5
	x4	0,5	0	-0,5	1	1,5	3
	f	0	0	2	0	10	

A	БП	x1	x2	x3	x4	решение	
	x2	0	1	1	-1	1	
	x1	1	0	-1	2	3	
	f	0	0	2	0	10	

III Неограниченное решение



$$f = 2x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 10 \\ 2x_1 \le 40 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

$$f = 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + x_4 = 40 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0, \quad x_4 \ge 0$$

O	БП	x1	x2	x3	x4	решение	
	x3	1	-1	1	0	10	10
	x4	2	0	0	1	40	20
	f	-2	-1	0	0	0	

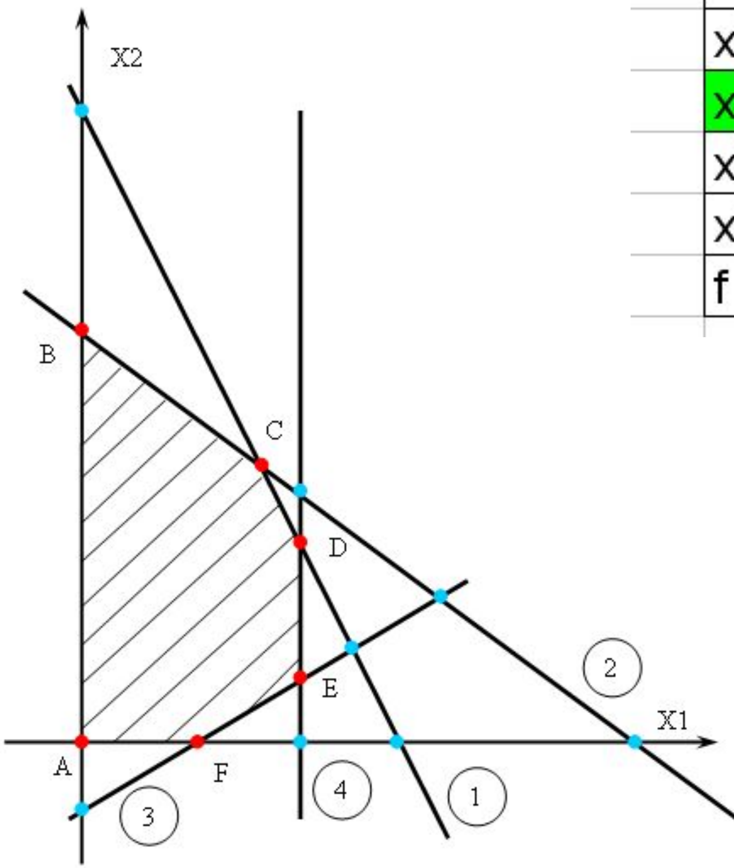
A	БП	x1	x2	x3	x4	решение	
	x1	1	-1	1	0	10	-10
	x4	0	2	-2	1	20	10
	f	0	-3	2	0	20	

B	БП	x1	x2	x3	x4	решение	
	x1	1	0	0	0,5	20	#ДЕЛ/0!
	x2	0	1	-1	0,5	10	-10
	f	0	0	-1	1,5	50	

Анализ ЗЛП на чувствительность

- I Статус ресурса – дефицитный (недефицитный) – определяется по значению дополнительных переменных в оптимальном решении
- II Ценность ресурса – определяется коэффициентами ЦФ при дополнительных переменных в оптимальном решении

Статус и ценность ресурсов



A

БП	x1	x2	x3	x4	x5	x6	решение
x3	2	1	1	0	0	0	6
x4	1	2	0	1	0	0	8
x5	1	-1	0	0	1	0	1
x6	1	0	0	0	0	1	2
f	-2	-3	0	0	0	0	0

C

БП	x1	x2	x3	x4	x5	x6	решение
x1	1	0	0,67	-0,3	0	0	1,33333
x2	0	1	-0,33	0,7	0	0	3,33333
x5	0	0	-1	1	1	0	3
x6	0	0	-0,67	0,3	0	1	0,66667
f	0	0	0,33	1,3	0	0	12,6667

недефицитность ресурсов

ценность ресурсов

Анализ ЗЛП на чувствительность – изменение запасов ресурсов

Таблица соответствует оптимальному решению

БП	X_1	X_2	...	X_n	X_{n+1}	...	X_{n+i}	...	X_{n+m}	Решение
Y_1	A_{11}	A_{12}	...	A_{1n}	$A_{1(n+1)}$	...	$A_{1(n+i)}$	...	$A_{1(n+m)}$	R_1
Y_2	A_{21}	A_{22}	...	A_{2n}	$A_{2(n+1)}$	...	$A_{2(n+i)}$	...	$A_{2(n+m)}$	R_2
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
Y_k	A_{k1}	A_{k2}	...	A_{kn}	$A_{k(n+1)}$	...	$A_{k(n+i)}$	...	$A_{k(n+m)}$	R_k
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
Y_m	A_{m1}	A_{m2}	...	A_{mn}	$A_{m(n+1)}$	...	$A_{m(n+i)}$	...	$A_{m(n+m)}$	R_m
f	F_1	F_2	...	F_n	F_{n+1}	...	F_{n+i}	...	F_{n+m}	Z

Изменение правой части одного из ограничений: $b_i + d \quad (d > 0 \quad \text{или} \quad d < 0)$

Варианты рассуждений при изменении:

а) решение задачи заново не требуется

$$Y_k = R_k + A_{k(n+i)}d$$
$$Z' = Z + F_{n+i}d$$
$$k = \overline{1,m}$$

если диапазон $d \in (D_1, D_2)$ из условия $Y_k = R_k + A_{k(n+i)}d > 0 \;\; k = \overline{1,m}$

б) при $d < D_1$ или $d > D_2$ - имеем недопустимый базис (сохранен принципом оптимальности)

1. решать задачу заново

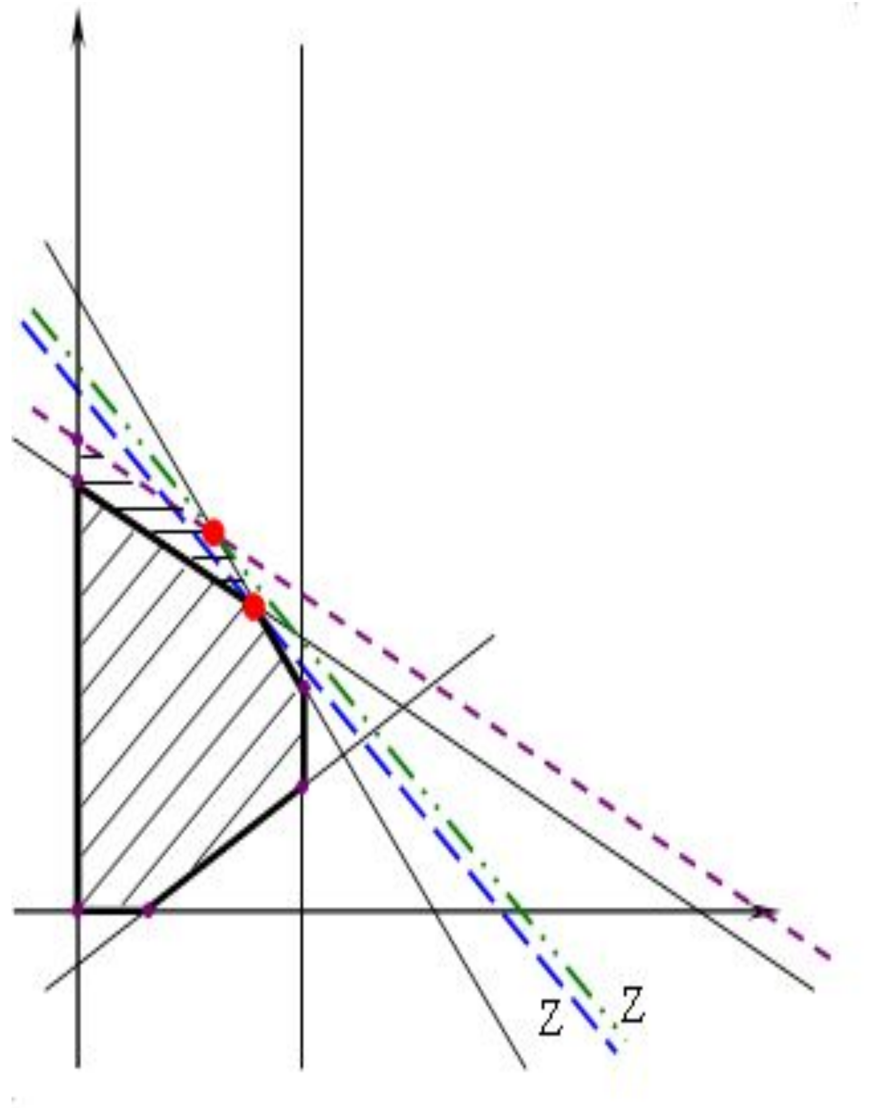
или

2. применить двойственный симплекс метод для перехода к допустимому решению

Пример анализа ЗЛП на чувствительность

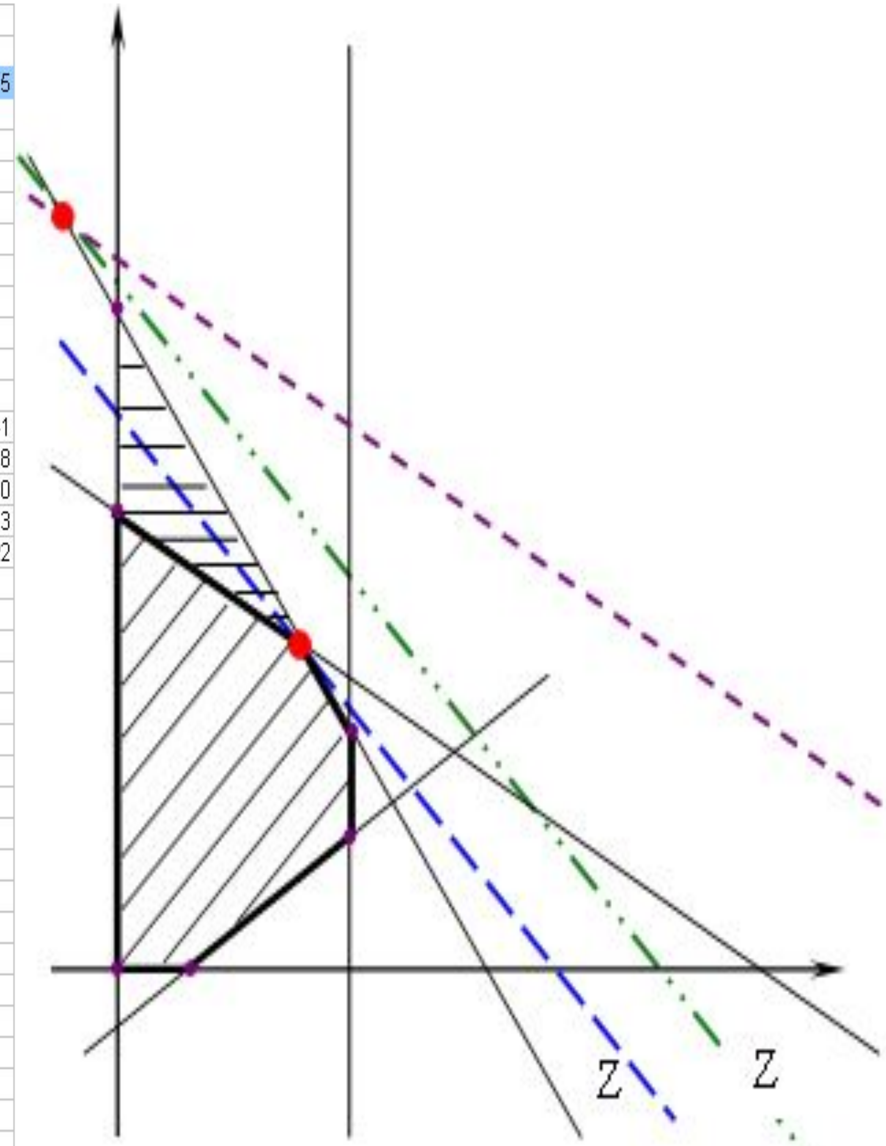
	x1	x2	x3	x4	x5	x6	решение			
x3	2	1	1	0	0	0	6	6		
x4	1	2	0	1	0	0	8	4		10
x5	1	-1	0	0	1	0	1	-1		
x6	1	0	0	0	0	1	2	#ДЕЛ/0!		
f	-2	-3	0	0	0	0	0			
x3	1,5	0	1	-0,5	0	0	2	1,333333		
x2	0,5	1	0	0,5	0	0	4	8		
x5	1,5	0	0	0,5	1	0	5	3,333333		
x6	1	0	0	0	0	1	2	2		
f	-0,5	0	0	1,5	0	0	12			
x1	1	0	0,666667	-0,33333	0	0	1,333333			0,666667
x2	0	1	-0,33333	0,666667	0	0	3,333333			4,666667
x5	0	0	-1	1	1	0	3			5
x6	0	0	-0,66667	0,333333	0	1	0,666667			1,333333
f	0	0	0,333333	1,333333	0	0	12,66667			15,33333

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	решение	
x3	2	1	1	0	0	0	6	6
x4	1	2	0	1	0	0	10	5
x5	1	-1	0	0	1	0	1	-1
x6	1	0	0	0	0	1	2	#ДЕЛ/0!
f	-2	-3	0	0	0	0	0	
x3	1,5	0	1	-0,5	0	0	1	0,666667
x2	0,5	1	0	0,5	0	0	5	10
x5	1,5	0	0	0,5	1	0	6	4
x6	1	0	0	0	0	1	2	2
f	-0,5	0	0	1,5	0	0	15	
x1	1	0	0,666667	-0,33333	0	0	0,666667	
x2	0	1	-0,33333	0,666667	0	0	4,666667	
x5	0	0	-1	1	1	0	5	
x6	0	0	-0,66667	0,333333	0	1	1,333333	
f	0	0	0,333333	1,333333	0	0	15,33333	



Пример анализа ЗЛП на чувствительность

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	решение			
x3	2	1	1	0	0	0	6	6		
x4	1	2	0	1	0	0	8	4		15
x5	1	-1	0	0	1	0	1	-1		
x6	1	0	0	0	0	1	2	#ДЕЛ/0!		
f	-2	-3	0	0	0	0	0			
x3	1,5	0	1	-0,5	0	0	2	1,333333		
x2	0,5	1	0	0,5	0	0	4	8		
x5	1,5	0	0	0,5	1	0	5	3,333333		
x6	1	0	0	0	0	1	2	2		
f	-0,5	0	0	1,5	0	0	12			
x1	1	0	0,666667	-0,33333	0	0	1,333333			-1
x2	0	1	-0,33333	0,666667	0	0	3,333333			8
x5	0	0	-1	1	1	0	3			10
x6	0	0	-0,66667	0,333333	0	1	0,666667			3
f	0	0	0,333333	1,333333	0	0	12,66667			22
	x1	x2	x3	x4	x5	x6	решение			
x3	2	1	1	0	0	0	6	6		
x4	1	2	0	1	0	0	15	7,5		
x5	1	-1	0	0	1	0	1	-1		
x6	1	0	0	0	0	1	2	#ДЕЛ/0!		
f	-2	-3	0	0	0	0	0			
x3	1,5	0	1	-0,5	0	0	-1,5	-1		
x2	0,5	1	0	0,5	0	0	7,5	15		
x5	1,5	0	0	0,5	1	0	8,5	5,666667		
x6	1	0	0	0	0	1	2	2		
f	-0,5	0	0	1,5	0	0	22,5			
x1	1	0	0,666667	-0,33333	0	0	-1			
x2	0	1	-0,33333	0,666667	0	0	8			
x5	0	0	-1	1	1	0	10			
x6	0	0	-0,66667	0,333333	0	1	3			
f	0	0	0,333333	1,333333	0	0	22			



Анализ ЗЛП на чувствительность – изменение коэффициентов ЦФ

Оптимальное решение: 1. базисные переменные $Y_1 = R_1,\ Y_2 = R_2,\ \ldots, Y_m = R_m$

2. свободные переменные $W_1 = 0,\ W_2 = 0,\ \ldots, W_n = 0$

3. Коэффициенты ЦФ - при $Y_i \ \left(i = \overline{1,m}\right)$ - 0

при $W_k \ \left(k = \overline{1,n}\right)$ - F_k

Изменение коэффициента ЦФ в исходной постановке задачи при переменной X_j

$$C'_j = C_j + d \quad (d > 0 \quad \text{или} \quad d < 0)$$

X_j - в оптимальном решении среди базисных ($Y_i \quad i = \overline{1,m}$) $\leftrightarrow Y_q = R_q$

Варианты рассуждений: 1. изменения базиса и значений базисных переменных нет,

2. изменения в строке ЦФ

решать задачу заново не надо

а) при $d \in (D_1, D_2)$ - оптимальное решение (набор базисных переменных и их значения) не изменяется

$$F'_k = F_k + A_{qk} d \quad \text{при} \quad W_k \quad k = \overline{1,n}$$

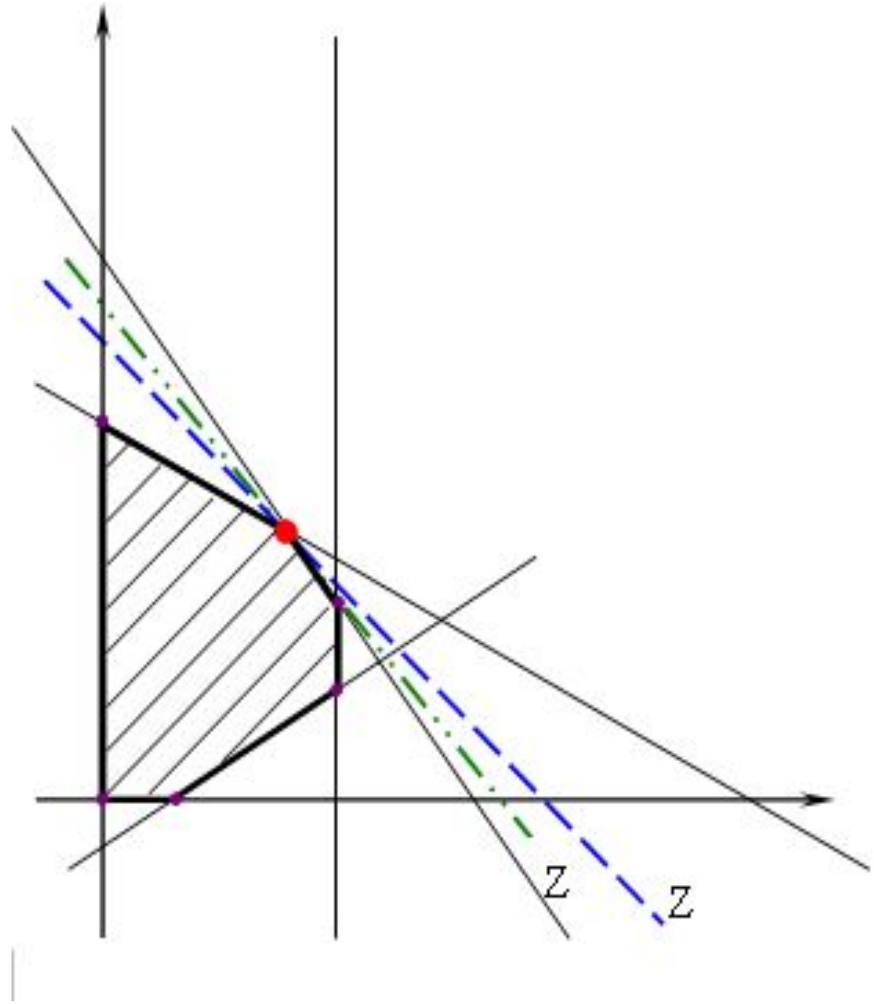
$$Z' = Z + R_q d$$

диапазон (D_1, D_2) из условия $F'_k = F_k + A_{qk} d > 0$

б) при $d < D_1$ или $d > D_2$ - пересчет F'_k и Z' - имеем допустимый неоптимальный базис, осуществляем поиск оптимального решения далее симплекс-методом

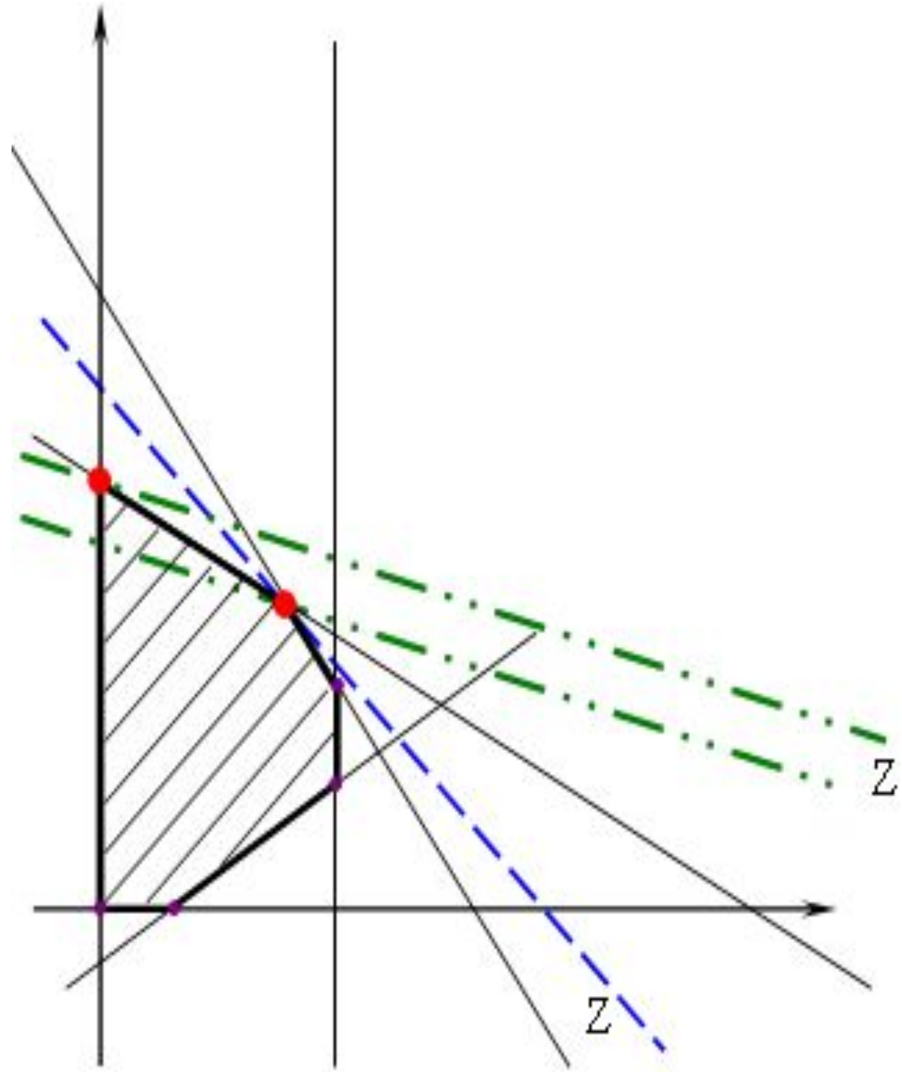
Пример анализа ЗЛП на чувствительность

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	решение			
x3	2	1	1	0	0	0	6	6		x2
x4	1	2	0	1	0	0	8	4		
x5	1	-1	0	0	1	0	1	-1		
x6	1	0	0	0	0	1	2	#ДЕЛ/0!		
f	-2	-3	0	0	0	0	0			-2
x3	1,5	0	1	-0,5	0	0	2	1,333333		
x2	0,5	1	0	0,5	0	0	4	8		
x5	1,5	0	0	0,5	1	0	5	3,333333		
x6	1	0	0	0	0	1	2	2		
f	-0,5	0	0	1,5	0	0	12			
x1	1	0	0,666667	-0,33333	0	0	1,333333			
x2	0	1	-0,33333	0,666667	0	0	3,333333			
x5	0	0	-1	1	1	0	3			
x6	0	0	-0,66667	0,333333	0	1	0,666667			
f	0	0	0,333333	1,333333	0	0	12,66667			
f''			0,666667	0,666667			9,333333			
	x1	x2	x3	x4	x5	x6	решение			
x3	2	1	1	0	0	0	6	6		
x4	1	2	0	1	0	0	8	4		
x5	1	-1	0	0	1	0	1	-1		
x6	1	0	0	0	0	1	2	#ДЕЛ/0!		
f	-2	-2	0	0	0	0	0			
x3	1,5	0	1	-0,5	0	0	2	1,333333		
x2	0,5	1	0	0,5	0	0	4	8		
x5	1,5	0	0	0,5	1	0	5	3,333333		
x6	1	0	0	0	0	1	2	2		
f	-1	0	0	1	0	0	8			
x1	1	0	0,666667	-0,33333	0	0	1,333333			
x2	0	1	-0,33333	0,666667	0	0	3,333333			
x5	0	0	-1	1	1	0	3			
x6	0	0	-0,66667	0,333333	0	1	0,666667			
f	0	0	0,666667	0,666667	0	0	9,333333			



Пример анализа ЗЛП на чувствительность

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	решение			
x3	2	1	1	0	0	0	6	6		x2
x4	1	2	0	1	0	0	8	4		
x5	1	-1	0	0	1	0	1	-1		
x6	1	0	0	0	0	1	2	#ДЕЛ/0!		
f	-2	-3	0	0	0	0	0			-8
x3	1,5	0	1	-0,5	0	0	2	1,333333		
x2	0,5	1	0	0,5	0	0	4	8		
x5	1,5	0	0	0,5	1	0	5	3,333333		
x6	1	0	0	0	0	1	2	2		
f	-0,5	0	0	1,5	0	0	12			
x1	1	0	0,666667	-0,33333	0	0	1,333333			
x2	0	1	-0,33333	0,666667	0	0	3,333333			
x5	0	0	-1	1	1	0	3			
x6	0	0	-0,66667	0,333333	0	1	0,666667			
f	0	0	0,333333	1,333333	0	0	12,66667			
f"			-1,33333	4,666667			29,33333			
	x1	x2	x3	x4	x5	x6	решение			
x3	2	1	1	0	0	0	6	6		
x4	1	2	0	1	0	0	8	4		
x5	1	-1	0	0	1	0	1	-1		
x6	1	0	0	0	0	1	2	#ДЕЛ/0!		
f	-2	-8	0	0	0	0	0			
x3	1,5	0	1	-0,5	0	0	2	1,333333		
x2	0,5	1	0	0,5	0	0	4	8		
x5	1,5	0	0	0,5	1	0	5	3,333333		
x6	1	0	0	0	0	1	2	2		
f	2	0	0	4	0	0	32			
x1	1	0	0,666667	-0,33333	0	0	1,333333	2		
x2	0	1	-0,33333	0,666667	0	0	3,333333	-10		
x5	0	0	-1	1	1	0	3	-3		
x6	0	0	-0,66667	0,333333	0	1	0,666667	-1		
f	0	0	-1,33333	4,666667	0	0	29,33333			
x3	1,5	0	1	-0,5	0	0	2			
x2	0,5	1	0	0,5	0	0	4			
x5	1,5	0	0	0,5	1	0	5			
x6	1	0	0	0	0	1	2			
f	2	0	0	4	0	0	32			



Двойственный симплекс-метод

применение – поиск нового оптимального решения

1. анализ на чувствительность – добавление нового ограничения или изменение старого
2. поиск целочисленного решения

- Обычный СМ
- 1. начальное базисное решение – допустимо
- 2. промежуточные решения – допустимые
- 3. значение ЦФ – улучшается

- Двойственный СМ
- 1. начальное базисное решение – недопустимое с признаками оптимальности (решение «лучше, чем оптимальное»)
- 2. промежуточные решения – недопустимые с признаками оптимальности
- 3. значение ЦФ – ухудшается

Алгоритм двойственного симплекс-метода

Алгоритм при максимизации ЦФ

БП	X_1	…	X_s	…	X_n	X_{n+1}	…	X_{n+m}	Решение
Y_1	A_{11}	…	A_{1s}	…	A_{1n}	$A_{1(n+1)}$	…	$A_{1(n+m)}$	R_1
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
Y_r	A_{r1}	…	A_{rs}	…	A_{rn}	$A_{k(n+1)}$	…	$A_{r(n+m)}$	R_r
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
Y_m	A_{m1}	…	A_{ms}	…	A_{mn}	$A_{m(n+1)}$	…	$A_{m(n+m)}$	R_m
f	F_1	…	F_s	…	F_n	F_{n+1}	…	F_{n+m}	Z

Ведущая строка

Ведущий столбец

1. выбор ведущей строки – исключаемая из базиса переменная $Y_r = R_r$

   $R_r < 0$ причем $|R_r| = \max_k |R_k|$ $k = \overline{1,m}$ (если все $R_k > 0$ - оптимум найден)

2. выбор ведущего столбца – включаемая в базис переменная X_s

   $A_{rs} < 0$ - выбор из условия $\min_j \left|\frac{F_j}{A_{rj}}\right| = \left|\frac{F_s}{A_{rs}}\right|$, A_{rs} - ведущий элемент

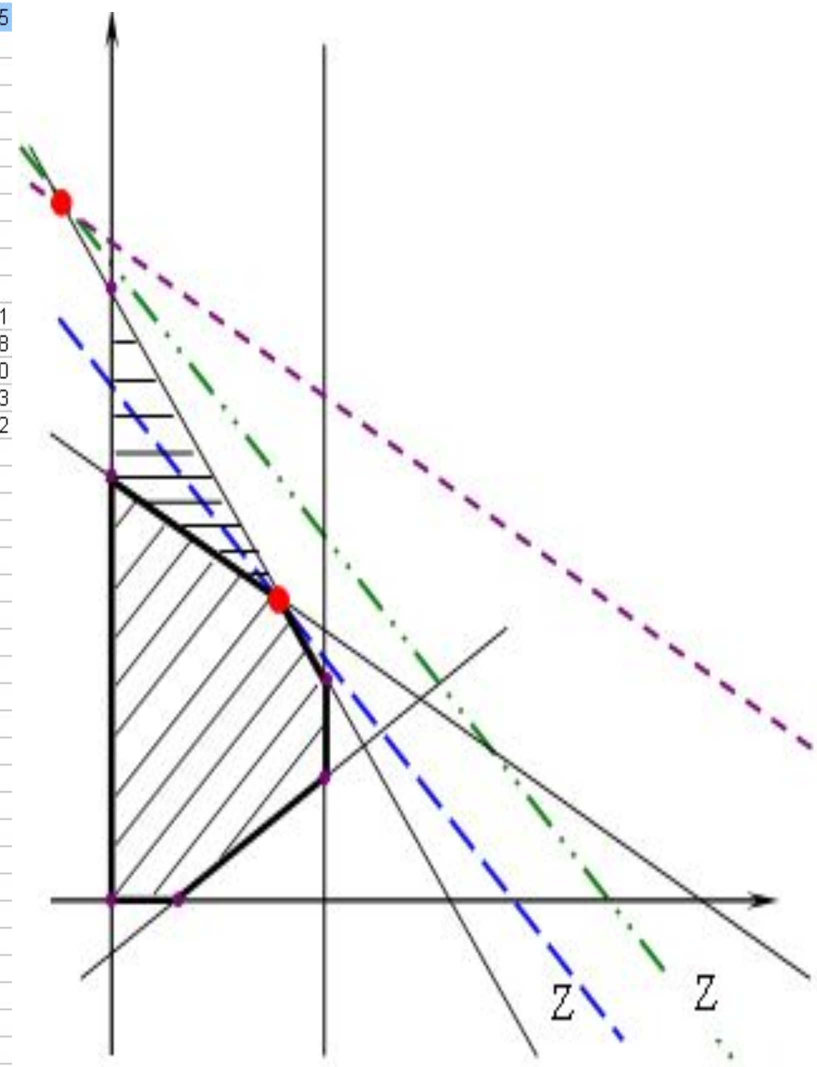
3. расчет нового базисного решения процедурами симплекс-метода

   справедливо равенство $F'_j = F_j - F_s A_{rj} / A_{rs} > 0$

Пример решения ЗЛП двойственным симплекс методом

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	решение			
x3	2	1	1	0	0	0	6	6		
x4	1	2	0	1	0	0	8	4		15
x5	1	-1	0	0	1	0	1	-1		
x6	1	0	0	0	0	1	2	#ДЕЛ/0!		
f	-2	-3	0	0	0	0	0			
x3	1,5	0	1	-0,5	0	0	2	1,333333		
x2	0,5	1	0	0,5	0	0	4	8		
x5	1,5	0	0	0,5	1	0	5	3,333333		
x6	1	0	0	0	0	1	2	2		
f	-0,5	0	0	1,5	0	0	12			
x1	1	0	0,666667	-0,33333	0	0	1,333333			-1
x2	0	1	-0,33333	0,666667	0	0	3,333333			8
x5	0	0	-1	1	1	0	3			10
x6	0	0	-0,66667	0,333333	0	1	0,666667			3
f	0	0	0,333333	1,333333	0	0	12,66667			22

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	решение	
x3	2	1	1	0	0	0	6	6
x4	1	2	0	1	0	0	15	7,5
x5	1	-1	0	0	1	0	1	-1
x6	1	0	0	0	0	1	2	#ДЕЛ/0!
f	-2	-3	0	0	0	0	0	
x3	1,5	0	1	-0,5	0	0	-1,5	-1
x2	0,5	1	0	0,5	0	0	7,5	15
x5	1,5	0	0	0,5	1	0	8,5	5,666667
x6	1	0	0	0	0	1	2	2
f	-0,5	0	0	1,5	0	0	22,5	
x1	1	0	0,666667	-0,33333	0	0	-1	
x2	0	1	-0,33333	0,666667	0	0	8	
x5	0	0	-1	1	1	0	10	
x6	0	0	-0,66667	0,333333	0	1	3	
f	0	0	0,333333	1,333333	0	0	22	
			0,5	-4				
x4	-3	0	-2	1	0	0	3	
x2	2	1	1	0	0	0	6	
x5	3	0	1	0	1	0	7	
x6	1	0	0	0	0	1	2	
f	4	0	3	0	0	0	18	



Понятие двойственной ЗЛП

Прямая задача линейного программирования в канонической форме

$$Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \to \max/\min$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = b_i \quad i = \overline{1,m}$$

$$X_j \geq 0 \qquad j = \overline{1,n}$$

n переменных – исходные и дополнительные

- 1. решение ДЗЛП из симплекс-таблицы с оптимальным решением ПЗЛП
- 2. решение ПЗЛП из симплекс-таблицы с оптимальным решением ДЗЛП, сформулированной из этой ПЗЛП

Правила преобразования ПЗЛП в ДЗЛП на основе канонической формы

- 1. Каждому из m ограничений ПЗЛП соответствует переменная ДЗЛП
- 2. Каждому из n переменных ПЗЛП соответствует ограничение ДЗЛП
- 3. Коэффициенты при переменной в ограничениях ПЗЛП переходят в коэффициенты ограничения ДЗЛП, соответствующего этой переменной, правая часть формируемого ограничения ДЗЛП равна коэффициенту ЦФ при этой переменной в ПЗЛП
- 4. Коэффициенты ЦФ ДЗЛП равны правым частям ограничений ПЗЛП

ЦФ ПЗЛП	ДЗЛП		
	ЦФ	Тип функциональных ограничений	Прямые ограничения на переменные
Максимизация	Минимизация	«$\geq$»	Ограничений нет
Минимизация	Максимизация	«$\leq$»	Ограничений нет

Пример преобразования ПЗЛП в ДЗЛП

<u>ПЗЛП</u>

$$Z = 15x_1 + 12x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ 2x_1 - 4x_2 \leq 5 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

<u>ПЗЛП в канонической форме</u>

$$Z = 15x_1 + 12x_2 + 0x_3 + 0x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_4 = 5 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

<u>ДЗЛП</u>

$$Z = 3y_1 + 5y_2 \to \max$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \leq 15 \\ 2y_1 - 4y_2 \leq 12 \\ -y1 + 0y_2 \leq 0 \\ 0y_1 + y_2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 \geq 0 \\ y_2 \leq 0 \end{cases}$$

Взаимосвязь ПЗЛП и ДЗЛП

1. для любой симплекс итерации прямой или двойственной задачи

$$\left\{\begin{array}{l} коэффициенты\ при\ j-ой \\ переменной\ в\ строке\ ЦФ \\ одной\ задачи \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} разности\ между\ левой\ и \\ правой\ частями\ j-го \\ неравенства\ другой\ задачи \end{array}\right\}$$

2. для любой пары допустимых решений прямой и двойственной задачи

$$\left\{\begin{array}{l} значение\ ЦФ \\ в\ задаче\ максимизации \end{array}\right\} \le \left\{\begin{array}{l} значения\ ЦФ \\ в\ задаче\ минимизации \end{array}\right\}$$

в точке оптимума – строгое равенство: «равновесие»

Разновидности симплекс-метода

- 1. Модифицированный симплекс-метод
- 2. Метод решения задач с ограниченными переменными
- 3. Метод декомпозиции
- 4. Параметрическое линейное программирование
- 5. Метод Кармаркара