

# ОСОБЫЕ СЛУЧАИ ПРИМЕНЕНИЯ СИМПЛЕКС- МЕТОДА

# Вырожденность решения

$$f = 3x_1 + 9x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 8 \\ x_1 + 2x_2 \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 + 4x_2 \leq 8 \end{cases}$$

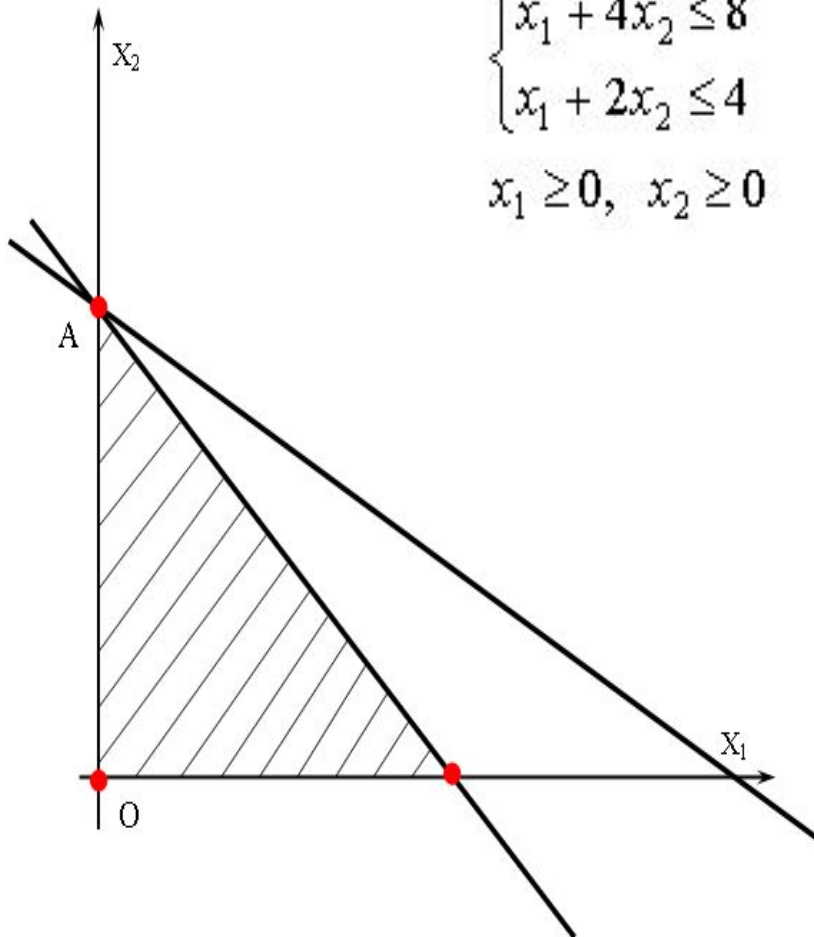
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$f = 3x_1 + 9x_2 + 0x_3 + 0x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$



О	БП	x1	x2	x3	x4	Решение	
	x3	1	4	1	0	8	2
	x4	1	2	0	1	4	2
	f	-3	-9	0	0	0	
А	БП	x1	x2	x3	x4	Решение	
	x2	0,25	1	0,25	0	2	8
	x4	0,5	0	-0,5	1	0	0
	f	-0,75	0	2,25	0	18	
А	БП	x1	x2	x3	x4	Решение	
	x2	0	1	0,5	-0,5	2	
	x1	1	0	-1	2	0	
	f	0	0	1,5	1,5	18	

# II Альтернативные оптимальные

## ПАТТЕРН

$$f = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

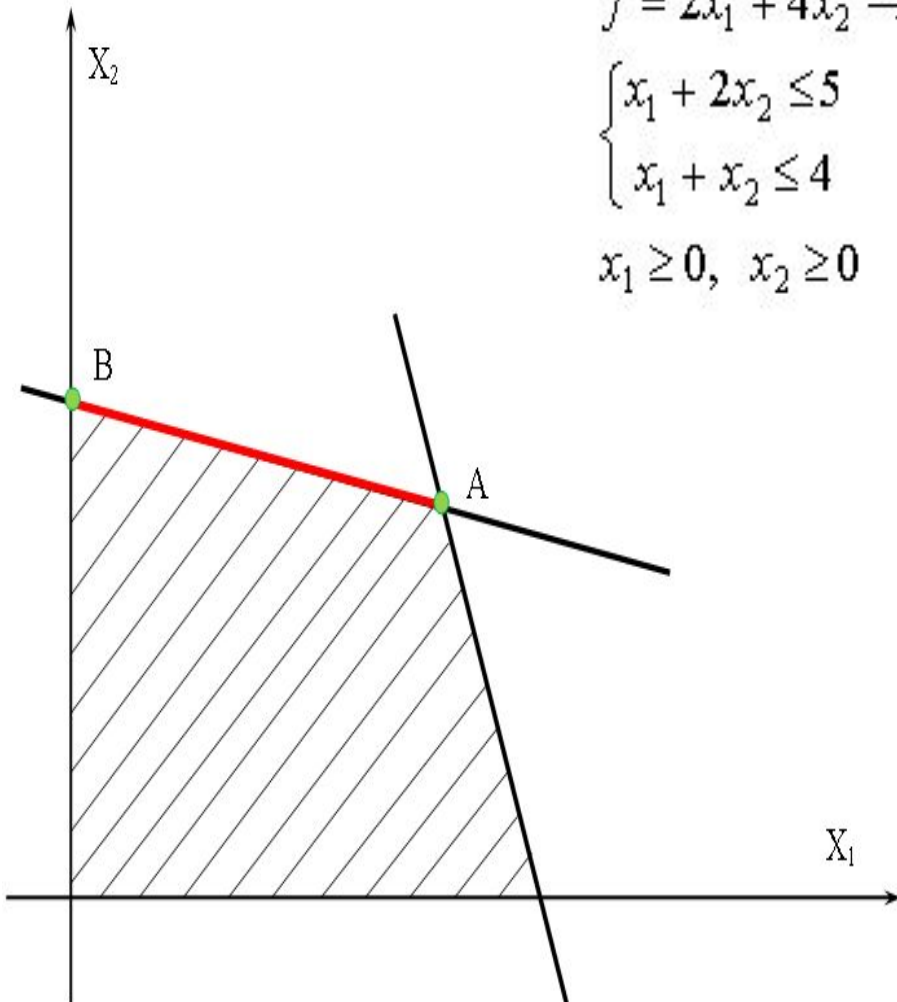
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$f = 2x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 \rightarrow \max$$

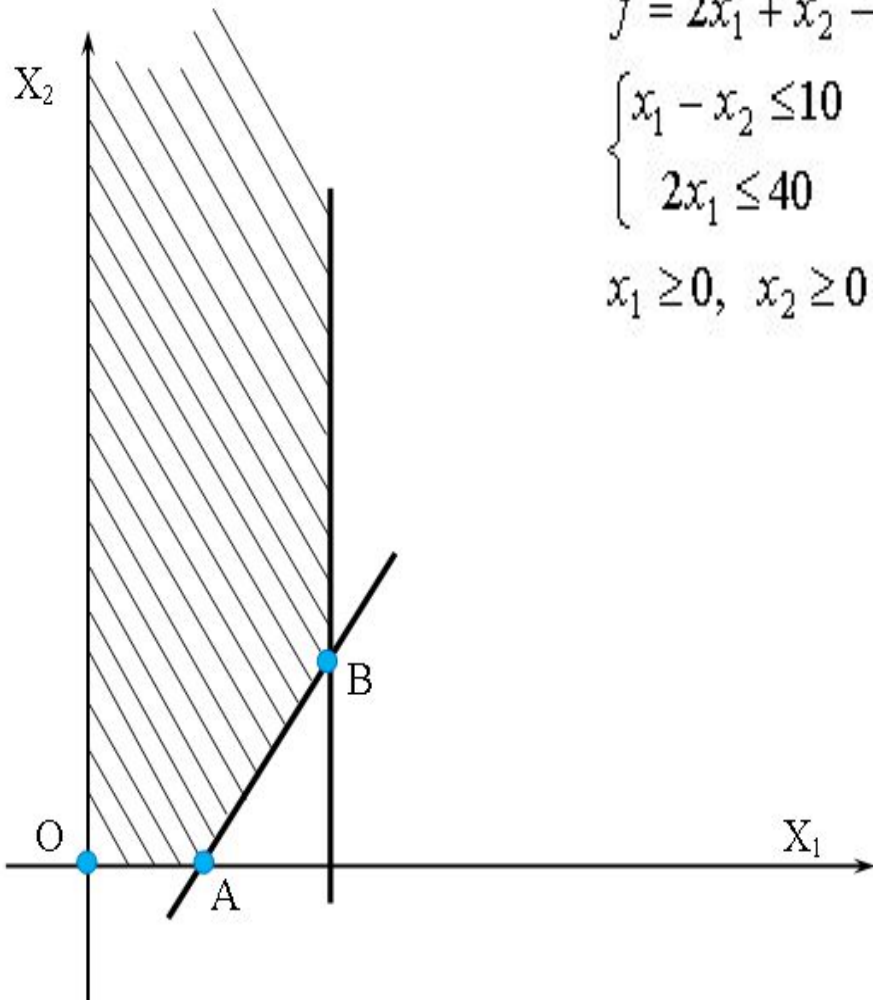
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$



О	БП	x1	x2	x3	x4	решение	
	x3	1	2	1	0	5	2,5
	x4	1	1	0	1	4	4
	f	-2	-4	0	0	0	
В	БП	x1	x2	x3	x4	решение	
	x2	0,5	1	0,5	0	2,5	5
	x4	0,5	0	-0,5	1	1,5	3
	f	0	0	2	0	10	
А	БП	x1	x2	x3	x4	решение	
	x2	0	1	1	-1	1	
	x1	1	0	-1	2	3	
	f	0	0	2	0	10	

# III Неограниченное решение



$$f = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 10 \\ 2x_1 \leq 40 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$f = 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + x_4 = 40 \end{cases}$$

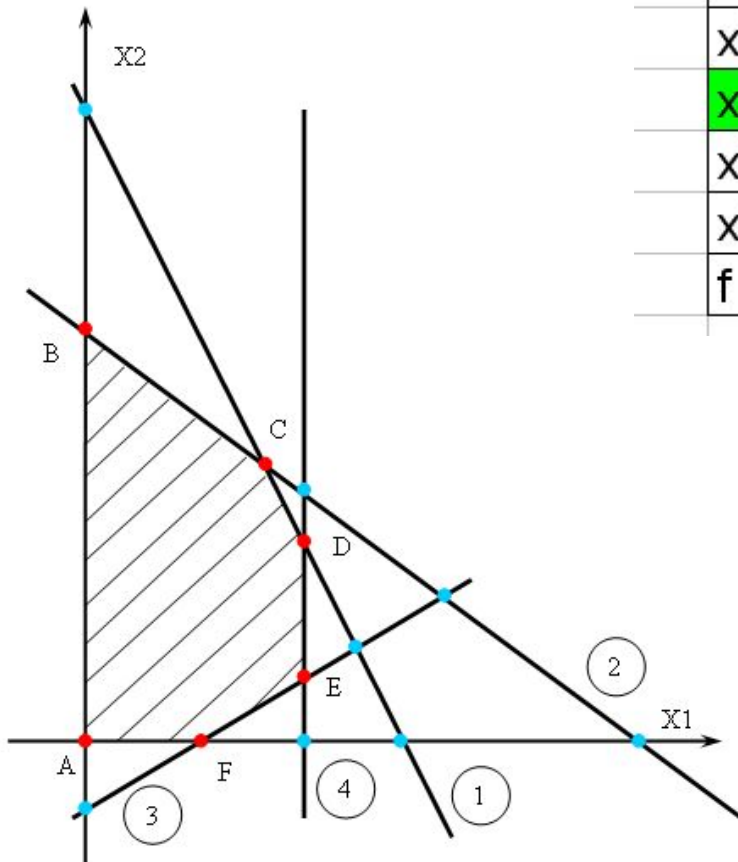
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

О	БП	x1	x2	x3	x4	решение	
	x3	1	-1	1	0	10	10
	x4	2	0	0	1	40	20
	f	-2	-1	0	0	0	
A	БП	x1	x2	x3	x4	решение	
	x1	1	-1	1	0	10	-10
	x4	0	2	-2	1	20	10
	f	0	-3	2	0	20	
B	БП	x1	x2	x3	x4	решение	
	x1	1	0	0	0,5	20	#ДЕЛ/0!
	x2	0	1	-1	0,5	10	-10
	f	0	0	-1	1,5	50	

# Анализ ЗЛП на чувствительность

- I Статус ресурса – дефицитный (недефицитный) – определяется по значению дополнительных переменных в оптимальном решении
- II Ценность ресурса – определяется коэффициентами ЦФ при дополнительных переменных в оптимальном решении

# Статус и ценность ресурсов



**A**

БП	x1	x2	x3	x4	x5	x6	решение
x3	2	1	1	0	0	0	6
x4	1	2	0	1	0	0	8
x5	1	-1	0	0	1	0	1
x6	1	0	0	0	0	1	2
f	-2	-3	0	0	0	0	0

**C**

БП	x1	x2	x3	x4	x5	x6	решение		
x1	1	0	0,67	-0,3	0	0	1,33333		
x2	0	1	-0,33	0,7	0	0	3,33333		
x5	0	0	-1	1	1	0	3	недефицитность ресурсов	
x6	0	0	-0,67	0,3	0	1	0,66667		
f	0	0	0,33	1,3	0	0	12,6667		
ценность ресурсов									

# Анализ ЗЛП на чувствительность – изменение запасов ресурсов

Таблица соответствует оптимальному решению

БП	$X_1$	$X_2$	...	$X_n$	$X_{n+1}$	...	$X_{n+i}$	...	$X_{n+m}$	Решение
$Y_1$	$A_{11}$	$A_{12}$	...	$A_{1n}$	$A_{1(n+1)}$	...	$A_{1(n+i)}$	...	$A_{1(n+m)}$	$R_1$
$Y_2$	$A_{21}$	$A_{22}$	...	$A_{2n}$	$A_{2(n+1)}$	...	$A_{2(n+i)}$	...	$A_{2(n+m)}$	$R_2$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$Y_k$	$A_{k1}$	$A_{k2}$	...	$A_{kn}$	$A_{k(n+1)}$	...	$A_{k(n+i)}$	...	$A_{k(n+m)}$	$R_k$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$Y_m$	$A_{m1}$	$A_{m2}$	...	$A_{mn}$	$A_{m(n+1)}$	...	$A_{m(n+i)}$	...	$A_{m(n+m)}$	$R_m$
$f$	$F_1$	$F_2$	...	$F_n$	$F_{n+1}$	...	$F_{n+i}$	...	$F_{n+m}$	$Z$

Изменение правой части одного из ограничений:  $b_i + d$  ( $d > 0$  или  $d < 0$ )

Варианты рассуждений при изменении:

а) решение задачи заново не требуется

$$Y_k = R_k + A_{k(n+i)}d$$

$$Z' = Z + F_{n+i}d$$

$$k = \overline{1, m}$$

если диапазон  $d \in (D_1, D_2)$  из условия  $Y_k = R_k + A_{k(n+i)}d > 0$   $k = \overline{1, m}$

б) при  $d < D_1$  или  $d > D_2$  - имеем недопустимый базис (сохранен принцип оптимальности)

1. решать задачу заново

ИЛИ

2. применить **двойственный симплекс метод** для перехода к допустимому решению



# Пример анализа ЗЛП на чувствительность

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	решение		
x3	2	1	1	0	0	0	6	6	
x4	1	2	0	1	0	0	8	4	10
x5	1	-1	0	0	1	0	1	-1	
x6	1	0	0	0	0	1	2	#ДЕЛО!	
f	-2	-3	0	0	0	0	0	0	

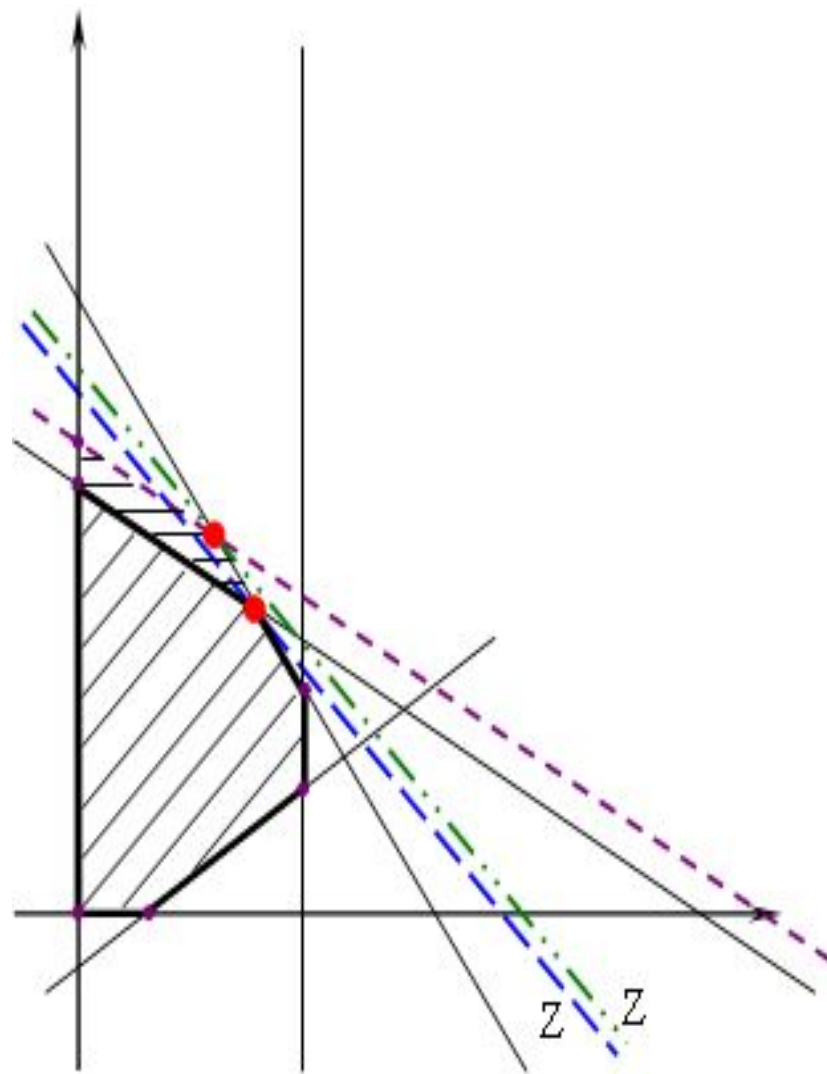
x3	1,5	0	1	-0,5	0	0	2	1,333333	
x2	0,5	1	0	0,5	0	0	4	8	
x5	1,5	0	0	0,5	1	0	5	3,333333	
x6	1	0	0	0	0	1	2	2	
f	-0,5	0	0	1,5	0	0	12		

x1	1	0	0,666667	-0,333333	0	0	1,333333		0,666667
x2	0	1	-0,333333	0,666667	0	0	3,333333		4,666667
x5	0	0	-1	1	1	0	3		5
x6	0	0	-0,666667	0,333333	0	1	0,666667		1,333333
f	0	0	0,333333	1,333333	0	0	12,666667		15,333333

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	решение		
x3	2	1	1	0	0	0	6	6	
x4	1	2	0	1	0	0	10	5	
x5	1	-1	0	0	1	0	1	-1	
x6	1	0	0	0	0	1	2	#ДЕЛО!	
f	-2	-3	0	0	0	0	0	0	

x3	1,5	0	1	-0,5	0	0	1	0,666667	
x2	0,5	1	0	0,5	0	0	5	10	
x5	1,5	0	0	0,5	1	0	6	4	
x6	1	0	0	0	0	1	2	2	
f	-0,5	0	0	1,5	0	0	15		

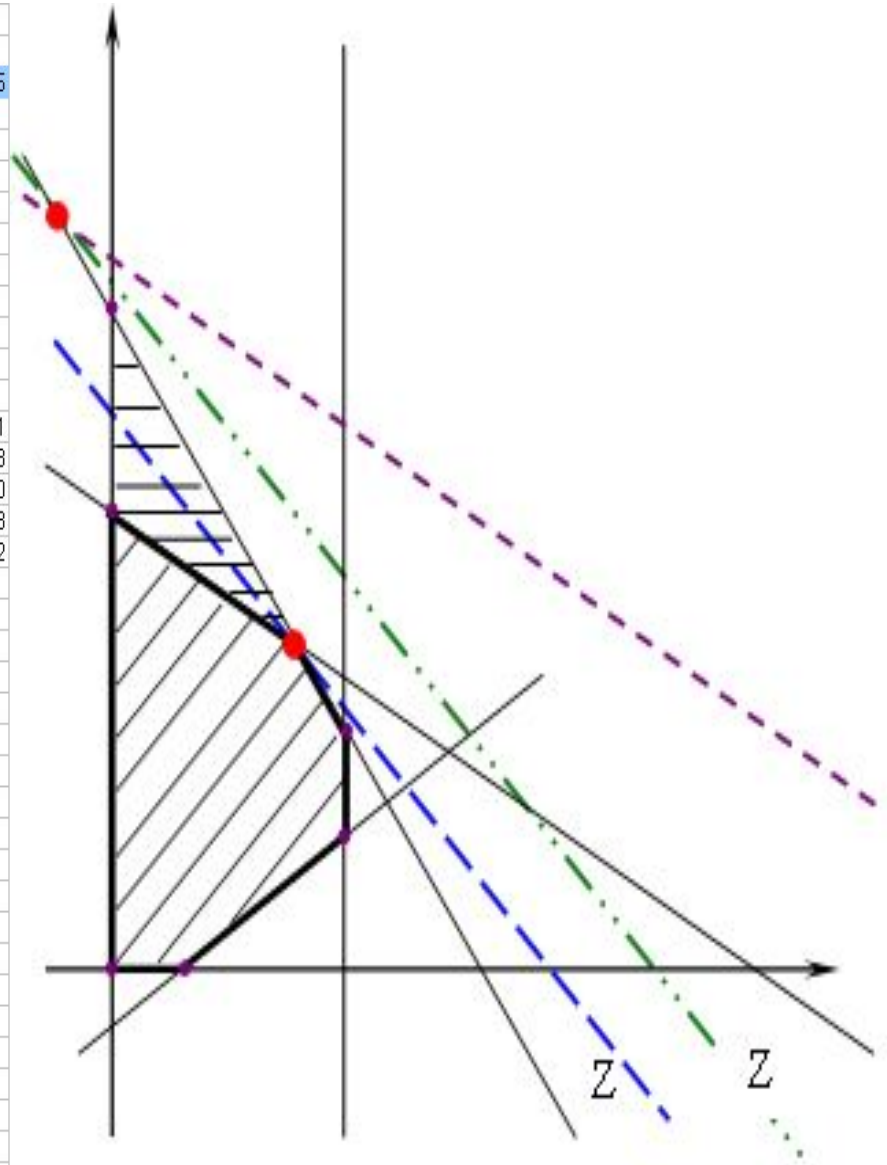
x1	1	0	0,666667	-0,333333	0	0	0,666667		
x2	0	1	-0,333333	0,666667	0	0	4,666667		
x5	0	0	-1	1	1	0	5		
x6	0	0	-0,666667	0,333333	0	1	1,333333		
f	0	0	0,333333	1,333333	0	0	15,333333		





# Пример анализа ЗЛП на чувствительность

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	решение	
x3	2	1	1	0	0	0	6	6
x4	1	2	0	1	0	0	8	4
x5	1	-1	0	0	1	0	1	-1
x6	1	0	0	0	0	1	2	#ДЕЛО!
f	-2	-3	0	0	0	0	0	
x3	1,5	0	1	-0,5	0	0	2	1,333333
x2	0,5	1	0	0,5	0	0	4	8
x5	1,5	0	0	0,5	1	0	5	3,333333
x6	1	0	0	0	0	1	2	2
f	-0,5	0	0	1,5	0	0	12	
x1	1	0	0,666667	-0,333333	0	0	1,333333	-1
x2	0	1	-0,333333	0,666667	0	0	3,333333	8
x5	0	0	-1	1	1	0	3	10
x6	0	0	-0,666667	0,333333	0	1	0,666667	3
f	0	0	0,333333	1,333333	0	0	12,666667	22
x3	2	1	1	0	0	0	6	6
x4	1	2	0	1	0	0	15	7,5
x5	1	-1	0	0	1	0	1	-1
x6	1	0	0	0	0	1	2	#ДЕЛО!
f	-2	-3	0	0	0	0	0	
x3	1,5	0	1	-0,5	0	0	-1,5	-1
x2	0,5	1	0	0,5	0	0	7,5	15
x5	1,5	0	0	0,5	1	0	8,5	5,666667
x6	1	0	0	0	0	1	2	2
f	-0,5	0	0	1,5	0	0	22,5	
x1	1	0	0,666667	-0,333333	0	0	-1	
x2	0	1	-0,333333	0,666667	0	0	8	
x5	0	0	-1	1	1	0	10	
x6	0	0	-0,666667	0,333333	0	1	3	
f	0	0	0,333333	1,333333	0	0	22	



# Анализ ЗЛП на чувствительность – изменение коэффициентов ЦФ

- Оптимальное решение:**
1. базисные переменные  $Y_1 = R_1, Y_2 = R_2, \dots, Y_m = R_m$
  2. свободные переменные  $W_1 = 0, W_2 = 0, \dots, W_n = 0$
  3. Коэффициенты ЦФ - при  $Y_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) - 0  
при  $W_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) -  $F_k$

**Изменение коэффициента ЦФ в исходной постановке задачи** при переменной  $X_j$

$$C'_j = C_j + d \quad (d > 0 \quad \text{или} \quad d < 0)$$

$X_j$  - в оптимальном решении среди базисных ( $Y_i \quad i = \overline{1, m}$ )  $\leftrightarrow Y_q = R_q$

- Варианты рассуждений:**
1. изменения базиса и значений базисных переменных нет,
  2. изменения в строке ЦФ
- решать задачу заново не надо

а) при  $d \in (D_1, D_2)$  - оптимальное решение (набор базисных переменных и их значения) не изменяется

$$F'_k = F_k + A_{qk}d \quad \text{при} \quad W_k \quad k = \overline{1, n}$$

$$Z' = Z + R_q d$$

диапазон  $(D_1, D_2)$  из условия  $F'_k = F_k + A_{qk}d > 0$

б) при  $d < D_1$  или  $d > D_2$  - пересчет  $F'_k$  и  $Z'$  - имеем **допустимый неоптимальный базис**, осуществляем **поиск** оптимального решения **далее симплекс-методом**

# Пример анализа ЗЛП на чувствительность

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	решение			
x3		2	1	1	0	0	0	6	6	x2
x4		1	2	0	1	0	0	8	4	
x5		1	-1	0	0	1	0	1	-1	
x6		1	0	0	0	0	1	2	#ДЕЛ/0!	
f		-2	-3	0	0	0	0	0		-2

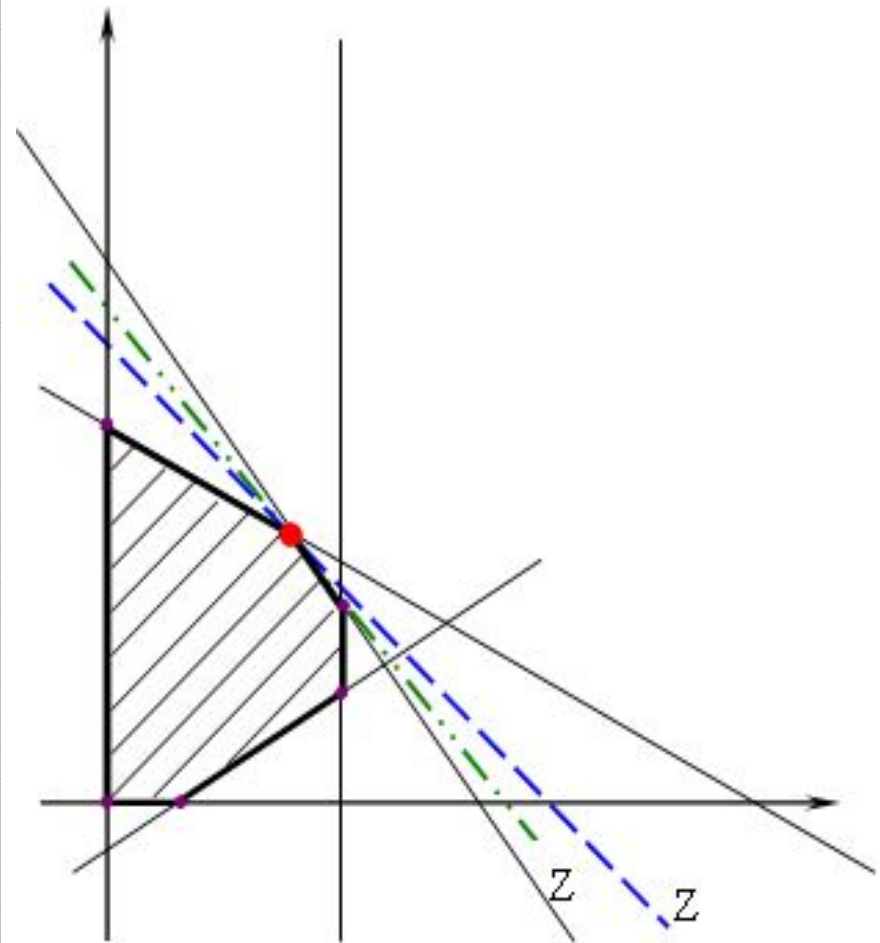
x3		1,5	0	1	-0,5	0	0	2	1,333333
x2		0,5	1	0	0,5	0	0	4	8
x5		1,5	0	0	0,5	1	0	5	3,333333
x6		1	0	0	0	0	1	2	2
f		-0,5	0	0	1,5	0	0	12	

x1		1	0	0,666667	-0,333333	0	0	1,333333
x2		0	1	-0,333333	0,666667	0	0	3,333333
x5		0	0	-1	1	1	0	3
x6		0	0	-0,66667	0,333333	0	1	0,666667
f		0	0	0,333333	1,333333	0	0	12,66667
f*			0,666667	0,666667				9,333333

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	решение		
x3		2	1	1	0	0	0	6	6
x4		1	2	0	1	0	0	8	4
x5		1	-1	0	0	1	0	1	-1
x6		1	0	0	0	0	1	2	#ДЕЛ/0!
f		-2	-2	0	0	0	0	0	

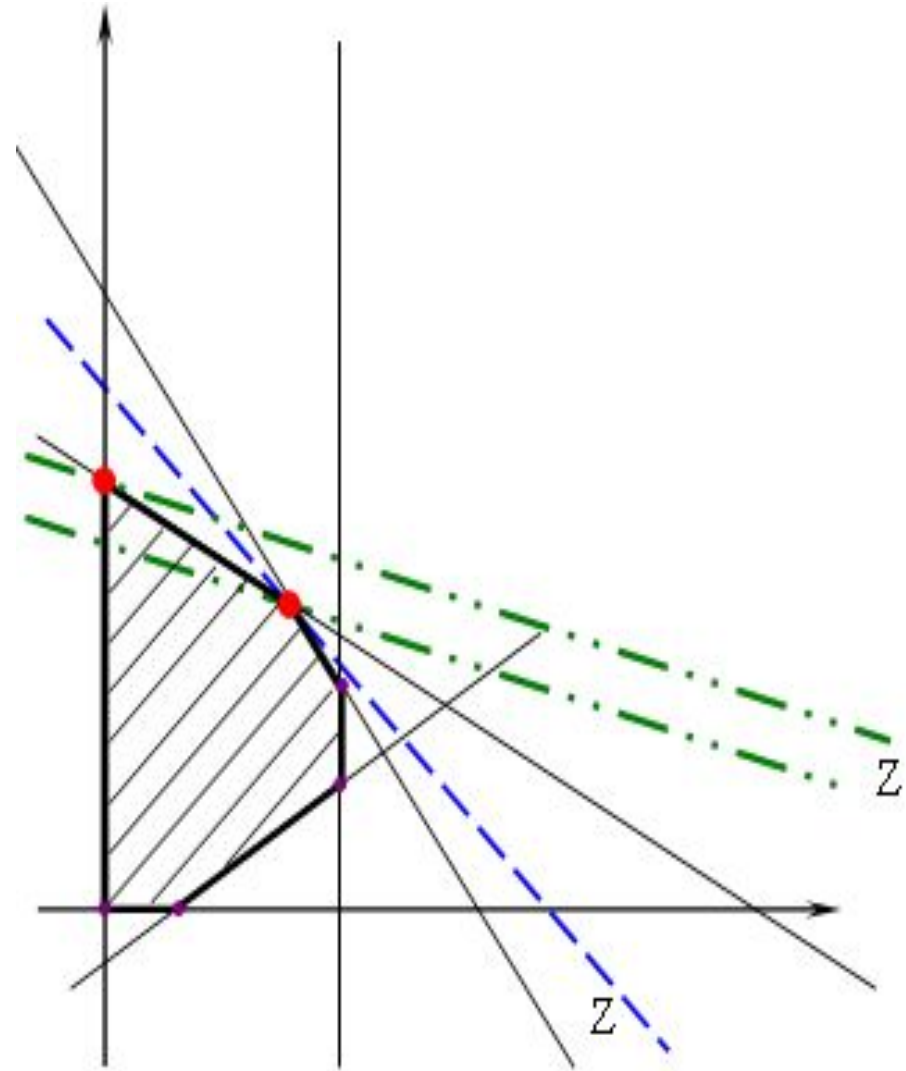
x3		1,5	0	1	-0,5	0	0	2	1,333333
x2		0,5	1	0	0,5	0	0	4	8
x5		1,5	0	0	0,5	1	0	5	3,333333
x6		1	0	0	0	0	1	2	2
f		-1	0	0	1	0	0	8	

x1		1	0	0,666667	-0,333333	0	0	1,333333
x2		0	1	-0,333333	0,666667	0	0	3,333333
x5		0	0	-1	1	1	0	3
x6		0	0	-0,66667	0,333333	0	1	0,666667
f		0	0	0,666667	0,666667	0	0	9,333333



# Пример анализа ЗЛП на чувствительность

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	решение		
x3	2	1	1	0	0	0	6	6	x2
x4	1	2	0	1	0	0	8	4	
x5	1	-1	0	0	1	0	1	-1	
x6	1	0	0	0	0	1	2	#ДЕЛЮ!	
f	-2	-3	0	0	0	0	0	0	-8
x3	1,5	0	1	-0,5	0	0	2	1,333333	
x2	0,5	1	0	0,5	0	0	4	8	
x5	1,5	0	0	0,5	1	0	5	3,333333	
x6	1	0	0	0	0	1	2	2	
f	-0,5	0	0	1,5	0	0	0	12	
x1	1	0	0,666667	-0,333333	0	0	1,333333		
x2	0	1	-0,333333	0,666667	0	0	3,333333		
x5	0	0	-1	1	1	0	3		
x6	0	0	-0,666667	0,333333	0	1	0,666667		
f	0	0	0,333333	1,333333	0	0	12,66667		
f*			-1,333333	4,666667			29,333333		
x3	2	1	1	0	0	0	6	6	
x4	1	2	0	1	0	0	8	4	
x5	1	-1	0	0	1	0	1	-1	
x6	1	0	0	0	0	1	2	#ДЕЛЮ!	
f	-2	-8	0	0	0	0	0	0	
x3	1,5	0	1	-0,5	0	0	2	1,333333	
x2	0,5	1	0	0,5	0	0	4	8	
x5	1,5	0	0	0,5	1	0	5	3,333333	
x6	1	0	0	0	0	1	2	2	
f	2	0	0	4	0	0	0	32	
x1	1	0	0,666667	-0,333333	0	0	1,333333	2	
x2	0	1	-0,333333	0,666667	0	0	3,333333	-10	
x5	0	0	-1	1	1	0	3	-3	
x6	0	0	-0,666667	0,333333	0	1	0,666667	-1	
f	0	0	-1,333333	4,666667	0	0	29,333333		
x3	1,5	0	1	-0,5	0	0	2		
x2	0,5	1	0	0,5	0	0	4		
x5	1,5	0	0	0,5	1	0	5		
x6	1	0	0	0	0	1	2		
f	2	0	0	4	0	0	0	32	



## Двойственный симплекс-метод

применение – поиск нового оптимального решения

1. анализ на чувствительность – добавление нового ограничения или изменение старого

2. поиск целочисленного решения

- Обычный СМ

- 1. начальное базисное решение – допустимо
- 2. промежуточные решения – допустимые
- 3. значение ЦФ – улучшается

- Двойственный СМ

- 1. начальное базисное решение – недопустимое с признаками оптимальности (решение «лучше, чем оптимальное»)
- 2. промежуточные решения – недопустимые с признаками оптимальности
- 3. значение ЦФ – ухудшается



# Алгоритм двойственного симплекс-метода

Алгоритм при максимизации ЦФ

БП	$X_1$	...	$X_s$	...	$X_n$	$X_{n+1}$	...	$X_{n+m}$	Решение
$Y_1$	$A_{11}$	...	$A_{1s}$	...	$A_{1n}$	$A_{1(n+1)}$	...	$A_{1(n+m)}$	$R_1$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$Y_r$	$A_{r1}$	...	$A_{rs}$	...	$A_{rn}$	$A_{k(n+1)}$	...	$A_{r(n+m)}$	$R_r$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$Y_m$	$A_{m1}$	...	$A_{ms}$	...	$A_{mn}$	$A_{m(n+1)}$	...	$A_{m(n+m)}$	$R_m$
$f$	$F_1$	...	$F_s$	...	$F_n$	$F_{n+1}$	...	$F_{n+m}$	$Z$

Ведущая строка

Ведущий столбец

- выбор ведущей строки – исключаемая из базиса переменная  $Y_r = R_r$   
 $R_r < 0$  причём  $|R_r| = \max_k |R_k|$   $k = \overline{1, m}$  (если все  $R_k > 0$  - оптимум найден)
- выбор ведущего столбца – включаемая в базис переменная  $X_s$   
 $A_{rs} < 0$  - выбор из условия  $\min_j \left| \frac{F_j}{A_{rj}} \right| = \left| \frac{F_s}{A_{rs}} \right|$ ,  $A_{rs}$  - ведущий элемент
- расчет нового базисного решения процедурами симплекс-метода справедливо равенство  $F'_j = F_j - F_s A_{rj} / A_{rs} > 0$



# Пример решения ЗЛП двойственным симплекс методом

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	решение	
x3	2	1	1	0	0	0	6	6
x4	1	2	0	1	0	0	8	4
x5	1	-1	0	0	1	0	1	-1
x6	1	0	0	0	0	1	2	#ДЕЛ/0!
f	-2	-3	0	0	0	0	0	

x3	1,5	0	1	-0,5	0	0	2	1,333333
x2	0,5	1	0	0,5	0	0	4	8
x5	1,5	0	0	0,5	1	0	5	3,333333
x6	1	0	0	0	0	1	2	2
f	-0,5	0	0	1,5	0	0	12	

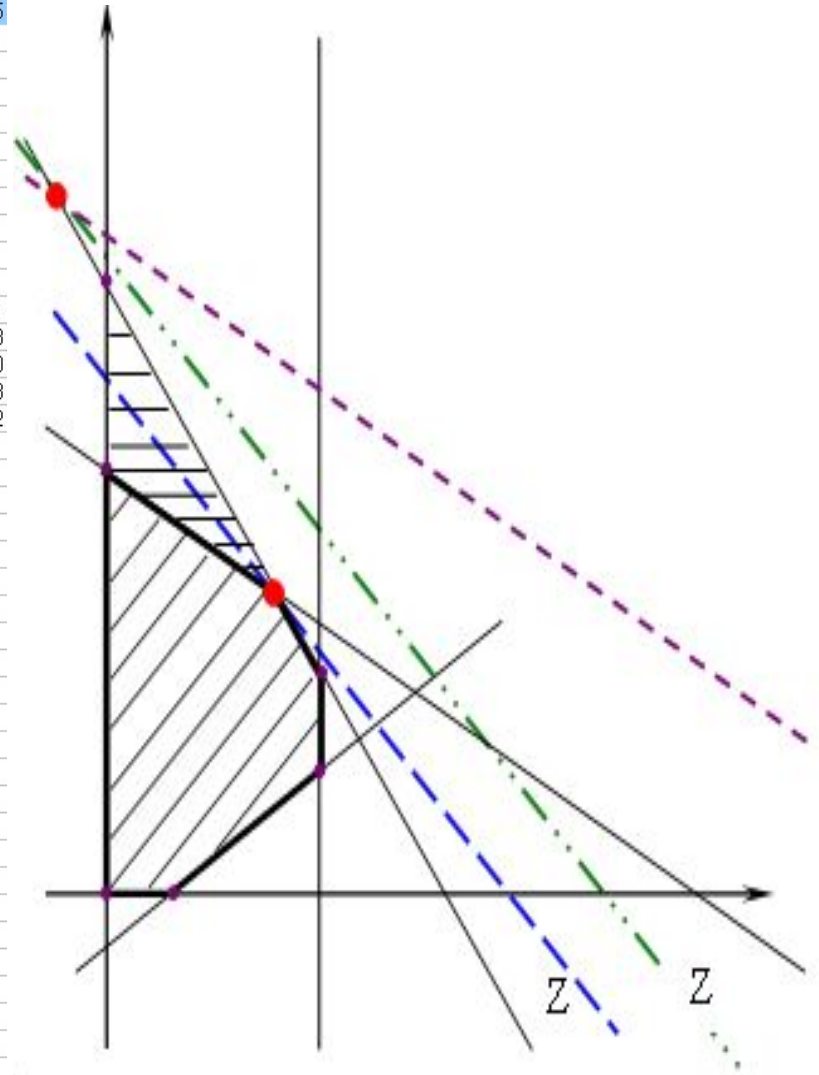
x1	1	0	0,666667	-0,333333	0	0	1,333333	-1
x2	0	1	-0,333333	0,666667	0	0	3,333333	8
x5	0	0	-1	1	1	0	3	10
x6	0	0	-0,666667	0,333333	0	1	0,666667	3
f	0	0	0,333333	1,333333	0	0	12,666667	22

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	решение	
x3	2	1	1	0	0	0	6	6
x4	1	2	0	1	0	0	15	7,5
x5	1	-1	0	0	1	0	1	-1
x6	1	0	0	0	0	1	2	#ДЕЛ/0!
f	-2	-3	0	0	0	0	0	

x3	1,5	0	1	-0,5	0	0	-1,5	-1
x2	0,5	1	0	0,5	0	0	7,5	15
x5	1,5	0	0	0,5	1	0	8,5	5,666667
x6	1	0	0	0	0	1	2	2
f	-0,5	0	0	1,5	0	0	22,5	

x1	1	0	0,666667	-0,333333	0	0	-1	
x2	0	1	-0,333333	0,666667	0	0	8	
x5	0	0	-1	1	1	0	10	
x6	0	0	-0,666667	0,333333	0	1	3	
f	0	0	0,333333	1,333333	0	0	22	

x4	-3	0	-2	1	0	0	3	
x2	2	1	1	0	0	0	6	
x5	3	0	1	0	1	0	7	
x6	1	0	0	0	0	1	2	
f	4	0	3	0	0	0	18	



# Понятие двойственной ЗЛП

Прямая задача линейного программирования  
в канонической форме

$$Z = \sum_{j=1}^n C_j X_j \rightarrow \max/\min$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} X_j = b_i \quad i = \overline{1, m}$$

$$X_j \geq 0 \quad j = \overline{1, n}$$

$n$  переменных – исходные и дополнительные

- 1. решение ДЗЛП из симплекс-таблицы с оптимальным решением ПЗЛП
- 2. решение ПЗЛП из симплекс-таблицы с оптимальным решением ДЗЛП, сформулированной из этой ПЗЛП

# Правила преобразования ПЗЛП в ДЗЛП на основе канонической формы

- 1. Каждому из  $m$  ограничений ПЗЛП соответствует переменная ДЗЛП
- 2. Каждому из  $n$  переменных ПЗЛП соответствует ограничение ДЗЛП
- 3. Коэффициенты при переменной в ограничениях ПЗЛП переходят в коэффициенты ограничения ДЗЛП, соответствующего этой переменной, правая часть формируемого ограничения ДЗЛП равна коэффициенту ЦФ при этой переменной в ПЗЛП
- 4. Коэффициенты ЦФ ДЗЛП равны правым частям ограничений ПЗЛП

ЦФ ПЗЛП	ДЗЛП		
	ЦФ	Тип функциональных ограничений	Прямые ограничения на переменные
Максимизация	Минимизация	« $\geq$ »	Ограничений нет
Минимизация	Максимизация	« $\leq$ »	Ограничений нет

# Пример преобразования ПЗЛП в ДЗЛП

ПЗЛП

$$Z = 15x_1 + 12x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ 2x_1 - 4x_2 \leq 5 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

ПЗЛП в канонической форме

$$Z = 15x_1 + 12x_2 + 0x_3 + 0x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_4 = 5 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

ДЗЛП

$$Z = 3y_1 + 5y_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \leq 15 \\ 2y_1 - 4y_2 \leq 12 \\ -y_1 + 0y_2 \leq 0 \\ 0y_1 + y_2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 \geq 0 \\ y_2 \leq 0 \end{cases}$$

# Взаимосвязь ПЗЛП и ДЗЛП

1. для любой симплекс итерации прямой или двойственной задачи

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{коэффициенты при } j\text{-ой} \\ \text{переменной в строке ЦФ} \\ \text{одной задачи} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{разности между левой и} \\ \text{правой частями } j\text{-го} \\ \text{неравенства другой задачи} \end{array} \right\}$$

2. для любой пары допустимых решений прямой и двойственной задачи

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{значение ЦФ} \\ \text{в задаче максимизации} \end{array} \right\} \leq \left\{ \begin{array}{l} \text{значения ЦФ} \\ \text{в задаче минимизации} \end{array} \right\}$$

в точке оптимума – строгое равенство: «равновесие»

# Разновидности симплекс-метода

- 1. Модифицированный симплекс-метод
- 2. Метод решения задач с ограниченными переменными
- 3. Метод декомпозиции
- 4. Параметрическое линейное программирование
- 5. Метод Кармаркара