ОТБОР КОРНЕЙ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ

Презентацию разработала
учитель математики МБОУ СОШ №4
г. Покачи ХМАО-Югра Тюменской области
Литвинченко Л.В.

Решая тригонометрические уравнения , возникает вопрос отбора корней ,связанных с областью определения и другими условиями.

Расскажем, как можно решить такую проблему.

Первый метод ***нахождения подходящих корней заключатся в решении диофантовых уравнений с целыми коэффициентами для этого необходимо:***

- найти наибольший общий делитель коэффициентов при неизвестных ;

- попробовать сократить на него обе части уравнения (разумеется, свободный член должен при этом остаться целым числом).

Второй метод ***заключается в изображении всех решений на тригонометрической окружности и исключении неподходящих решений.***

Метод этот очень прост в применении, если решения легко изобразить на тригонометрической окружности.

Рассмотрим пример : $21k - 24n = 8$ и решим его первым способом.

Набольший общий делитель коэффициентов равен 3, и сократить его не удается, так как 8 на 3 не делится. Тогда можно сразу сказать, что это уравнение решений в целых числах не имеет.

Покажем, как искать решения.

Решим уравнение $166n - 44k = 6.$

1. Для начала поделим обе части на 2: $83n - 22k = 3.$

2. Теперь выберем ту неизвестную, коэффициент при которой меньше по абсолютной величине – в нашем случае это k - и выразим ее через другую неизвестную:

$$k = \frac{83n - 3}{22}.$$

3. Выделим в этой дроби целую часть:

$$k = \frac{83n - 3}{22} = \frac{66n + 17n - 3}{22} = 3n + \frac{17n - 3}{22}.$$

4. Обозначим $\frac{17n - 3}{22} = t$ или $17n - 3 = 22t.$

Снова получилось неопределенное уравнение, но его коэффициенты уже меньше, чем у исходного.

5. *Проделаем с этим новым уравнением ту же операцию, что и с исходным: выразим из него ту неизвестную, коэффициент при которой меньше по абсолютной величине (на сей раз это будет* **n**), *и выделим из получающейся дроби целую часть:*

$$n = \frac{22t + 3}{17} = \frac{17t + 5t + 3}{17} = t + \frac{5t + 3}{17}.$$

6. *Обозначим* $\frac{5t + 3}{17} = s$ *или* **5t + 3 =17s.** *Продолжая в том же духе, выразим t через s:*

$$t = \frac{17s - 3}{5} = 3s + \frac{2s - 3}{5}.$$

7. *Обозначим* $\frac{2s - 3}{5} = v$ *или* **5v = 2s – 3.** *Выразим* **s** *через* **v:**

$$s = \frac{5v + 3}{2} = 2v + \frac{v + 3}{2}.$$

8. *Обозначим* $\frac{v+3}{2} = u$ *или* $v = 2u - 3$.

9. ***Чтобы получить решения исходного уравнения, нам осталось последовательно выразить*** ***v через u, s через v, t через s, n через t, k через n.***

10. ***Отправимся в обратный путь:***

$v = 2u - 3$

$$s = 2v + \frac{v+3}{2} = 5u - 6.$$

$$t = 3s + \frac{2s-3}{5} = 17u - 21$$

$$n = t + \frac{5t+3}{17} = 22u - 27$$

$$k = 3n + \frac{17n-3}{22} = 83u - 102.$$

Итак, решение получено: $k = 83u - 102$, $n = 22u - 27$, где u – произвольное целое число.

Стало быть ответ таков: $44k + 6 = 166n$ для некоторого $n \in Z$ тогда и только тогда, когда $k = 83u - 102$, где $u \in Z$.

Изложенный нами способ нахождения решения линейного неопределенного уравнения с целыми коэффициентами (диофантового) называется

алгоритмом Евклида.

Важным этапом решения сложных тригонометрических уравнений является нахождение пересечения двух множеств углов π (a+bn) и π(c+dk), где a, b, c, d - фиксированные рациональные числа; n, k – переменные, принимающие целочисленные значения.

Например, решить уравнения: а)

$$\frac{\pi k}{3} = \frac{\pi}{5} + \frac{4\pi n}{5}.$$

б)

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} = \frac{5}{6}(\pi + 4\pi k).$$

Иными словами, речь идет об отыскании целочисленных решений уравнения

$$\pi(a+bn) = \pi(c+dk) \qquad (1)$$

с рациональными коэффициентами a, b, c, d.

Решаем вторым способ уравнение(1)-на тригонометрическом круге. Однако он применим только для достаточно простых комбинаций углов.

Изложим общие этапы решения уравнения

$$\pi(a+bn) = \pi(c+dk) \qquad (1):$$

а) уравнение (1) приведем к виду

$$un + vk = w \qquad (2)$$

где u, v, w *– фиксированные целые числа и их НОД* $(u, v, w) = 1$;

б) если НОД $(u, v) = 1$. *В этом случае подбором найдем некоторое частное решение* (n_0, k_0) *уравнения (2), т.е. такую пару целых чисел* (n_0, k_0)*, для которых выполняется равенство* $un_0 + vk_0 = w$;

в) если НОД (u,v) *больше 1, то (1)* ***не имеет решений***;

г) запишем решение уравнения (1) в виде:

$$\begin{cases} n = n_0 + vt \\ k = k_0 - ut \\ t \in Z \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} n = n_0 - vt \\ k = k_0 + ut \\ t \in Z \end{cases}$$

Рассмотрим два примера.

Пример 1. *Решить в целых числах уравнение* $\frac{\pi k}{3} = \frac{\pi}{5} + \frac{4\pi n}{5}.$

Решение. *Приведем это уравнение к виду* (2):

$$-12n + 5k = 3.$$

Пара $n_0 = 1$, $k_0 = 3$ – *его частное решение. Поэтому общее решение имеет вид*

$$\begin{cases} n = n_0 + vt \\ k = k_0 - ut \\ t \in Z \end{cases}$$

$n = 1 + 5t$, $k = 3 + 12t$, $t \in Z$.

Ответ: $n = 1 + 5t$, $k = 3 + 12t$, $t \in Z$.

Пример 2. *Решить в целых числах уравнение*

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} = \frac{5}{6}(\pi + 4\pi k).$$

Решение. *Приведем это уравнение к виду* (2):

$$6n - 40k = 7.$$

Так как НОД(6 и 40)=2 > 1, *то решений нет.*

Ответ: нет решений.

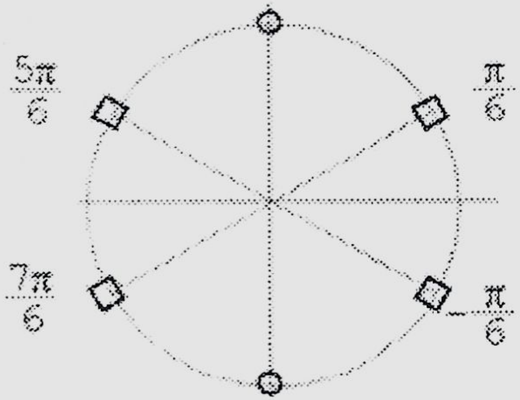
Рассмотрим примеры отбора корней на единичной окружности.

Пример 1. **Объединить семейства значений.**

Отметим на окружности значения x_1 – кружками, x_2 – квадратиками, (где $x1$ и $x2$ являются решениями уравнения). На окружности получилось шесть точек, которые делят окружность на равные части.

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad \text{и} \quad x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n.$$

Решение.

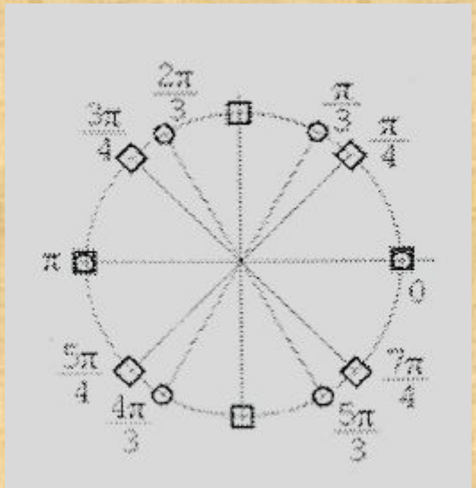


Тогда ответ можно записать более компактно: $x2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$

Пример 2. **Объединить семейства значений.**

$$x_1 = \frac{\pi}{3}k, \quad x_2 = \frac{\pi}{4}n$$

Решение. **I способ.**



Нанесем на окружности значения x_1 – кружками, x_2 – квадратиками. Значения $x = \pi m$ являются повторяющимися.

а) Если ответ исключить их из первого семейства, то он будет выглядеть так:

$$x_1 = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k, \qquad x_2 = \frac{\pi}{4}n.$$

б) Если же ответ исключить из второго семейства, то он таков:

$$x_1 = \frac{\pi}{3}k, \qquad x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi n, \qquad x_3 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}m.$$

2 способ. Аналитическое решение.

Чтобы найти повторяющиеся решения, надо решить уравнение

$$\frac{\pi}{3}k = \frac{\pi}{4}n$$

*Решим относительно **k.** Получим* $k = \frac{3}{4}n$ *при **n=4 m** значения **k** будут целыми. Таким образом, ответ можно записать так, сохранив первое семейство, а из второго исключить повторяющиеся.*

$$x_1 = \frac{\pi}{3}k, \qquad x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \neq 4m; \;\; m, n, k \notin Z$$

*При **отборе корней** в тригонометрическом уравнении изображение их **на тригонометрическом круге не всегда удобно, когда период меньше 2π.***

В таких случаях удобнее применять аналитический способ.

Пример:

$$\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{3}} = 0$$

***Решение:** заменим это тригонометрическое уравнение эквивалентной системой уравнений, а затем найдем пересечение множеств решений.*

$$\begin{cases} \cos\frac{x}{2} = 0 \\ \sin\frac{x}{3} \neq 0 \end{cases} => \begin{cases} x = \pi + 2\pi k, \\ x \neq 3\pi n, n, k \in Z \end{cases}$$

В данном случае сделать отбор решений на тригонометрическом круге неудобно, так как <u>периоды серий разные</u>. Найдём такие целые k, при которых $x=\pi+2\pi k$ имеет посторонние корни, удовлетворяющие условию $x\neq 3\pi n$, $n\in Z$.

Пусть $\pi+2\pi k=3\pi n$; $1+2k=3n$.

Отсюда $k=(3n-1):2 = (2n+n-1):2 = n+(n-1):2$.

Пусть $m=(n-1):2$.

Тогда $2m=n-1$.

Отсюда $n=2m+1$.

Следовательно $k=(3(2m+1)-1):2=(6m+3-1):2=3m+1$.

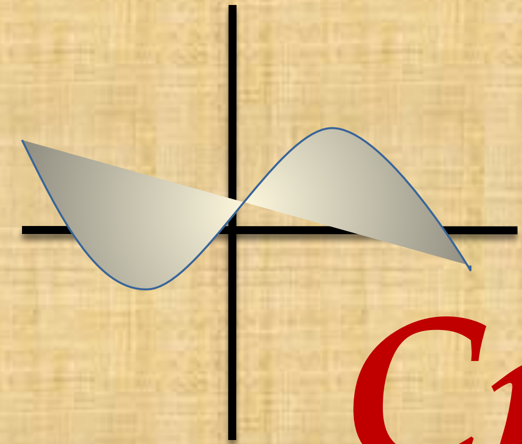
Итак, посторонние корни в серии $x=\pi+2\pi k$ ***будут при*** $k=3m+1, m\in Z$.

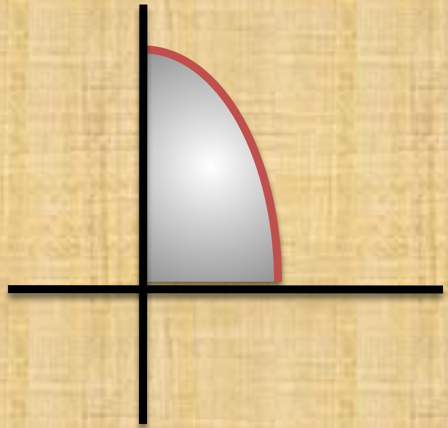
<u>Ответ</u>: $x=\pi+2\pi k$, ***где*** $k\neq 3m+1$, $m\in Z$ ***или***

$x=\pi+6\pi m$, $x=3\pi+6\pi m$, $m\in Z$.

ОСНОВНАЯ СХЕМА ОТБОРА КОРНЕЙ ТАКОВА:

1. ***Находится наименьший общий период всех тригонометрических функций, входящих в уравнение.***
2. ***На числовой прямой наносятся все решения, входящие в этот период (повторяющиеся, лишние отбрасываются; находятся удовлетворяющие уравнению и периодически продолжаются).***
3. ***Если период равен 2π, то корни наносятся на единичную окружность, а затем с периодом 2π продолжаются.***
4. ***Если значения корней очень маленькие, то их «укрупняют», а затем выбирают нужные.***
5. ***Возможно аналитическое решение пересечений семейств решений.***





Спасибо за внимание!