

ОТБОР КОРНЕЙ
В
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИ
Х УРАВНЕНИЯХ

Презентацию разработала
учитель математики МБОУ СОШ №4
г. Покачи ХМАО-Югра Тюменской области
Литвинченко Л.В.

Решая тригонометрические уравнения, возникает вопрос отбора корней, связанных с областью определения и другими условиями.

Расскажем, как можно решить такую проблему.

Первый метод нахождения подходящих корней заключается в решении диофантовых уравнений с целыми коэффициентами для этого необходимо:

- найти наибольший общий делитель коэффициентов при неизвестных;*
- попробовать сократить на него обе части уравнения (разумеется, свободный член должен при этом остаться целым числом).*

Второй метод заключается в изображении всех решений на тригонометрической окружности и исключении неподходящих решений.

Метод этот очень прост в применении, если решения легко изобразить на тригонометрической окружности.

Рассмотрим пример: $21k - 24n = 8$ и решим его первым способом.

Наибольший общий делитель коэффициентов равен 3 , и сократить его не удастся, так как 8 на 3 не делится. Тогда можно сразу сказать, что это уравнение решений в целых числах не имеет.

Покажем, как искать решения.

Решим уравнение $166n - 44k = 6$.

1. Для начала поделим обе части на 2: $83n - 22k = 3$.
2. Теперь выберем ту неизвестную, коэффициент при которой меньше по абсолютной величине – в нашем случае это k – и выразим ее через другую неизвестную:

$$k = \frac{83n - 3}{22}$$

3. Выделим в этой дроби целую часть:

$$k = \frac{83n - 3}{22} = \frac{66n + 17n - 3}{22} = 3n + \frac{17n - 3}{22}$$

4. Обозначим $\frac{17n - 3}{22} = t$ или $17n - 3 = 22t$.

Снова получилось неопределенное уравнение, но его коэффициенты уже меньше, чем у исходного.

5. Прделаем с этим новым уравнением ту же операцию, что и с исходным: выразим из него ту неизвестную, коэффициент при которой меньше по абсолютной величине (на сей раз это будет **n**), и выделим из получающейся дроби целую часть:

$$n = \frac{22t + 3}{17} = \frac{17t + 5t + 3}{17} = t + \frac{5t + 3}{17}.$$

6. Обозначим $\frac{5t + 3}{17} = s$ или **$5t + 3 = 17s$** . Продолжая в том же духе, выразим t через s :

$$t = \frac{17s - 3}{5} = 3s + \frac{2s - 3}{5}.$$

7. Обозначим $\frac{2s - 3}{5} = v$ или **$5v = 2s - 3$** . Выразим s через v :

$$s = \frac{5v + 3}{2} = 2v + \frac{v + 3}{2}.$$

8. Обозначим $\frac{v+3}{2} = u$ или $v = 2u - 3$.

9. Чтобы получить решения исходного уравнения, нам осталось последовательно выразить v через u , s через v , t через s , n через t , k через n .

10. Отправимся в обратный путь:

$$v = 2u - 3$$

$$s = 2v + \frac{v+3}{2} = 5u - 6.$$

$$t = 3s + \frac{2s-3}{5} = 17u - 21$$

$$n = t + \frac{5t+3}{17} = 22u - 27$$

$$k = 3n + \frac{17n-3}{22} = 83u - 102.$$

Итак, решение получено: $k = 83u - 102$, $n = 22u - 27$,
где u – произвольное целое число.

Стало быть ответ таков: $44k + 6 = 166n$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$
тогда и только тогда, когда $k = 83u - 102$, где $u \in \mathbb{Z}$.

Изложенный нами способ нахождения
решения линейного неопределенного уравнения с
целыми коэффициентами (диофантового)
называется

алгоритмом Евклида.

Важным этапом решения сложных тригонометрических уравнений является нахождение пересечения двух множеств углов $\pi(a+bn)$ и $\pi(c+dk)$, где a, b, c, d - фиксированные рациональные числа; n, k - переменные, принимающие целочисленные значения.

Например, решить уравнения: а)

$$\frac{\pi k}{3} = \frac{\pi}{5} + \frac{4\pi n}{5}.$$

б)

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} = \frac{5}{6}(\pi + 4\pi k).$$

Иными словами, речь идет об отыскании целочисленных решений уравнения

$$\pi(a+bn) = \pi(c+dk) \quad (1)$$

с рациональными коэффициентами a, b, c, d .

Решаем вторым способ уравнение (1)-на тригонометрическом круге. Однако он применим только для достаточно простых комбинаций углов.

Изложим общие этапы решения уравнения

$$\pi(a+bn) = \pi(c+dk) \quad (1):$$

а) уравнение (1) приведем к виду

$$un + vk = w \quad (2)$$

где u, v, w – фиксированные целые числа и их НОД $(u, v, w) = 1$;

б) если $\text{НОД}(u, v) = 1$. В этом случае подбором найдем некоторое частное решение (n_0, k_0) уравнения (2), т.е. такую пару целых чисел (n_0, k_0) , для которых выполняется равенство $un_0 + vk_0 = w$;

в) если $\text{НОД}(u, v)$ больше 1, то (1) не имеет решений;

г) запишем решение уравнения (1) в виде:

$$\begin{cases} n = n_0 + vt \\ k = k_0 - ut \\ t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} n = n_0 - vt \\ k = k_0 + ut \\ t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Рассмотрим два примера.

Пример 1. Решить в целых числах уравнение

$$\frac{\pi k}{3} = \frac{\pi}{5} + \frac{4\pi n}{5}.$$

Решение. Приведем это уравнение к виду (2):

$$-12n + 5k = 3.$$

Пара $n_0 = 1, k_0 = 3$ – его частное решение. Поэтому общее решение имеет вид

$$\begin{cases} n = n_0 + vt \\ k = k_0 - ut \\ t \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad n = 1 + 5t, \quad k = 3 + 12t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $n = 1 + 5t, \quad k = 3 + 12t, \quad t \in \mathbb{Z}.$

Пример 2. Решить в целых числах уравнение

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} = \frac{5}{6}(\pi + 4\pi k).$$

Решение. Приведем это уравнение к виду (2):

$$6n - 40k = 7.$$

Так как $\text{НОД}(6 \text{ и } 40) = 2 > 1,$ то решений нет.

Ответ: нет решений.

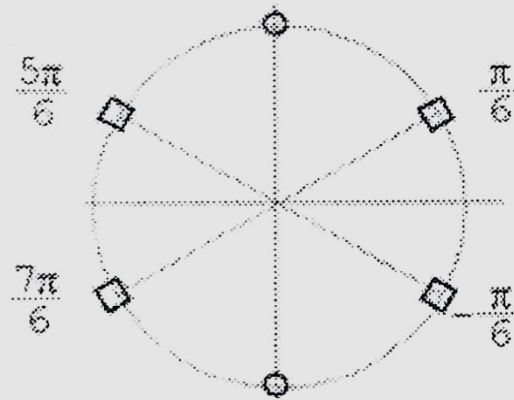
Рассмотрим примеры отбора корней на единичной окружности.

Пример 1. Объединить семейства значений.

Отметим на окружности значения x_1 – **кружками**, x_2 – **квадратиками**, (где x_1 и x_2 являются решениями уравнения). На окружности получилось шесть точек, которые делят окружность на равные части.

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad \text{и} \quad x_2 = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n.$$

Решение.



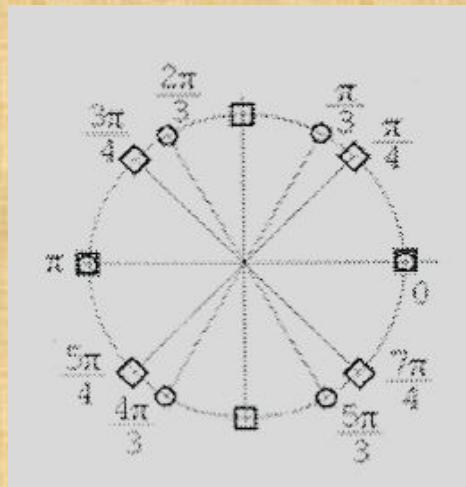
Тогда ответ можно записать более компактно: x_2

$$= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$$

Пример 2. Объединить семейства значений.

$$x_1 = \frac{\pi}{3}k, \quad x_2 = \frac{\pi}{4}n$$

Решение. I способ.



Нанесем на окружности значения x_1 – **кружками**, x_2 – **квадратиками**. Значения $x = \pi t$ являются повторяющимися.

а) Если ответ исключить их из первого семейства, то он будет выглядеть так:

$$x_1 = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad x_2 = \frac{\pi}{4}n.$$

б) Если же ответ исключить из второго семейства, то он таков:

$$x_1 = \frac{\pi}{3}k, \quad x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad x_3 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}m.$$

2 способ. Аналитическое решение.

Чтобы найти повторяющиеся решения, надо решить уравнение

$$\frac{\pi}{3}k = \frac{\pi}{4}n$$

Решим относительно **k**. Получим $k = \frac{3}{4}n$ при **n=4m** значения **k** будут целыми. Таким образом, ответ можно записать так, сохранив первое семейство, а из второго исключить повторяющиеся.

$$x_1 = \frac{\pi}{3}k, \quad x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \neq 4m; \quad m, n, k \in \mathbb{Z}$$

При отборе корней в тригонометрическом уравнении изображение их **на тригонометрическом круге не всегда удобно, когда период меньше 2π .**

В таких случаях удобнее применять аналитический способ.

Пример:

$$\frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{3}} = 0$$

Решение: заменим это тригонометрическое уравнение эквивалентной системой уравнений, а затем найдем пересечение множеств решений.

$$\begin{cases} \cos \frac{x}{2} = 0 \\ \sin \frac{x}{3} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pi + 2\pi k, \\ x \neq 3\pi n, n, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

В данном случае сделать **отбор** решений на тригонометрическом **круге неудобно**, так как периоды серий разные. Найдём такие целые **k** , при которых **$x = \pi + 2\pi k$** имеет посторонние корни, удовлетворяющие условию **$x \neq 3\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$** .

Пусть $\pi + 2\pi k = 3\pi n$; $1 + 2k = 3n$.

Отсюда $k = (3n - 1) : 2 = (2n + n - 1) : 2 = n + (n - 1) : 2$.

Пусть $m = (n - 1) : 2$.

Тогда $2m = n - 1$.

Отсюда $n = 2m + 1$.

Следовательно $k = (3(2m + 1) - 1) : 2 = (6m + 3 - 1) : 2 = 3m + 1$.

Итак, посторонние корни в серии **$x = \pi + 2\pi k$** будут при **$k = 3m + 1$, $m \in \mathbb{Z}$** .

Ответ: **$x = \pi + 2\pi k$** , где **$k \neq 3m + 1$, $m \in \mathbb{Z}$** или
 $x = \pi + 6\pi m$, $x = 3\pi + 6\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

ОСНОВНАЯ СХЕМА ОТБОРА КОРНЕЙ ТАКОВА:

- 1. Находится наименьший общий период всех тригонометрических функций, входящих в уравнение.**
- 2. На числовой прямой наносятся все решения, входящие в этот период (повторяющиеся, лишние отбрасываются; находятся удовлетворяющие уравнению и периодически продолжаются).**
- 3. Если период равен 2π , то корни наносятся на единичную окружность, а затем с периодом 2π продолжаются.**
- 4. Если значения корней очень маленькие, то их «укрупняют», а затем выбирают нужные.**
- 5. Возможно аналитическое решение пересечений семейств решений.**

*Спасибо за
внимание!*

