

**ОТБОР КОРНЕЙ**  
**В**  
**ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИ**  
**Х УРАВНЕНИЯХ**

Презентацию разработала  
учитель математики МБОУ СОШ №4  
г. Покачи ХМАО-Югра Тюменской области  
Литвинченко Л.В.

*Решая тригонометрические уравнения, возникает вопрос отбора корней, связанных с областью определения и другими условиями.*

*Расскажем, как можно решить такую проблему.*

*Первый метод нахождения подходящих корней заключается в решении диофантовых уравнений с целыми коэффициентами для этого необходимо:*

- найти наибольший общий делитель коэффициентов при неизвестных;*
- попробовать сократить на него обе части уравнения (разумеется, свободный член должен при этом остаться целым числом).*

*Второй метод заключается в изображении всех решений на тригонометрической окружности и исключении неподходящих решений.*

*Метод этот очень прост в применении, если решения легко изобразить на тригонометрической окружности.*

*Рассмотрим пример:  $21k - 24n = 8$  и решим его первым способом.*

*Наибольший общий делитель коэффициентов равен  $3$ , и сократить его не удастся, так как  $8$  на  $3$  не делится. Тогда можно сразу сказать, что это уравнение решений в целых числах не имеет.*

## Покажем, как искать решения.

Решим уравнение  $166n - 44k = 6$ .

1. Для начала поделим обе части на 2:  $83n - 22k = 3$ .
2. Теперь выберем ту неизвестную, коэффициент при которой меньше по абсолютной величине – в нашем случае это  $k$  – и выразим ее через другую неизвестную:

$$k = \frac{83n - 3}{22}$$

3. Выделим в этой дроби целую часть:

$$k = \frac{83n - 3}{22} = \frac{66n + 17n - 3}{22} = 3n + \frac{17n - 3}{22}$$

4. Обозначим  $\frac{17n - 3}{22} = t$  или  $17n - 3 = 22t$ .

Снова получилось неопределенное уравнение, но его коэффициенты уже меньше, чем у исходного.

5. Прделаем с этим новым уравнением ту же операцию, что и с исходным: выразим из него ту неизвестную, коэффициент при которой меньше по абсолютной величине (на сей раз это будет **n**), и выделим из получающейся дроби целую часть:

$$n = \frac{22t + 3}{17} = \frac{17t + 5t + 3}{17} = t + \frac{5t + 3}{17}.$$

6. Обозначим  $\frac{5t + 3}{17} = s$  или  **$5t + 3 = 17s$** . Продолжая в том же духе, выразим  $t$  через  $s$ :

$$t = \frac{17s - 3}{5} = 3s + \frac{2s - 3}{5}.$$

7. Обозначим  $\frac{2s - 3}{5} = v$  или  **$5v = 2s - 3$** . Выразим  $s$  через  $v$ :

$$s = \frac{5v + 3}{2} = 2v + \frac{v + 3}{2}.$$



8. Обозначим  $\frac{v+3}{2} = u$  или  $v = 2u - 3$ .

9. Чтобы получить решения исходного уравнения, нам осталось последовательно выразить  $v$  через  $u$ ,  $s$  через  $v$ ,  $t$  через  $s$ ,  $n$  через  $t$ ,  $k$  через  $n$ .

10. Отправимся в обратный путь:

$$v = 2u - 3$$

$$s = 2v + \frac{v+3}{2} = 5u - 6.$$

$$t = 3s + \frac{2s-3}{5} = 17u - 21$$

$$n = t + \frac{5t+3}{17} = 22u - 27$$

$$k = 3n + \frac{17n-3}{22} = 83u - 102.$$

Итак, решение получено:  $k = 83u - 102$ ,  $n = 22u - 27$ ,  
где  $u$  – произвольное целое число.

Стало быть ответ таков:  $44k + 6 = 166n$  для некоторого  $n \in \mathbb{Z}$   
тогда и только тогда, когда  $k = 83u - 102$ , где  $u \in \mathbb{Z}$ .

Изложенный нами способ нахождения  
решения линейного неопределенного уравнения с  
целыми коэффициентами (диофантового)  
называется

**алгоритмом Евклида.**

*Важным этапом решения сложных тригонометрических уравнений является нахождение пересечения двух множеств углов  $\pi(a+bn)$  и  $\pi(c+dk)$ , где  $a, b, c, d$  - фиксированные рациональные числа;  $n, k$  - переменные, принимающие целочисленные значения.*

*Например, решить уравнения: а)*

$$\frac{\pi k}{3} = \frac{\pi}{5} + \frac{4\pi n}{5}.$$

*б)*

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} = \frac{5}{6}(\pi + 4\pi k).$$

*Иными словами, речь идет об отыскании целочисленных решений уравнения*

$$\pi(a+bn) = \pi(c+dk) \quad (1)$$

*с рациональными коэффициентами  $a, b, c, d$ .*

*Решаем вторым способ уравнение (1)-на тригонометрическом круге. Однако он применим только для достаточно простых комбинаций углов.*

Изложим общие этапы решения уравнения

$$\pi(a+bn) = \pi(c+dk) \quad (1):$$

а) уравнение (1) приведем к виду

$$un + vk = w \quad (2)$$

где  $u, v, w$  – фиксированные целые числа и их НОД  $(u, v, w) = 1$ ;

б) если  $\text{НОД}(u, v) = 1$ . В этом случае подбором найдем некоторое частное решение  $(n_0, k_0)$  уравнения (2), т.е. такую пару целых чисел  $(n_0, k_0)$ , для которых выполняется равенство  $un_0 + vk_0 = w$ ;

в) если  $\text{НОД}(u, v)$  больше 1, то (1) не имеет решений;

г) запишем решение уравнения (1) в виде:

$$\begin{cases} n = n_0 + vt \\ k = k_0 - ut \\ t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} n = n_0 - vt \\ k = k_0 + ut \\ t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



## Рассмотрим два примера.

Пример 1. Решить в целых числах уравнение

$$\frac{\pi k}{3} = \frac{\pi}{5} + \frac{4\pi n}{5}.$$

Решение. Приведем это уравнение к виду (2):

$$-12n + 5k = 3.$$

Пара  $n_0 = 1, k_0 = 3$  – его частное решение. Поэтому общее решение имеет вид

$$\begin{cases} n = n_0 + vt \\ k = k_0 - ut \\ t \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad n = 1 + 5t, \quad k = 3 + 12t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $n = 1 + 5t, \quad k = 3 + 12t, \quad t \in \mathbb{Z}.$

Пример 2. Решить в целых числах уравнение

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} = \frac{5}{6}(\pi + 4\pi k).$$

Решение. Приведем это уравнение к виду (2):

$$6n - 40k = 7.$$

Так как  $\text{НОД}(6 \text{ и } 40) = 2 > 1,$  то решений нет.

Ответ: нет решений.

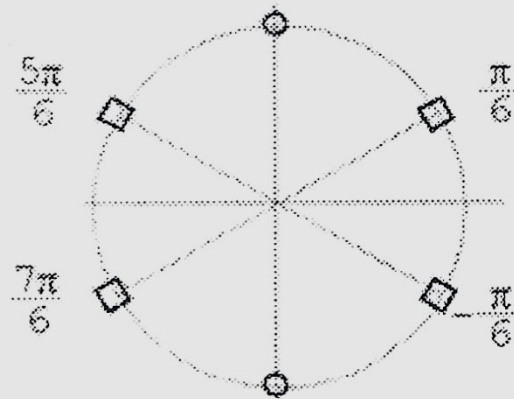
## Рассмотрим примеры отбора корней на единичной окружности.

**Пример 1. Объединить семейства значений.**

Отметим на окружности значения  $x_1$  – **кружками**,  $x_2$  – **квадратиками**, (где  $x_1$  и  $x_2$  являются решениями уравнения). На окружности получилось шесть точек, которые делят окружность на равные части.

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad \text{и} \quad x_2 = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n .$$

Решение.



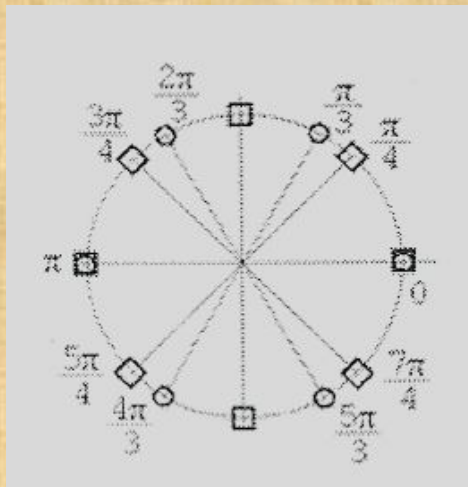
Тогда ответ можно записать более компактно:  $x_2$

$$= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$$

## Пример 2. Объединить семейства значений.

$$x_1 = \frac{\pi}{3}k, \quad x_2 = \frac{\pi}{4}n$$

Решение. I способ.



Нанесем на окружности значения  $x_1$  – **кружками**,  $x_2$  – **квадратиками**. Значения  $x = \pi t$  являются повторяющимися.

а) Если ответ исключить их из первого семейства, то он будет выглядеть так:

$$x_1 = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad x_2 = \frac{\pi}{4}n.$$

б) Если же ответ исключить из второго семейства, то он таков:

$$x_1 = \frac{\pi}{3}k, \quad x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad x_3 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}m.$$

## 2 способ. Аналитическое решение.

Чтобы найти повторяющиеся решения, надо решить уравнение

$$\frac{\pi}{3}k = \frac{\pi}{4}n$$

Решим относительно **k**. Получим  $k = \frac{3}{4}n$  при **n=4m** значения **k** будут целыми. Таким образом, ответ можно записать так, сохранив первое семейство, а из второго исключить повторяющиеся.

$$x_1 = \frac{\pi}{3}k, \quad x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \neq 4m; \quad m, n, k \in \mathbb{Z}$$



При отборе корней в тригонометрическом уравнении изображение их **на тригонометрическом круге не всегда удобно, когда период меньше  $2\pi$ .**

В таких случаях удобнее применять аналитический способ.

Пример:

$$\frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{3}} = 0$$

Решение: заменим это тригонометрическое уравнение эквивалентной системой уравнений, а затем найдем пересечение множеств решений.

$$\begin{cases} \cos \frac{x}{2} = 0 \\ \sin \frac{x}{3} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pi + 2\pi k, \\ x \neq 3\pi n, n, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

В данном случае сделать **отбор** решений на тригонометрическом **круге неудобно**, так как периоды серий разные. Найдём такие целые  **$k$** , при которых  **$x = \pi + 2\pi k$**  имеет посторонние корни, удовлетворяющие условию  **$x \neq 3\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$** .

Пусть  $\pi + 2\pi k = 3\pi n$ ;  $1 + 2k = 3n$ .

Отсюда  $k = (3n - 1) : 2 = (2n + n - 1) : 2 = n + (n - 1) : 2$ .

Пусть  $m = (n - 1) : 2$ .

Тогда  $2m = n - 1$ .

Отсюда  $n = 2m + 1$ .

Следовательно  $k = (3(2m + 1) - 1) : 2 = (6m + 3 - 1) : 2 = 3m + 1$ .

Итак, посторонние корни в серии  **$x = \pi + 2\pi k$**  будут при  **$k = 3m + 1$ ,  $m \in \mathbb{Z}$** .

Ответ:  **$x = \pi + 2\pi k$** , где  **$k \neq 3m + 1$ ,  $m \in \mathbb{Z}$**  или  
 **$x = \pi + 6\pi m$ ,  $x = 3\pi + 6\pi m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$** .

## **ОСНОВНАЯ СХЕМА ОТБОРА КОРНЕЙ ТАКОВА:**

- 1. Находится наименьший общий период всех тригонометрических функций, входящих в уравнение.**
- 2. На числовой прямой наносятся все решения, входящие в этот период (повторяющиеся, лишние отбрасываются; находятся удовлетворяющие уравнению и периодически продолжаются).**
- 3. Если период равен  $2\pi$ , то корни наносятся на единичную окружность, а затем с периодом  $2\pi$  продолжаются.**
- 4. Если значения корней очень маленькие, то их «укрупняют», а затем выбирают нужные.**
- 5. Возможно аналитическое решение пересечений семейств решений.**

*Спасибо за  
внимание!*

