

Числові послідовності

Означення. Обмежені послідовності.
Монотонні послідовності



Означення

Послідовністю називається множина чисел, занумерованих натуральними числами у порядку зростання останніх.

Позначення. $\{a_n | n \geq 1\}$, $\{a_n : n \geq 1\}$, $\{a_n, n \geq 1\}$, $\{a_n\}_{n \geq 1}$.

Елементи множини з означення називаються **членами послідовності**.

a_n — загальний член послідовності.



Способи задання послідовностей

- Аналітичний
- Табличний
- Графічний
- Рекурентний



Аналітичний спосіб

Послідовність – функція на множині натуральних чисел. Тобто кожному натуральному числу n функція ставить у відповідність n -ий член послідовності.



Аналітичний спосіб

Приклад 1. $a_n = 2n - 1, n \in \mathbb{N}$ – послідовність непарних натуральних чисел.

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, \dots$$

Приклад 2. $\left\{ \frac{1}{n} \mid n \geq 1 \right\}$ Послідовність чисел вигляду $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{10}, \dots, \frac{1}{121}, \dots$ занумерованих у порядку спадання



Табличний спосіб

Рядок номерів і рядок відповідних значень

				...

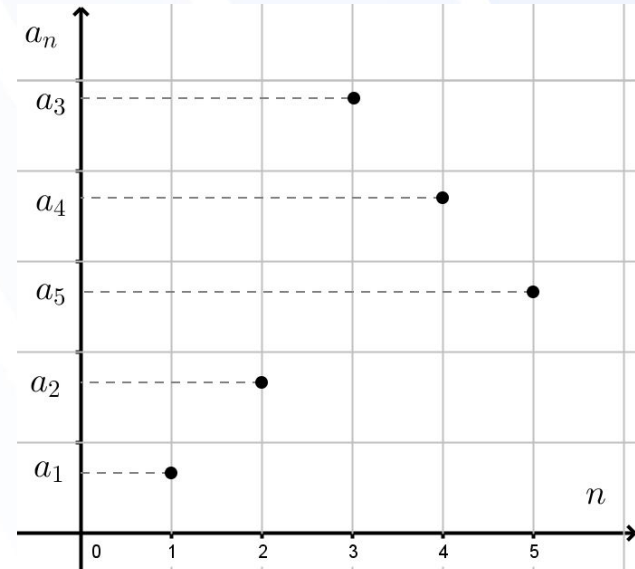
Практично не застосовується через нескінченну кількість членів послідовності.



Графічний спосіб

Та сама проблема, що і в табличному способі: можна зобразити лише скінченну кількість членів послідовності.

Але іноді геометрична інтерпретація послідовності



допомагає при доведенні теорем та розв'язуванні задач.



Рекурентний спосіб

Задаються початкові умови і формула, по якій можна знайти наступний член, знаючи попередні.



Рекурентний спосіб

Послідовність Фібоначчі:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Рекурентн

$$a_1 = a_2 = 1 \text{ і } a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 3. \quad \leftarrow$$

$$\left(F_n = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \right) \quad \text{Аналітичн}$$

о



Означення

Послідовність $\{a_n | n \geq 1\}$ називається **обмеженою зверху**, якщо існує таке дійсне число A , що для довільного натурального n виконується: $a_n \leq A$.

$\{a_n | n \geq 1\}$ – обмежена зверху \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq A.$$

Число A – **верхня межа** послідовності.



Означення

Послідовність $\{a_n | n \geq 1\}$ називається **обмеженою знизу**, якщо існує таке дійсне число B , що для довільного натурального n виконується: $a_n \geq B$.

$\{a_n | n \geq 1\}$ – обмежена знизу \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow \exists B \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}: a_n \geq B.$$

Число B – **нижня межа** послідовності.



Означення

Послідовність $\{a_n | n \geq 1\}$ називається **обмеженою**, якщо вона обмежена і знизу і зверху.

$$\begin{aligned} \{a_n | n \geq 1\} \text{ – обмежена} &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}: |a_n| \leq C. \end{aligned}$$

$$C = \max\{|A|, |B|\}$$



Послідовність $\{a_n | n \geq 1\}$ називається **зростаючою**, якщо $\forall n \in \mathbb{N}: a_n < a_{n+1}$.

Послідовність $\{a_n | n \geq 1\}$ називається **неспадною**, якщо $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq a_{n+1}$.

Послідовність $\{a_n | n \geq 1\}$ називається **спадною**, якщо $\forall n \in \mathbb{N}: a_n > a_{n+1}$.

Послідовність $\{a_n | n \geq 1\}$ називається **незростаючою**, якщо $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \geq a_{n+1}$.



Означення

Якщо послідовність є однією з перерахованих в попередньому означенні, то така послідовність називається **МОНОТОННОЮ**.



Властивості монотонних послідовностей

1. Нехай $\{a_n | n \geq 1\}$ – зростаюча послідовність
і $c \in \mathbb{R}$. Тоді:

a) $\{a_n + c | n \geq 1\}$ – зростаюча;

b) $\{a_n \cdot c | n \geq 1\}$ – зростаюча при $c > 0$;

c) $\{a_n \cdot c | n \geq 1\}$ – спадна при $c < 0$.



Властивості монотонних послідовностей

2. Нехай $\{a_n | n \geq 1\}, \{b_n | n \geq 1\}$ - зростаючі послідовності, тоді послідовність $\{a_n + b_n | n \geq 1\}$ теж зростаюча



Властивості монотонних послідовностей

3. Нехай $\{a_n | n \geq 1\}, \{b_n | n \geq 1\}$ - зростаючі послідовності, тоді
- a) $\{a_n b_n | n \geq 1\}$ – зростаюча, якщо всі члени $\{a_n | n \geq 1\}$ і $\{b_n | n \geq 1\}$ додатні;
 - b) $\{a_n b_n | n \geq 1\}$ – спадна, якщо всі члени $\{a_n | n \geq 1\}$ і $\{b_n | n \geq 1\}$ від'ємні.



Властивості монотонних послідовностей

4. Якщо $\{a_n | n \geq 1\}$ – зростаюча послідовність, то $\left\{\frac{1}{a_n} | n \geq 1\right\}$ – спадна, якщо $\forall n \in \mathbb{N}$ всі a_n одного знаку.



Доведення властивостей

1.a) $\{a_n | n \geq 1\}$ – зростаюча \Rightarrow

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: a_n < a_{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: a_n + c < a_{n+1} + c \Rightarrow$$

$\{a_n + c | n \geq 1\}$ – зростаюча за означенням.



Доведення властивостей

1.b) $\{a_n | n \geq 1\}$ – зростаюча \Rightarrow

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: a_n < a_{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall c > 0, \forall n \in \mathbb{N}: a_n \cdot c < a_{n+1} \cdot c \Rightarrow$$

$\{a_n \cdot c | n \geq 1\}$ – зростаюча за означенням.



Доведення властивостей

3.a) $\{a_n | n \geq 1\}, \{b_n | n \geq 1\}$ – зростаючі \Rightarrow
 $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: a_n < a_{n+1}$ і $b_n < b_{n+1} \Rightarrow$
 \Rightarrow оскільки $\forall n \in \mathbb{N}: a_n > 0$ і $b_n > 0$, то
 $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: a_n b_n < a_{n+1} b_n < a_{n+1} b_{n+1} \Rightarrow$
 $\{a_n b_n | n \geq 1\}$ – зростаюча за означенням.



Додому

1. Довести самостійно властивості 1.c), 2, 3b), 4 для зростаючих послідовностей.
2. Сформулювати і довести аналогічні властивості 1.–4. для спадних послідовностей.





Алгебра