Числові послідовності

Означення. Обмежені послідовності. Монотонні послідовності

Означення

Послідовністю називається множина чисел, занумерованих натуральними числами у порядку зростання останніх.

Позначення. $\{a_n | n \geq 1\}, \{a_n : n \geq 1\}, \{a_n, n \geq 1\}, \{a_n\}_{n\geq 1}$.

Елементи множини з означення називаються **членами послідовності.**

a_n — загальний член послідовності.

Способи задання послідовностей

- Аналітичний
- Табличний
- Графічний
- Рекуретний

Аналітичний спосіб

- Послідовність – функція на множині натуральних чисел. Тобто кожному натуральному числу n функція ставить у відповідність n-ий член послідовності.

Аналітичний спосіб

Приклад 1. $a_n = 2n - 1, n \in \mathbb{N}$ – послідовність непарних натуральних чисел.

$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, \ldots$

Приклад 2. $\left\{\frac{1}{n} | n \geq 1\right\}$ Послідовність чисел вигляду $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{10}, \ldots, \frac{1}{121}, \ldots$ занумерованих у порядку спадання

Табличний спосіб

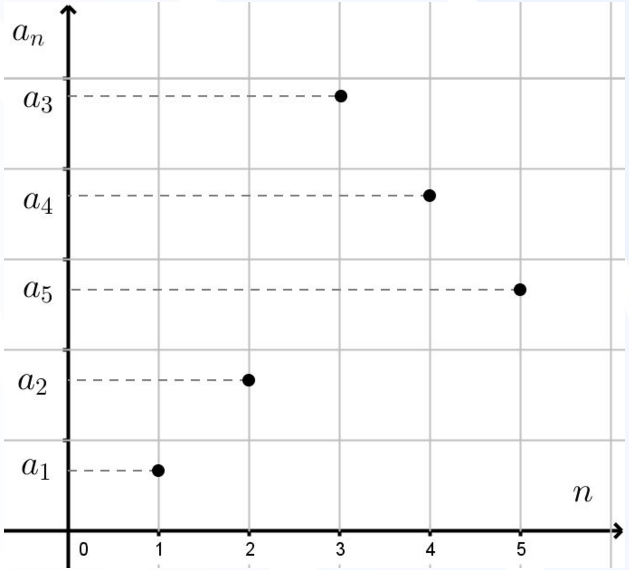
Рядок номерів і рядок відповідних значень

…

Практично не застосовується через нескінченну кількість членів послідовності.

Графічний спосіб

Та сама проблема, що і в табличному способі: можна зобразити лише скінченну кількість членів послідовності.



Але іноді геометрична інтерпретація послідовності допомагає <u>при доведенні теорем</u> та <u>розв’язуванні задач</u>.

Рекурентний спосіб

Задаються початкові умови і формула, по якій можна знайти наступний член, знаючи попередні.

Рекурентний спосіб

- Послідовність Фібоначчі:

$$1,1,2,3,5,8,13,21,\ldots$$

Рекурентно

$a_1 = a_2 = 1$ і $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 3.$

$$\left(F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}\right)$$

Аналітично

Означення

- Послідовність $\{a_n | n \geq 1\}$ називається **обмеженою зверху**, якщо існує таке дійсне число A, що для довільного натурального n виконується: $a_n \leq A$.

$$\{a_n | n \geq 1\} \text{ – обмежена зверху} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R} \colon \forall n \in \mathbb{N} \colon a_n \leq A.$$

Число A – **верхня межа** послідовності.

Означення

- Послідовність $\{a_n | n \geq 1\}$ називається **обмеженою знизу**, якщо існує таке дійсне число B, що для довільного натурального n виконується: $a_n \geq B$.

$\{a_n | n \geq 1\}$ – обмежена знизу$\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \exists B \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}: a_n \geq B.$$

Число B – **нижня межа** послідовності.

Означення

- Послідовність $\{a_n | n \geq 1\}$ називається **обмеженою**, якщо вона обмежена і знизу і зверху.

$$\{a_n | n \geq 1\} \ - \text{обмежена} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists \mathrm{C} \ \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq C.$$

$$C = \max\{|A|, |B|\}$$

- Послідовність $\{a_n | n \geq 1\}$ називається **зростаючою**, якщо $\forall n \in \mathbb{N}: a_n < a_{n+1}$.

Послідовність $\{a_n | n \geq 1\}$ називається **неспадною**, якщо $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq a_{n+1}$.

Послідовність $\{a_n | n \geq 1\}$ називається **спадною**, якщо $\forall n \in \mathbb{N}: a_n > a_{n+1}$.

Послідовність $\{a_n | n \geq 1\}$ називається **незростаючою**, якщо $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \geq a_{n+1}$.

Означення

Якщо послідовність є однією з перерахованих в попередньому означенні, то така послідовність називається **монотонною.**

Властивості монотонних послідовностей

1. Нехай $\{a_n | n \geq 1\}$ – зростаюча послідовність і $c \in \mathbb{R}$. Тоді:

   $a)\ \{a_n + c | n \geq 1\}$ – зростаюча;

   $b)\ \{a_n \cdot c | n \geq 1\}$ – зростаюча при $c > 0$;

   $c)\ \{a_n \cdot c | n \geq 1\}$ – спадна при $c < 0$.

Властивості монотонних послідовностей

2. Нехай $\{a_n | n \geq 1\}, \{b_n | n \geq 1\}$- зростаючі послідовності, тоді послідовність $\{a_n + b_n | n \geq 1\}$ теж зростаюча

Властивості монотонних послідовностей

3. Нехай $\{a_n | n \geq 1\}, \{b_n | n \geq 1\}$- зростаючі послідовності, тоді

   $a)$ $\{a_n b_n | n \geq 1\}$ – зростаюча, якщо всі члени $\{a_n | n \geq 1\}$ і $\{b_n | n \geq 1\}$ додатні;

   $b)$ $\{a_n b_n | n \geq 1\}$ – спадна, якщо всі члени $\{a_n | n \geq 1\}$ і $\{b_n | n \geq 1\}$ від’ємні.

Властивості монотонних послідовностей

4. Якщо $\{a_n | n \geq 1\}$ – зростаюча послідовність, то $\left\{\frac{1}{a_n} | n \geq 1\right\}$ – спадна, якщо $\forall n \in \mathbb{N}$ всі a_n одного знаку.

Доведення властивостей

1. $a)\ \{a_n | n \geq 1\}$ – зростаюча $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: a_n < a_{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: a_n + c < a_{n+1} + c \Rightarrow$$

$\{a_n + c | n \geq 1\}$ – зростаюча за означенням.

Доведення властивостей

1.$b)$ $\{a_n | n \geq 1\}$ – зростаюча $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: a_n < a_{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall c > 0, \forall n \in \mathbb{N}: a_n \cdot c < a_{n+1} \cdot c \Rightarrow$$

$\{a_n \cdot c | n \geq 1\}$ – зростаюча за означенням.

Доведення властивостей

- 3.$a)$ $\{a_n|n \geq 1\}, \{b_n|n \geq 1\}$ − зростаючі $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: a_n < a_{n+1}$ і $b_n < b_{n+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ оскільки $\forall n \in \mathbb{N}: a_n > 0$ і $b_n > 0$, то

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: a_n b_n < a_{n+1} b_n < a_{n+1} b_{n+1} \Rightarrow$

$\{a_n b_n|n \geq 1\}$ − зростаюча за означенням.

Додому

1. Довести самостійно властивості $1.c)$, 2, $3b)$, 4 для зростаючих послідовностей.
2. Сформулювати і довести аналогічні властивості $1.-4.$ для спадних послідовностей.