

# Парадокс дней рождения



Выполнил:  
Кочетов  
Андрей Михайлович  
студент группы 2КСК

# Что это такое?

- *Парадóкс дней рождéния* — утверждение, гласящее, что в группе, состоящей из 23 или более человек, вероятность совпадения дней рождения (число и месяц) хотя бы у двух людей превышает 50 %. Например, если в классе 23 ученика или более, то более вероятно то, что у кого-то из одноклассников дни рождения придутся на один день, чем то, что у каждого будет свой неповторимый день рождения.

Для 60 и более человек вероятность такого совпадения превышает 99 %, хотя 100 % она достигает, согласно принципу Дирихле, только тогда, когда в группе не менее 367 человек (ровно на 1 больше, чем число дней в високосном году; с учётом високосных лет).

- Ключевым моментом здесь является то, что утверждение парадокса дней рождения говорит именно о совпадении дней рождения у *каких-либо* двух членов группы.

Одно из распространённых заблуждений состоит в том, что этот случай путают с другим — похожим, на первый взгляд, — случаем, когда из группы выбирается один человек и оценивается вероятность того, что у кого-либо из других членов группы день рождения совпадёт с днем рождения выбранного человека. В последнем случае вероятность совпадения значительно ниже.

# Расчёт вероятности

Рассчитаем сначала, какова вероятность  $p(n)$  того, что в группе из  $n$  человек дни рождения всех людей будут различными. Если  $n > 365$ , то в силу принципа Дирихле вероятность равна нулю. Если же  $n \leq 365$ , то будем рассуждать следующим образом. Возьмём наугад одного человека из группы и запомним его день рождения. Затем возьмём наугад второго человека, при этом вероятность того, что у него день рождения не совпадёт с днем рождения первого человека, равна  $1 - 1/365$ . Затем возьмём третьего человека, при этом вероятность того, что его день рождения не совпадёт с днями рождения первых двух, равна  $1 - 2/365$ . Рассуждая по аналогии, мы дойдём до последнего человека, для которого вероятность несовпадения его дня рождения со всеми предыдущими будет равна  $1 - (n - 1)/365$ . Перемножая все эти вероятности, получаем вероятность того, что все дни рождения в группе будут различными:

$$\bar{p}(n) = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{365}\right) = \frac{365 \cdot 364 \cdots (365 - n + 1)}{365^n} = \frac{365!}{365^n (365 - n)!}$$

Тогда вероятность того, что хотя бы у двух человек из  $n$  дни рождения совпадут, равна:

$$p(n) = 1 - \bar{p}(n).$$

Значение этой функции превосходит  $1/2$  при  $n = 23$   
 (при этом вероятность совпадения равна примерно 50.7 %). Вероятности для  
 некоторых значений  $n$  иллюстрируются следующей таблицей:

$n$	$p(n)$
10	12%
20	41%
30	70%
50	97%
100	99.99996%
200	99.999999999999999999999999999998%
300	$(1 - 7 \times 10^{-73}) \times 100\%$
350	$(1 - 3 \times 10^{-131}) \times 100\%$
367	100%

# Альтернативный метод

Вероятность совпадения дней рождения в группе можно также рассчитать с использованием формул *комбинаторики*. Представим, что каждый день года — это одна буква в алфавите, и алфавит состоит из 365 букв. Дни рождения  $n$  человек могут быть представлены строкой, состоящей из  $n$  букв такого алфавита. Общее число таких строк равно:

$$n_{\text{total}} = 365^n.$$

Общее число строк, в которых буквы не повторяются, составит:

$$n_{\text{unique}} = \frac{365!}{(365 - n)!}.$$

Если строки выбираются случайно (с равномерным распределением), вероятность выбора строки, в которой хотя бы две буквы совпадут, равна

$$p(n) = 1 - \frac{n_{\text{unique}}}{n_{\text{total}}} = 1 - \frac{\frac{365!}{(365-n)!}}{365^n} \text{ при } n \leq 365 \text{ и}$$
$$p(n) = 1 \text{ при } n > 365.$$

Поскольку

$$\frac{\left(\frac{365!}{(365-n)!}\right)}{365^n} = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots (365 - n + 1)}{365^n} = \frac{365}{365} \frac{364}{365} \frac{363}{365} \cdots \frac{365 - n + 1}{365} = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{365}\right).$$



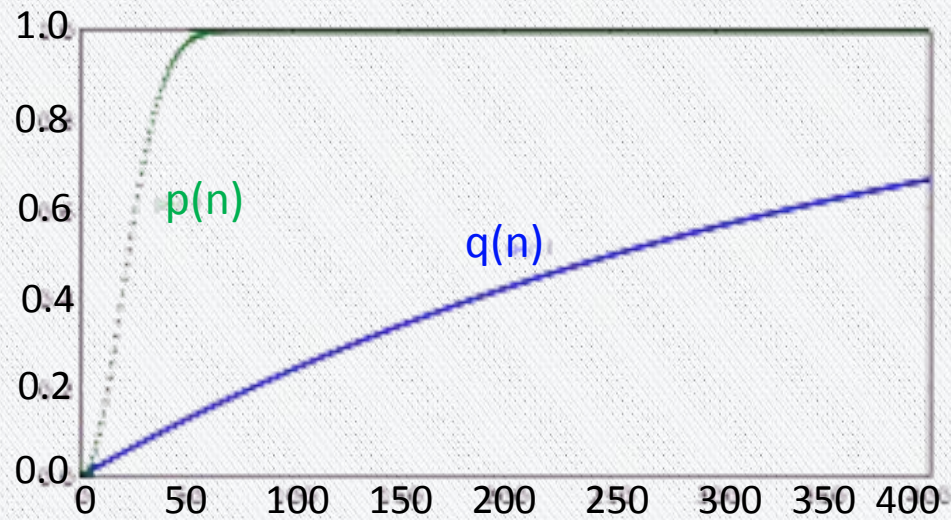
# Родившиеся в один день с заданным ЧЕЛОВЕКОМ

Сравним вероятность  $p(n)$  с вероятностью того, что в группе из  $n$  человек день рождения какого-либо человека из группы совпадёт с днём рождения некоторого заранее выбранного человека, не принадлежащего группе. Эта вероятность равна:

$$q(n) = 1 - \left( \frac{365 - 1}{365} \right)^n .$$

Подставляя  $n = 23$ , получаем  $q(n) \approx 6.12\%$ . Для того, чтобы вероятность  $q(n)$  превысила  $50\%$ , число людей в группе должно быть не менее **253** ( $q(252) \approx 49.91\%$ ;  $q(253) \approx 50.05\%$ ). Это число больше, чем половина дней в году  $365/2 = 182.5$ ; так происходит из-за того, что у остальных членов группы дни рождения могут совпадать между собой, и это уменьшает вероятность  $q(n)$ .

# Сравнение графиков функций : $p(n)$ и $q(n)$ .



# Несколько типов людей

Выше парадокс дней рождения был представлен для одного «типа» людей. Можно обобщить задачу, введя несколько «типов», например, разделив людей на мужчин ( $m$ ) и женщин ( $n$ ). Подсчитаем вероятность того, что хотя бы у одной женщины и у одного мужчины совпадают дни рождения (совпадение дней рождения у двух женщин или у двух мужчин не учитываются):

$$p_0 = 1 - \frac{1}{d^{m+n}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n S_2(m, i) S_2(n, j) \prod_{k=0}^{i+j-1} (d - k),$$

где  $d = 365$  и  $S_2()$  — числа *Стирлинга второго рода*. Интересно, что нет однозначного ответа на вопрос о величине  $n+m$  для заданной вероятности. Например, вероятность 0.5 даёт как набор из 16 мужчин и 16 женщин, так и набор из 43 мужчин и 6 женщин

# Близкие дни рождения

Максимальное различие дней рождения, количество дней	Необходимое кол-во людей
1	23
2	14
3	11
4	9
5	8
6	8
7	7
8	7

Таким образом, вероятность того, что даже в группе из 7 человек дни рождения хотя бы у двух из них будут различаться не более чем на неделю, превышает 50 %.



**Спасибо за внимание !!!**