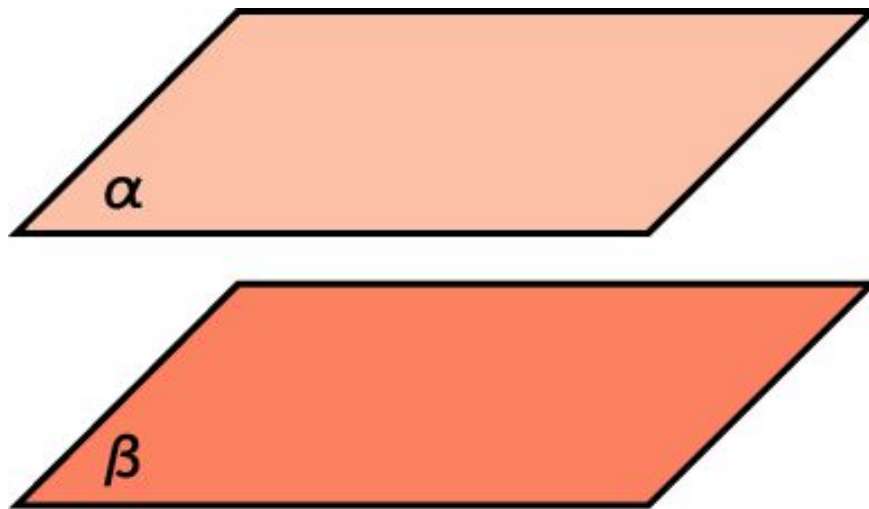


# ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

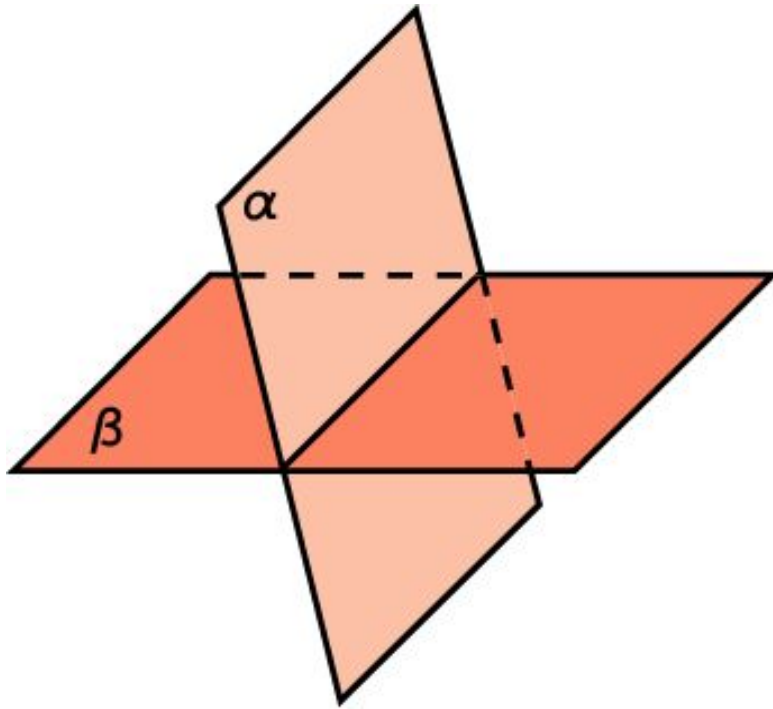
**Определение.** Две плоскости в пространстве называются параллельными, если они не имеют общих точек.



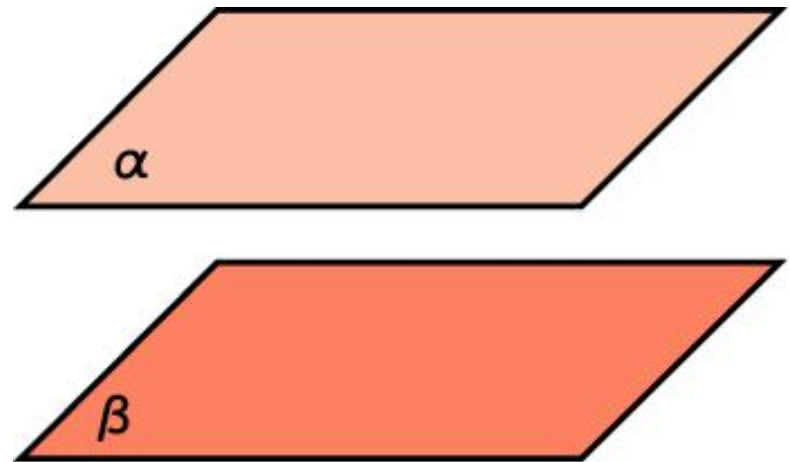
# Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве

Две плоскости

Имеют общие точки  
(пересекаются по прямой)

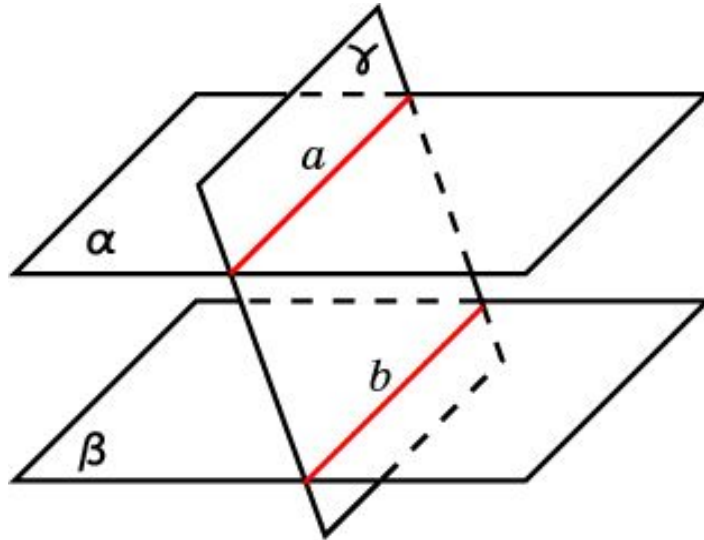


Не имеют общих точек  
(параллельны)



## Признак параллельности двух прямых

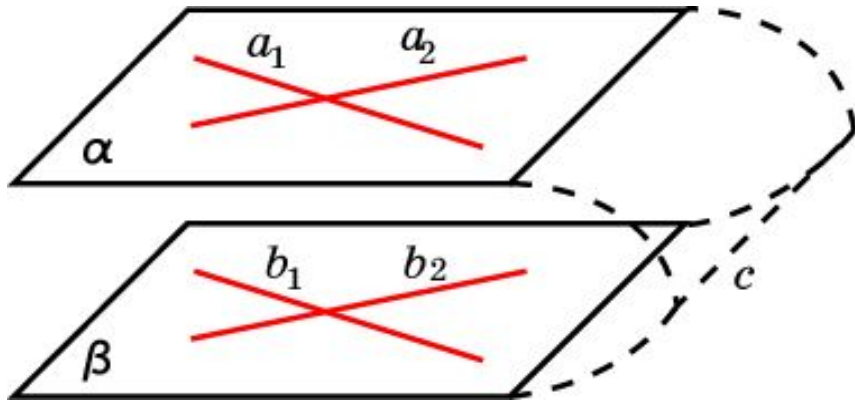
Если две параллельные плоскости пересечены третьей плоскостью, то линии их пересечения параллельны.



**Доказательство.** Пусть плоскость  $\gamma$  пересекает параллельные плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  по прямым  $a$  и  $b$  соответственно. Докажем, что прямые  $a$  и  $b$  параллельны. Действительно, они лежат в одной плоскости - плоскости  $\gamma$ . Кроме этого, они лежат в непересекающихся плоскостях, следовательно, и подавно, не пересекаются. Значит, они параллельны.

## Признак параллельности двух плоскостей

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.



**Доказательство.** Пусть две пересекающиеся прямые  $a_1, a_2$  плоскости  $\alpha$  соответственно параллельны двум прямым  $b_1, b_2$  плоскости  $\beta$ . Докажем, что плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  параллельны.

Предположим противное, т.е., что плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются, и пусть  $c$  - линия их пересечения. По признаку параллельности прямой и плоскости, прямая  $a_1$  параллельна плоскости  $\beta$ , а по свойству параллельности прямой и плоскости, она параллельна прямой  $c$ . Аналогично, прямая  $a_2$  также параллельна прямой  $c$ . Таким образом, в плоскости  $\alpha$  мы имеем две пересекающиеся прямые, параллельные одной прямой, что невозможно. Следовательно, плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  параллельны.

# Упражнение 1

Верно ли утверждение: "Если прямая, лежащая в одной плоскости, параллельна прямой, лежащей в другой плоскости, то эти плоскости параллельны"?

Ответ: Нет.

## Упражнение 2

Верно ли утверждение: "Если две прямые, лежащие в одной плоскости, параллельны двум прямым, лежащим в другой плоскости, то эти плоскости параллельны"?

Ответ: Нет.

## Упражнение 3

Могут ли быть параллельными две плоскости, проходящие через непараллельные прямые?

Ответ: Да.

## Упражнение 4

Могут ли пересекаться плоскости, параллельные одной и той же прямой?

Ответ: Да.



## Упражнение 5

Через каждую из двух параллельных прямых проведена плоскость. Можно ли утверждать, что эти плоскости параллельны?

Ответ: Нет.

## Упражнение 6

Могут ли пересекаться плоскости, параллельные одной и той же прямой?

Ответ: Да.

## Упражнение 7

Могут ли быть параллельными две плоскости, проходящие через непараллельные прямые?

Ответ: Да.

## Упражнение 8

Можно ли признак параллельности двух плоскостей сформулировать следующим образом:

- а) если прямая одной плоскости параллельна прямой другой плоскости, то плоскости параллельны;
- б) если две прямые одной плоскости параллельны двум прямым другой плоскости, то плоскости параллельны;
- в) если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны другой плоскости, то плоскости параллельны?

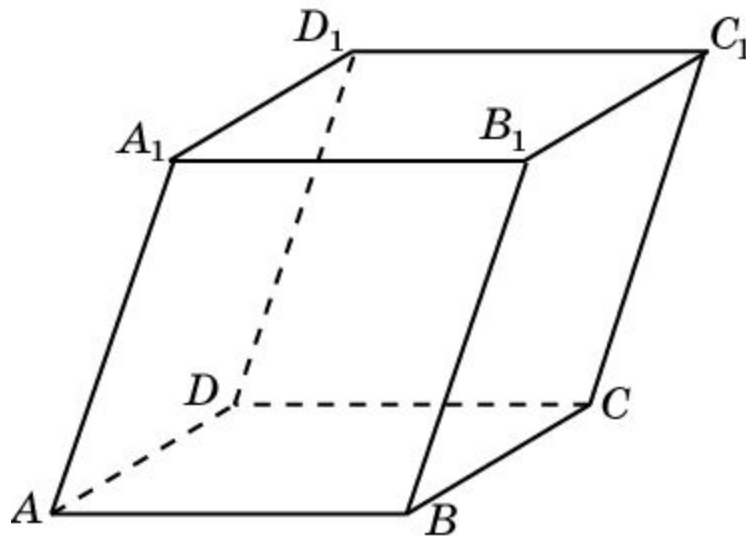
**Ответ:** а) Нет;

б) Нет;

в) да.

## Упражнение 9

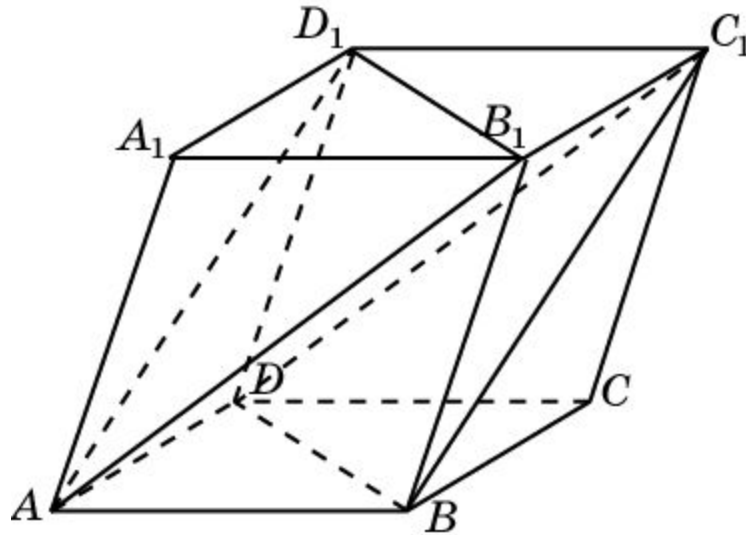
Для параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  докажите параллельность плоскостей  $ABC$  и  $A_1 B_1 C_1$ .



**Доказательство:** Прямые  $AB$  и  $AD$ , лежащие в плоскости  $ABC$ , соответственно параллельны прямым  $A_1B_1$  и  $A_1D_1$ , лежащим в плоскости  $A_1B_1C_1$ . Следовательно, плоскости  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  параллельны.

## Упражнение 10

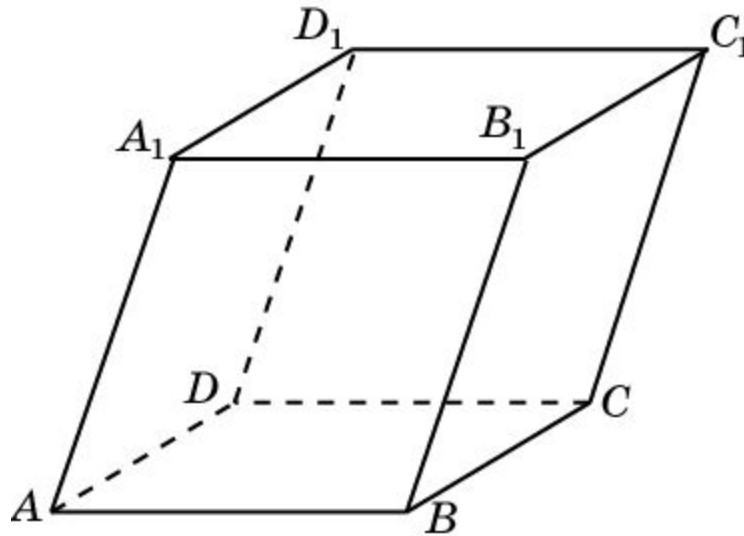
Для параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  докажите параллельность плоскостей  $AB_1 D_1$  и  $BDC_1$ .



**Доказательство:** Прямые  $AB_1$  и  $AD_1$ , лежащие в плоскости  $AB_1 D_1$ , соответственно параллельны прямым  $DC_1$  и  $BC_1$ , лежащим в плоскости  $BDC_1$ . Следовательно, плоскости  $AB_1 D_1$  и  $BDC_1$  параллельны.

# Упражнение 11

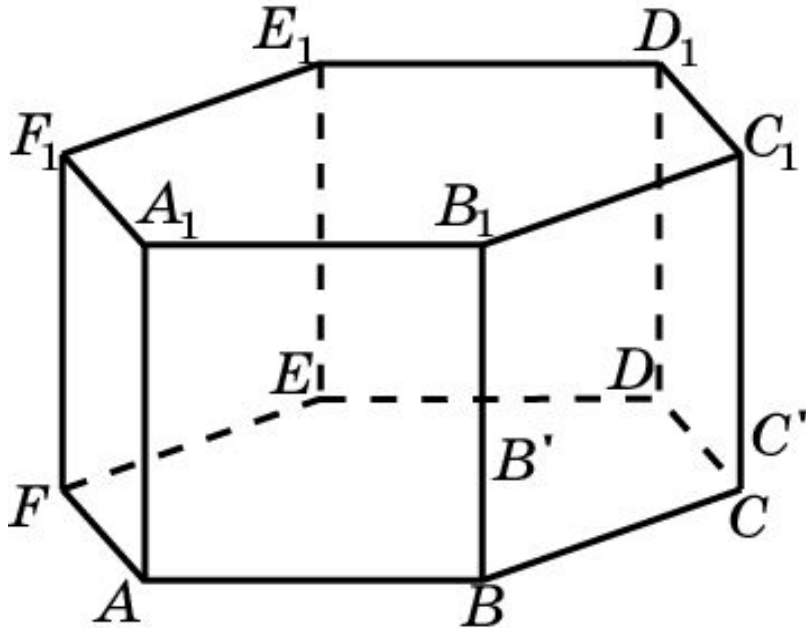
Сколько имеется пар параллельных плоскостей, содержащих грани параллелепипеда  $A...D_1$ .



**Решение:** Каждая грань участвует в одной паре параллельных плоскостей. У куба имеется 6 граней. Следовательно, искомое число пар параллельных граней равно  $\frac{6}{2} = 3$ .

## Упражнение 12

Являются ли параллельными плоскости:



а)  $ABB_1$  и  $CDD_1$ ;

б)  $ABB_1$  и  $DEE_1$ ;

в)  $ABB_1$  и  $C EE_1$ ;

г)  $ABB_1$  и  $CFF_1$ ;

д)  $ABB_1$  и  $CFE_1$ ,

проходящие через вершины правильной шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  ?

**Ответ:** а) Нет; б) да; в) нет; г) да; д) нет.