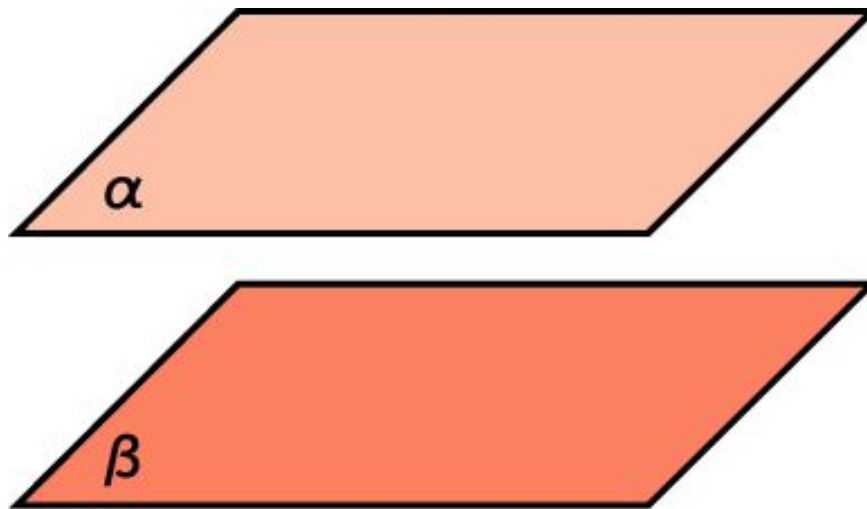


ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

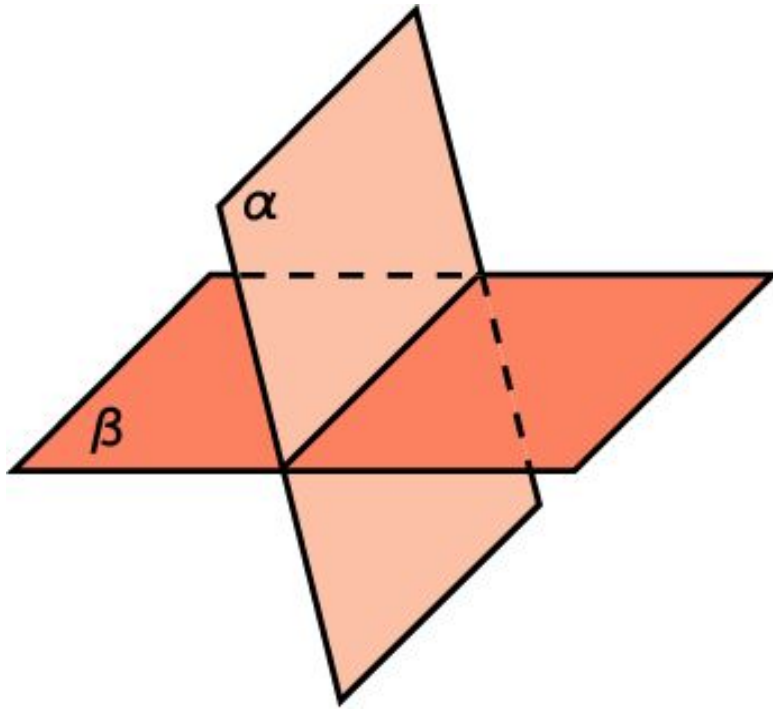
Определение. Две плоскости в пространстве называются параллельными, если они не имеют общих точек.



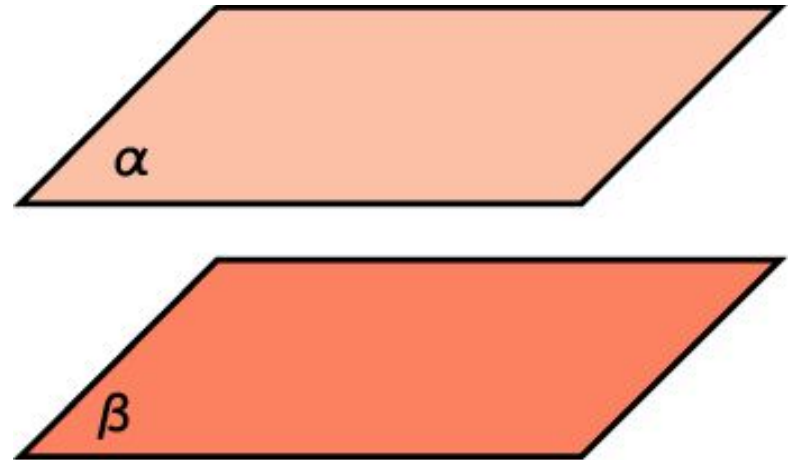
Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве

Две плоскости

Имеют общие точки
(пересекаются по прямой)

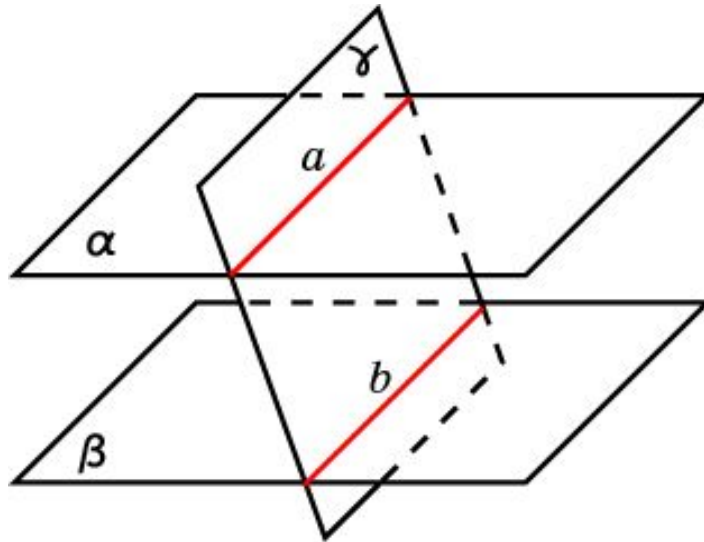


Не имеют общих точек
(параллельны)



Признак параллельности двух прямых

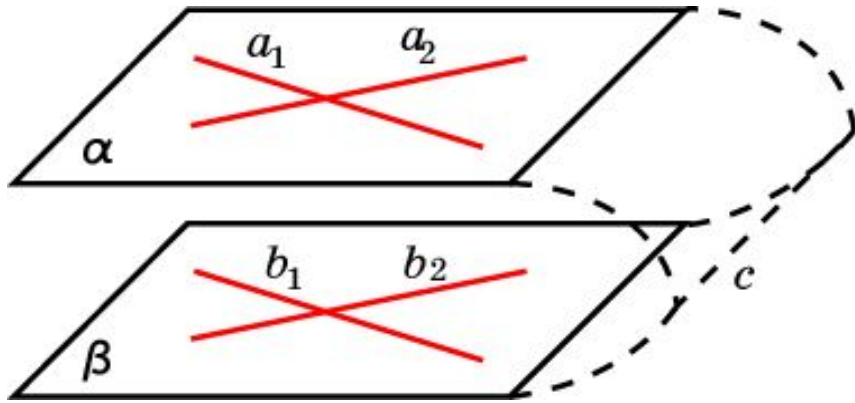
Если две параллельные плоскости пересечены третьей плоскостью, то линии их пересечения параллельны.



Доказательство. Пусть плоскость γ пересекает параллельные плоскости α и β по прямым a и b соответственно. Докажем, что прямые a и b параллельны. Действительно, они лежат в одной плоскости - плоскости γ . Кроме этого, они лежат в непересекающихся плоскостях, следовательно, и подавно, не пересекаются. Значит, они параллельны.

Признак параллельности двух плоскостей

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.



Доказательство. Пусть две пересекающиеся прямые a_1, a_2 плоскости α соответственно параллельны двум прямым b_1, b_2 плоскости β . Докажем, что плоскости α и β параллельны.

Предположим противное, т.е., что плоскости α и β пересекаются, и пусть c - линия их пересечения. По признаку параллельности прямой и плоскости, прямая a_1 параллельна плоскости β , а по свойству параллельности прямой и плоскости, она параллельна прямой c . Аналогично, прямая a_2 также параллельна прямой c . Таким образом, в плоскости α мы имеем две пересекающиеся прямые, параллельные одной прямой, что невозможно. Следовательно, плоскости α и β параллельны.

Упражнение 1

Верно ли утверждение: "Если прямая, лежащая в одной плоскости, параллельна прямой, лежащей в другой плоскости, то эти плоскости параллельны"?

Ответ: Нет.

Упражнение 2

Верно ли утверждение: "Если две прямые, лежащие в одной плоскости, параллельны двум прямым, лежащим в другой плоскости, то эти плоскости параллельны"?

Ответ: Нет.

Упражнение 3

Могут ли быть параллельными две плоскости, проходящие через непараллельные прямые?

Ответ: Да.

Упражнение 4

Могут ли пересекаться плоскости, параллельные одной и той же прямой?

Ответ: Да.

Упражнение 5

Через каждую из двух параллельных прямых проведена плоскость. Можно ли утверждать, что эти плоскости параллельны?

Ответ: Нет.

Упражнение 6

Могут ли пересекаться плоскости, параллельные одной и той же прямой?

Ответ: Да.

Упражнение 7

Могут ли быть параллельными две плоскости, проходящие через непараллельные прямые?

Ответ: Да.

Упражнение 8

Можно ли признак параллельности двух плоскостей сформулировать следующим образом:

а) если прямая одной плоскости параллельна прямой другой плоскости, то плоскости параллельны;

б) если две прямые одной плоскости параллельны двум прямым другой плоскости, то плоскости параллельны;

в) если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны другой плоскости, то плоскости параллельны?

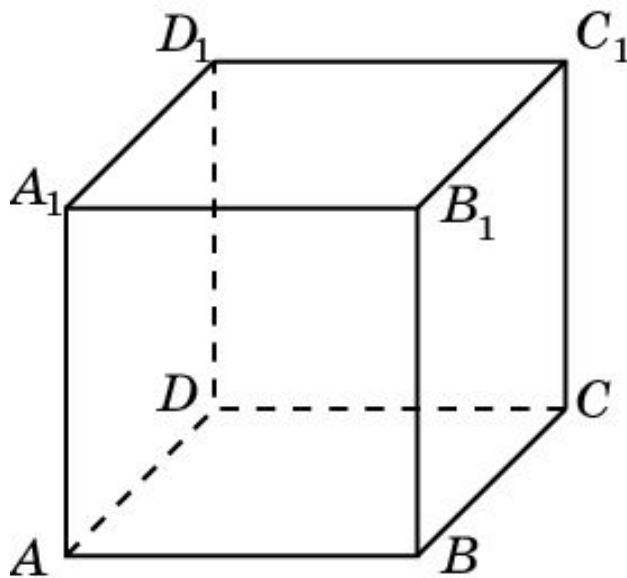
Ответ: а) Нет;

б) Нет;

в) да.

Упражнение 9

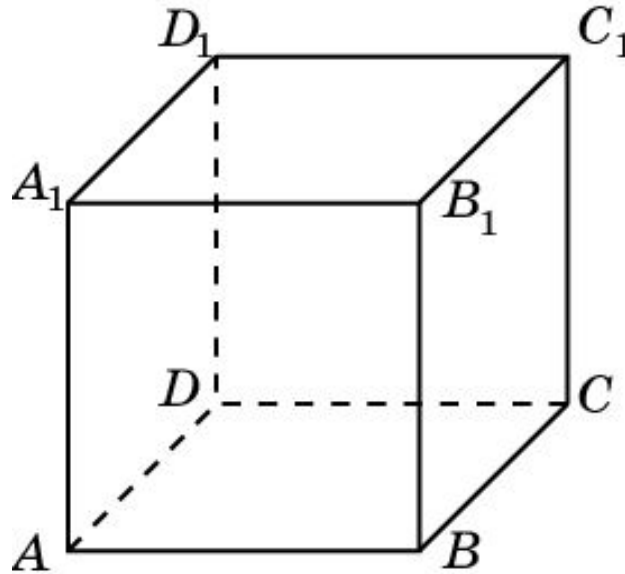
Для куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ докажите параллельность плоскостей ABC и $A_1 B_1 C_1$.



Доказательство: Прямые AB и AD , лежащие в плоскости ABC , соответственно параллельны прямым $A_1 B_1$ и $A_1 D_1$, лежащим в плоскости $A_1 B_1 C_1$. Следовательно, плоскости ABC и $A_1 B_1 C_1$ параллельны.

Упражнение 10

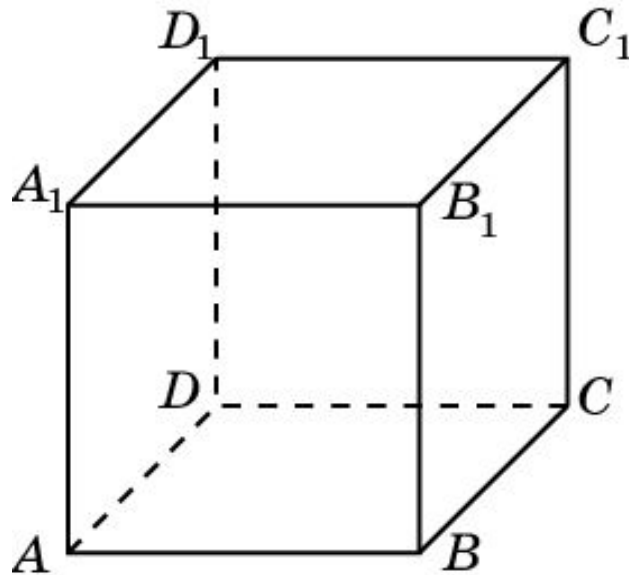
Для куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ докажите параллельность плоскостей $AB_1 D_1$ и BDC_1 .



Доказательство: Прямые AB_1 и AD_1 , лежащие в плоскости $AB_1 D_1$, соответственно параллельны прямым DC_1 и BC_1 , лежащим в плоскости BDC_1 . Следовательно, плоскости $AB_1 D_1$ и BDC_1 параллельны.

Упражнение 11

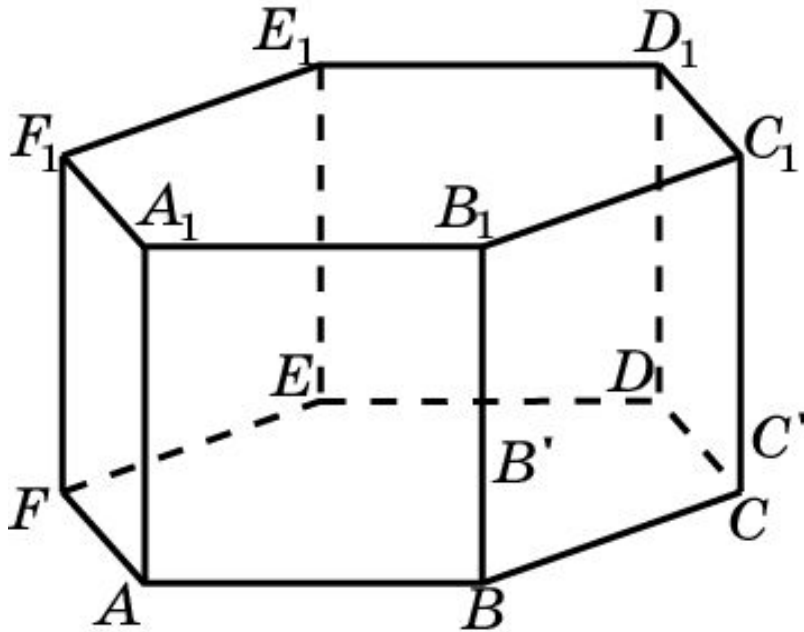
Сколько имеется пар параллельных плоскостей, содержащих грани куба $A...D_1$.



Решение: Каждая грань участвует в одной паре параллельных плоскостей. У куба имеется 6 граней. Следовательно, искомое число пар параллельных граней равно $\frac{6}{2} = 3$.

Упражнение 12

Являются ли параллельными плоскости:



а) ABB_1 и CDD_1 ;

б) ABB_1 и DEE_1 ;

в) ABB_1 и $C EE_1$;

г) ABB_1 и CFF_1 ;

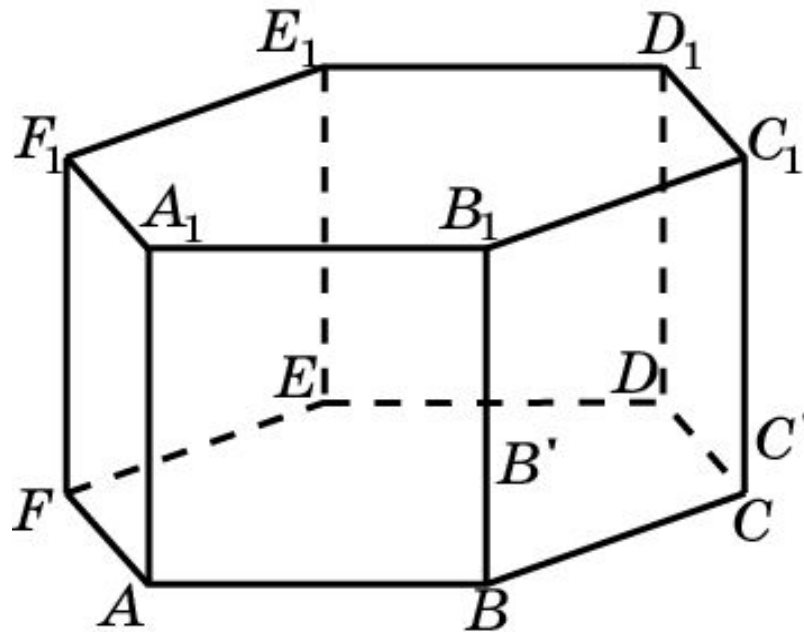
д) ABB_1 и CFE_1 ,

проходящие через вершины правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$?

Ответ: а) Нет; б) да; в) нет; г) да; д) нет.

Упражнение 13

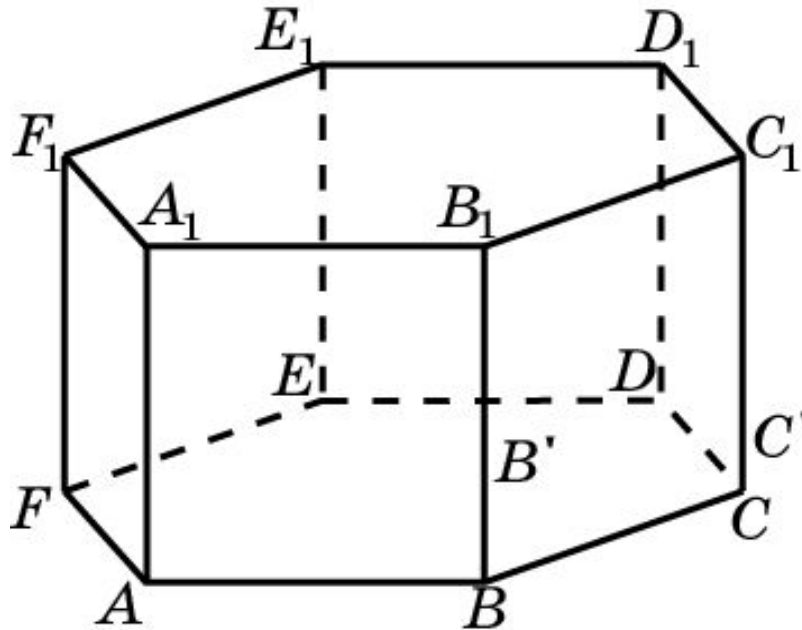
Докажите, что для правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ плоскости ABB_1 и DEE_1 параллельны.



Доказательство: Прямые AB и AA_1 , лежащие в плоскости ABB_1 , соответственно параллельны прямым DE_1 и EE_1 , лежащим в плоскости DEE_1 . Следовательно, плоскости ABB_1 и DEE_1 параллельны.

Упражнение 14

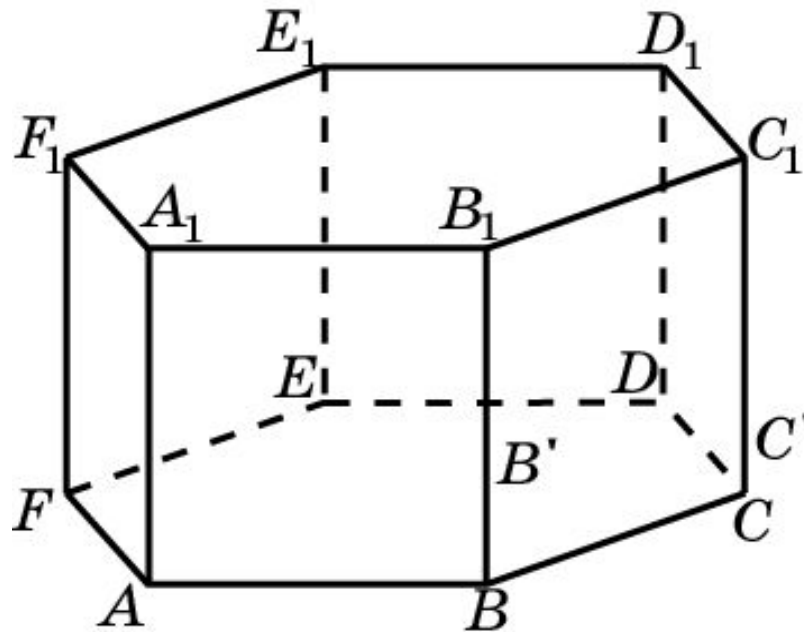
Докажите, что для правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ плоскости $AB_1 F_1$ и $CE D_1$ параллельны.



Доказательство: Прямые AB_1 и AF_1 , лежащие в плоскости $AB_1 F_1$, соответственно параллельны прямым ED_1 и CD_1 , лежащим в плоскости $CE D_1$. Следовательно, плоскости $AB_1 F_1$ и $CE D_1$ параллельны.

Упражнение 15

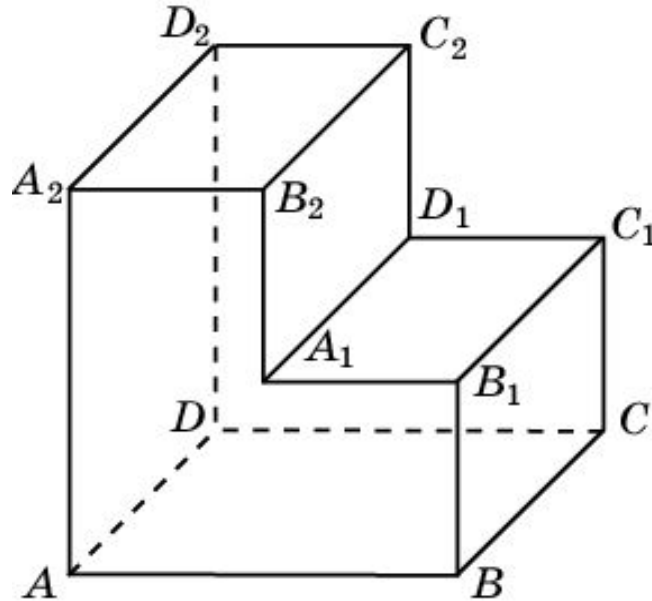
Докажите, что для правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ плоскости $AC_1 E_1$ и BFD_1 параллельны.



Доказательство: Прямые AC_1 и AE_1 , лежащие в плоскости $AC_1 E_1$, соответственно параллельны прямым FD_1 и BD_1 , лежащим в плоскости BFD_1 . Следовательно, плоскости $AC_1 E_1$ и BFD_1 параллельны.

Упражнение 16

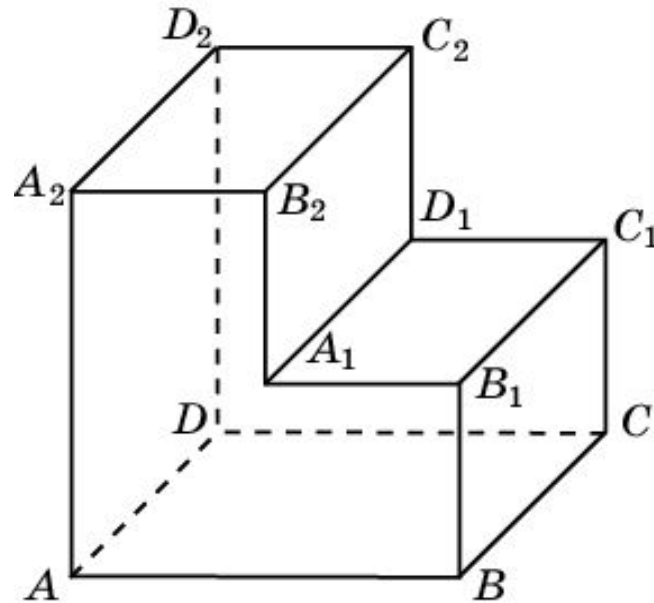
Назовите плоскости, проходящие через вершины многогранника, изображенного на рисунке, все плоские углы которого прямые, параллельные плоскости ABC .



Ответ. $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$.

Упражнение 17

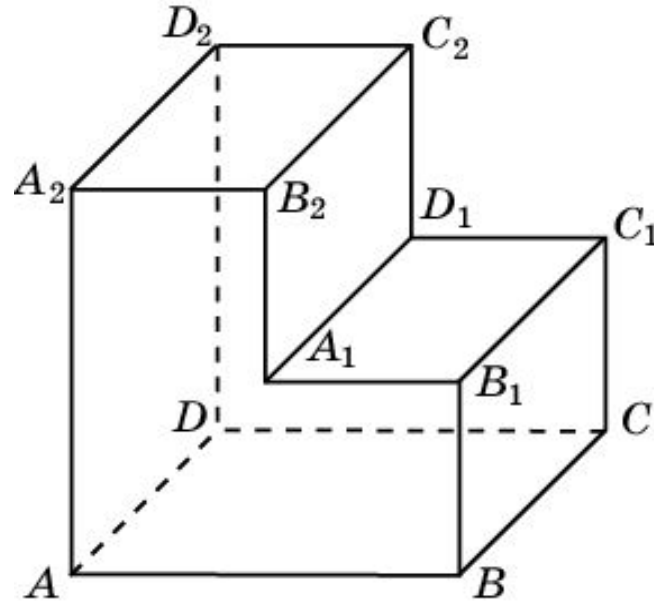
Для многогранника, изображенного на рисунке, все плоские углы которого прямые, докажите, что плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны.



Доказательство: Прямые AB и BC , лежащие в плоскости ABC , соответственно параллельны прямым A_1B_1 и B_1C_1 , лежащим в плоскости $A_1B_1C_1$. Следовательно, плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны.

Упражнение 18

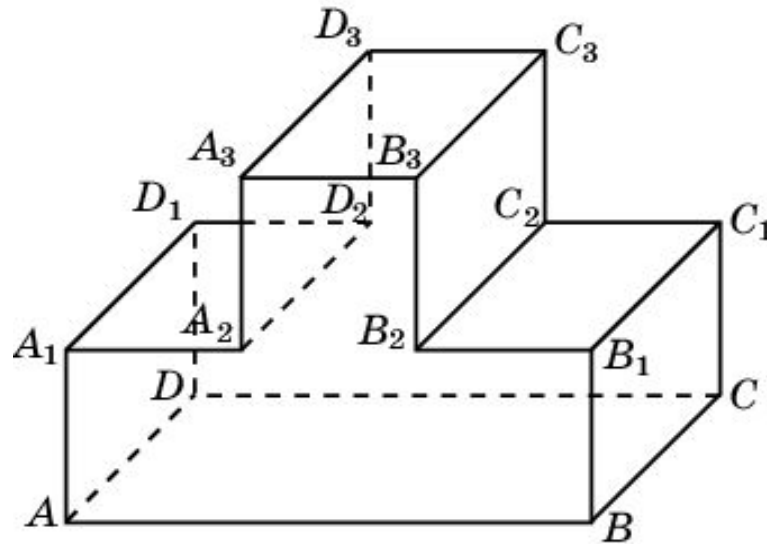
Для многогранника, изображенного на рисунке, все плоские углы которого прямые, докажите, что плоскости ADD_2 и $A_1D_1C_2$ параллельны.



Доказательство: Прямые AA_2 и A_2C_2 , лежащие в плоскости ADD_2 , соответственно параллельны прямым A_1B_2 и B_2C_2 , лежащим в плоскости $A_1D_1C_2$. Следовательно, плоскости ADD_2 и $A_1D_1C_2$ параллельны.

Упражнение 19

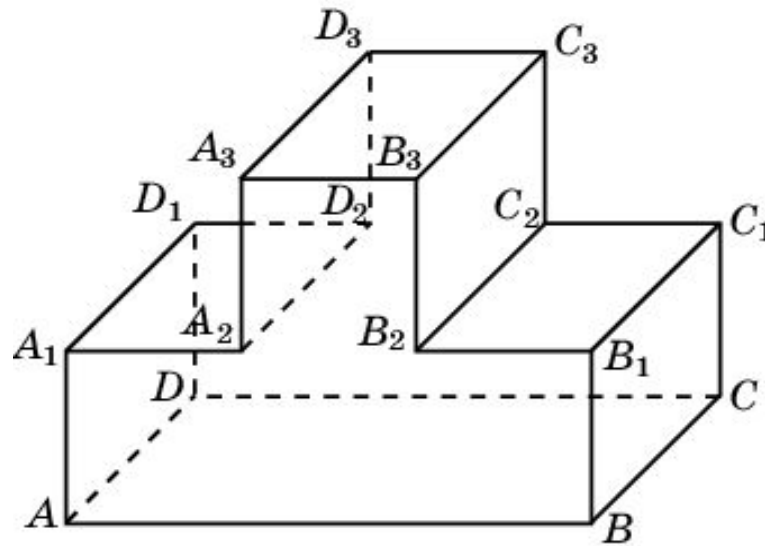
Назовите плоскости, проходящие через вершины многогранника, изображенного на рисунке, все плоские углы которого прямые, параллельные плоскости ADD_1 .



Ответ. BCC_1 , $B_2C_2C_3$, $A_2D_2D_3$.

Упражнение 20

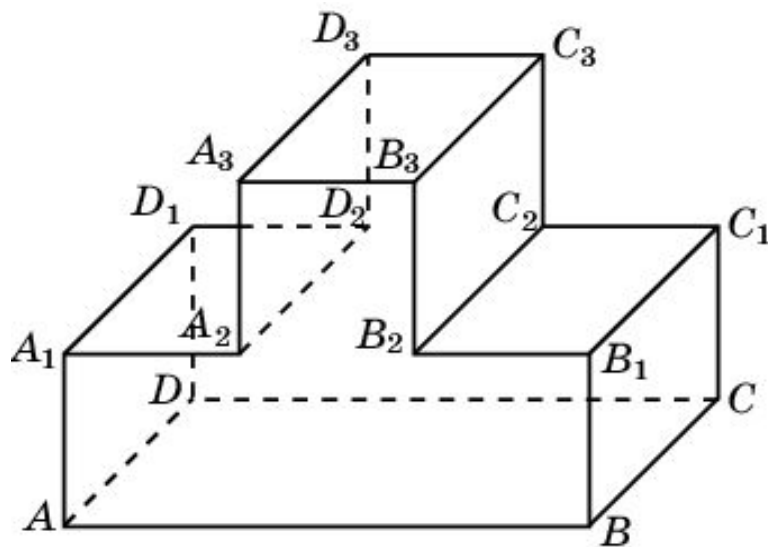
Для многогранника, изображенного на рисунке, все плоские углы которого прямые, докажите, что плоскости ADD_1 и BCC_1 параллельны.



Доказательство: Прямые AD и AA_1 , лежащие в плоскости ADD_1 , соответственно параллельны прямым BC и BB_1 , лежащим в плоскости BCC_1 . Следовательно, плоскости ADD_1 и BCC_1 параллельны.

Упражнение 21

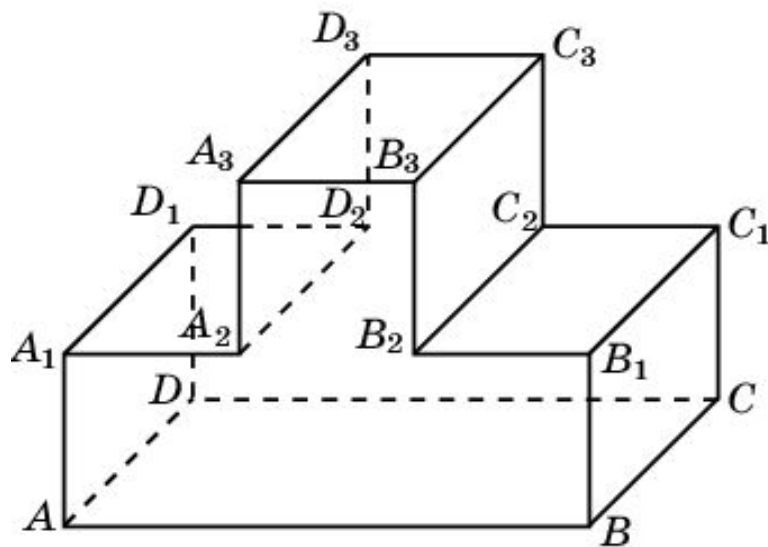
Для многогранника, изображенного на рисунке, все плоские углы которого прямые, докажите, что плоскости ADD_1 и $B_2C_2C_3$ параллельны.



Доказательство: Прямые AD и AA_1 , лежащие в плоскости ADD_1 , соответственно параллельны прямым B_2C_2 и B_2B_3 , лежащим в плоскости $B_2C_2C_3$. Следовательно, плоскости ADD_1 и $B_2C_2C_3$ параллельны.

Упражнение 22

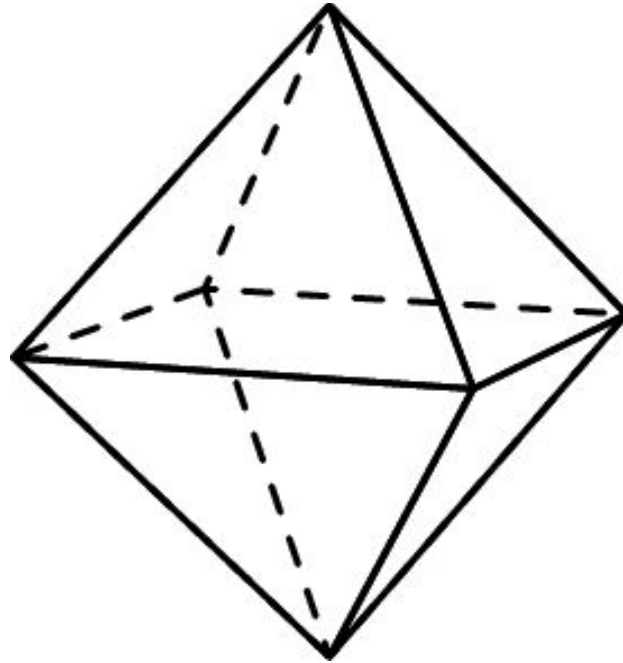
Для многогранника, изображенного на рисунке, все плоские углы которого прямые, докажите, что плоскости ABC и $A_3B_3C_3$ параллельны.



Доказательство: Прямые AB и BC , лежащие в плоскости ABC , соответственно параллельны прямым A_3B_3 и B_3C_3 , лежащим в плоскости $A_3B_3C_3$. Следовательно, плоскости ABC и $A_3B_3C_3$ параллельны.

Упражнение 23

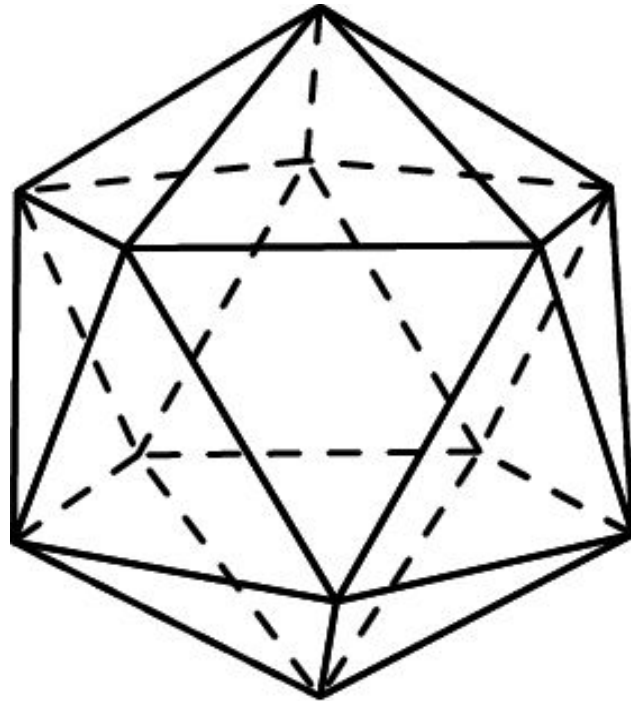
Сколько имеется пар параллельных плоскостей, содержащих грани октаэдра.



Решение: Для каждой грани имеется только одна грань, ей параллельная. У октаэдра 8 граней. Следовательно, искомое число пар параллельных граней равно $\frac{8}{2} = 4$.

Упражнение 24

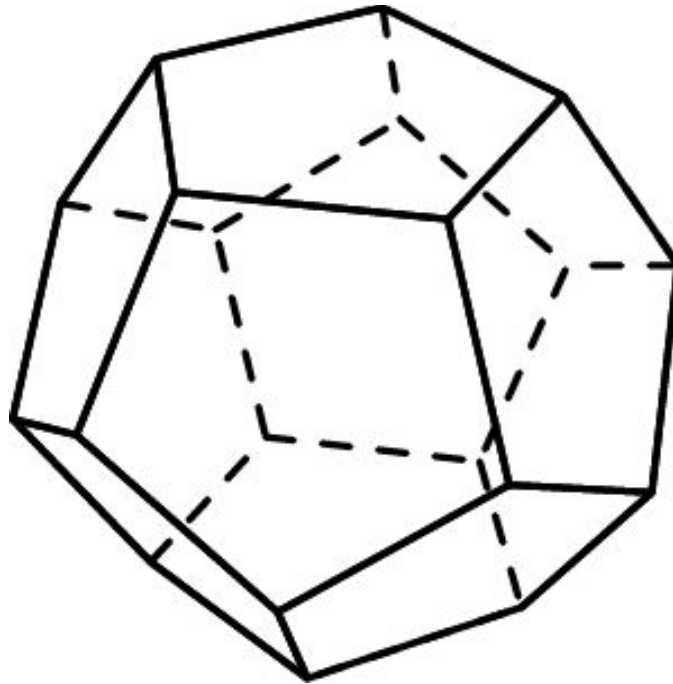
Сколько имеется пар параллельных плоскостей, содержащих грани икосаэдра.



Решение: Для каждой грани имеется только одна грань, ей параллельная. У икосаэдра 20 граней. Следовательно, искомое число пар параллельных граней равно $\frac{20}{2} = 10$.

Упражнение 25

Сколько имеется пар параллельных плоскостей, содержащих грани додекаэдра.



Решение: Для каждой грани имеется только одна грань, ей параллельная. У додекаэдра 12 граней. Следовательно, искомое число пар параллельных граней равно $\frac{12}{2} = 6$.