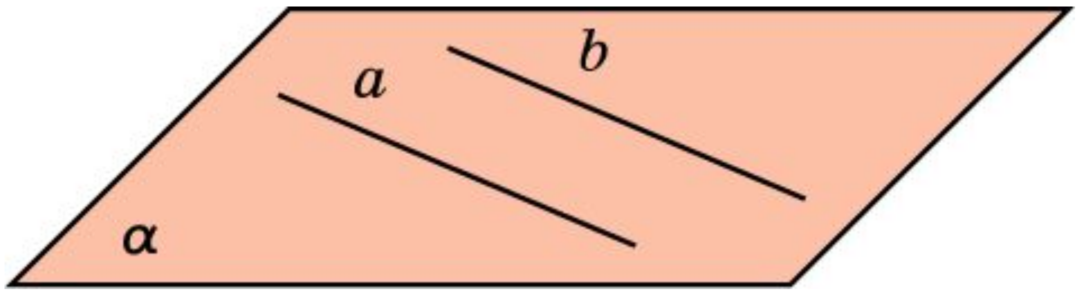
Параллельность прямых

Определение. Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.



Для отношения параллельности прямых в пространстве имеет место следующее свойство транзитивности:

Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны между собой.

Упражнение 1

Всегда ли две не пересекающиеся прямые в пространстве параллельны?

Ответ: Нет.

Упражнение 2

Сколько плоскостей можно провести через две параллельные прямые?

Ответ: Одну.

Упражнение 3

Известно, что в плоскости прямая, пересекающая одну из параллельных прямых, пересекает и вторую прямую. Будет ли это утверждение верно для пространства?

Ответ: Нет.

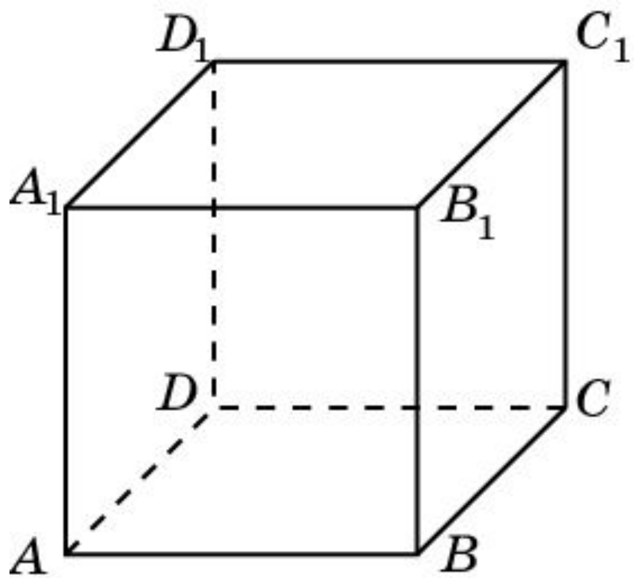
Упражнение 4

Найдите геометрическое место (ГМ) прямых, пересекающих две данные параллельные прямые.

Ответ: Плоскость.

Упражнение 5

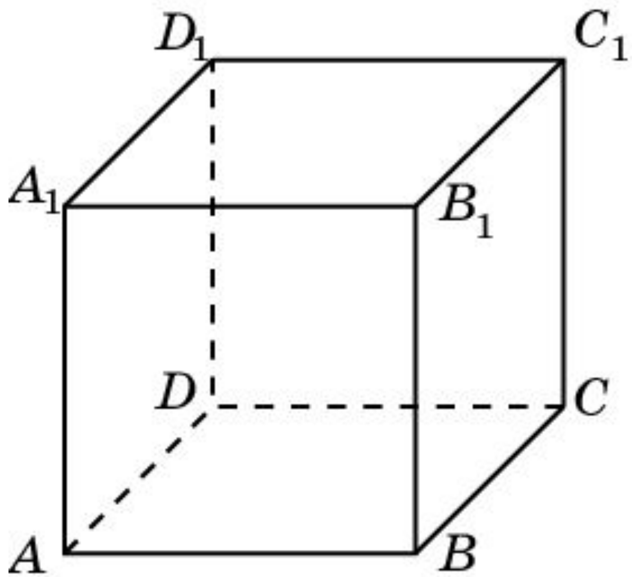
Назовите прямые, проходящие через вершины куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и параллельные прямой AB.



Ответ: A_1B_1; CD; C_1D_1.

Упражнение 6

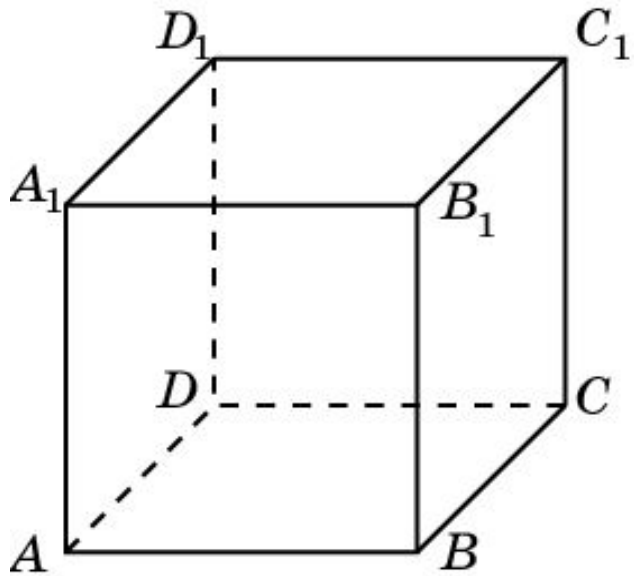
Докажите, что прямые AB и C_1D_1, проходящие через вершины куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, параллельны.



Доказательство: Прямые AB и C_1D_1 параллельны прямой CD, так как грани $ABCD$ и CDD_1C_1 – квадраты. Из транзитивности отношения параллельности следует, что прямые AB и C_1D_1 параллельны.

Упражнение 7

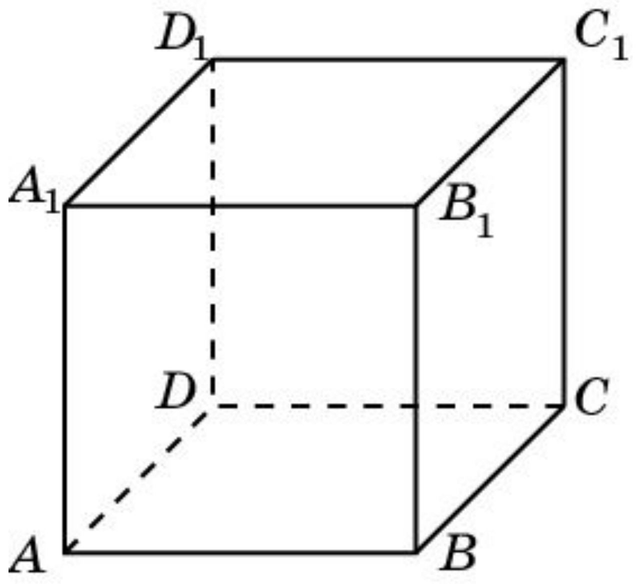
Докажите, что прямые AD_1 и BC_1, проходящие через вершины куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, параллельны.



Доказательство: Прямые AB и C_1D_1 параллельны (упражнение 6). Следовательно, четырехугольник ABC_1D_1 – параллелограмм (противоположные стороны AB и C_1D_1 равны и параллельны). Значит, прямые AD_1 и BC_1 параллельны.

Упражнение 8

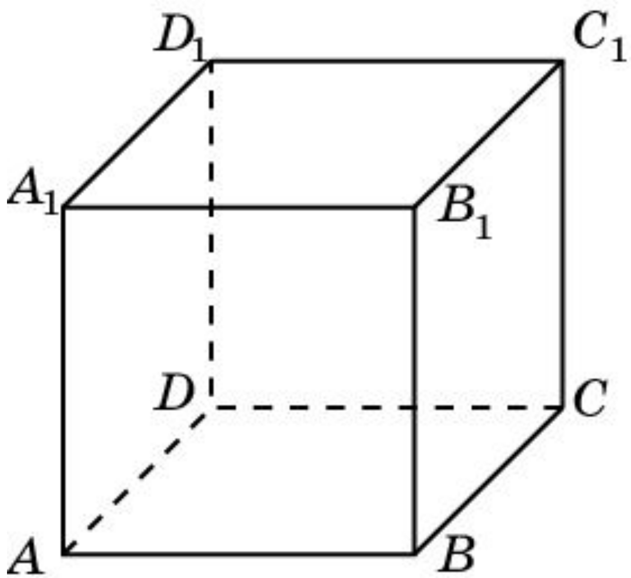
Являются ли параллельными прямые AB и CC_1, проходящие через вершины куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$?



Ответ: Нет.

Упражнение 9

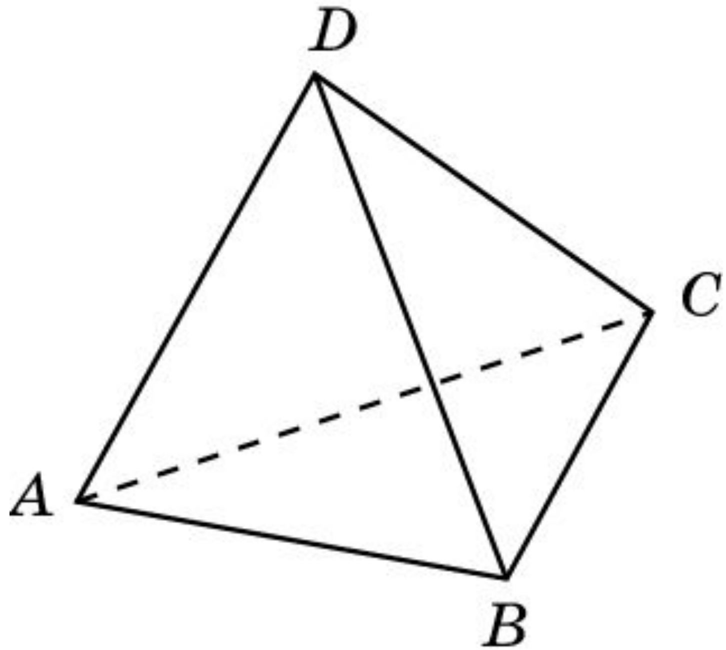
Сколько имеется пар параллельных прямых, содержащих ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.



Решение: Каждое ребро участвует в трех парах параллельных прямых. У куба имеется 12 ребер. Следовательно, искомое число пар параллельных прямых равно $\dfrac{12 \cdot 3}{2} = 18.$

Упражнение 10

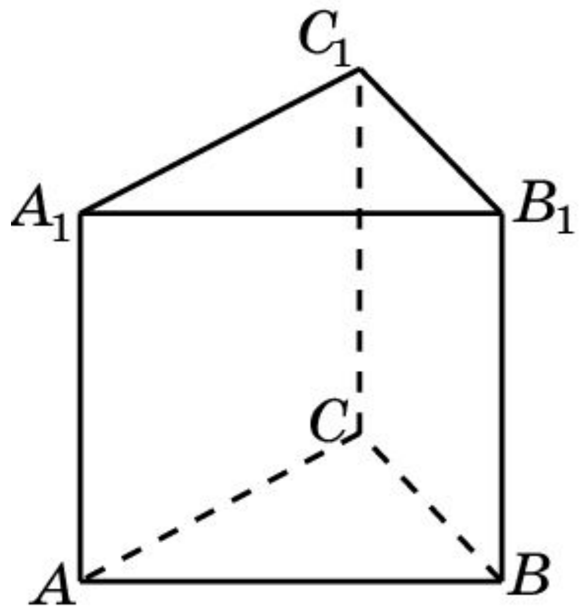
Являются ли параллельными прямые AB и CD, проходящие через вершины тетраэдра $ABCD$?



Ответ: Нет.

Упражнение 11

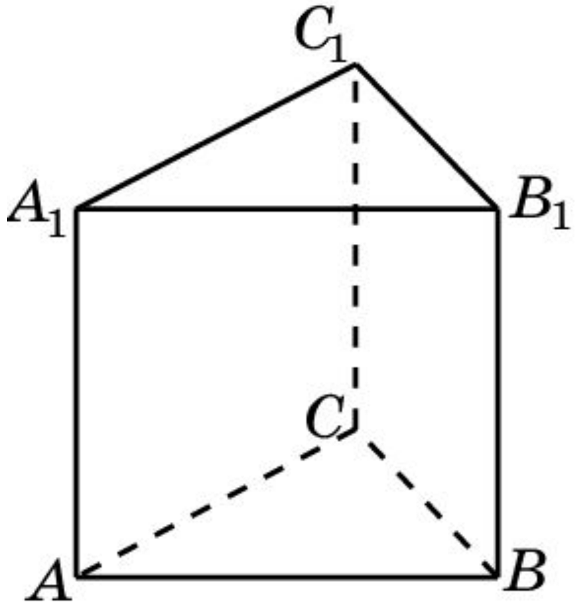
Назовите прямые, проходящие через вершины треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ и параллельные прямой A_1B_1.



Ответ: BB_1, CC_1.

Упражнение 12

Сколько имеется пар параллельных прямых, содержащих ребра правильной треугольной призмы?

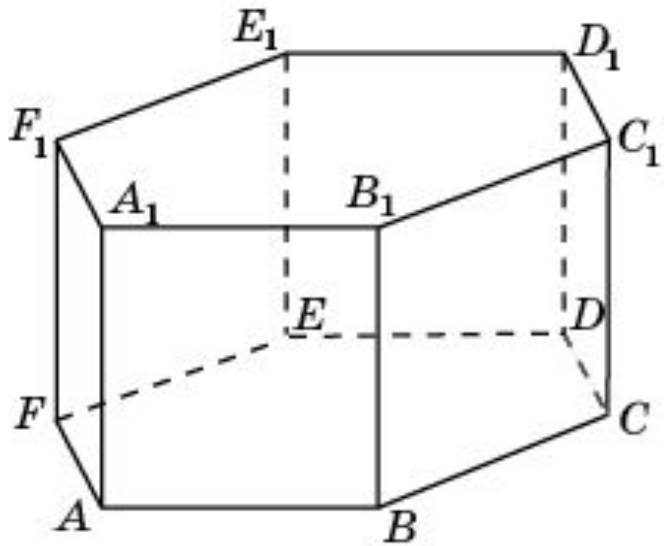


Решение: Каждое ребро оснований участвует в одной паре параллельных прямых. Каждое боковое ребро участвует в двух парах параллельных прямых. Следовательно, искомое число пар параллельных прямых равно $\frac{6}{2}+\frac{3\cdot 2}{2}=6.$

Ответ: $\frac{6}{2}+\frac{3\cdot 2}{2}=6.$

Упражнение 13

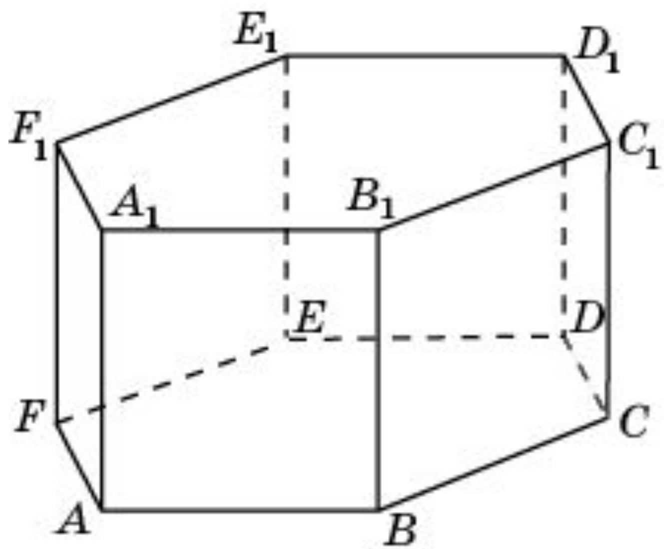
Назовите прямые, проходящие через вершины правильной шестиугольной призмы, параллельные прямой AA_1.



Ответ: BB_1; CC_1; DD_1; EE_1; FF_1.

Упражнение 14

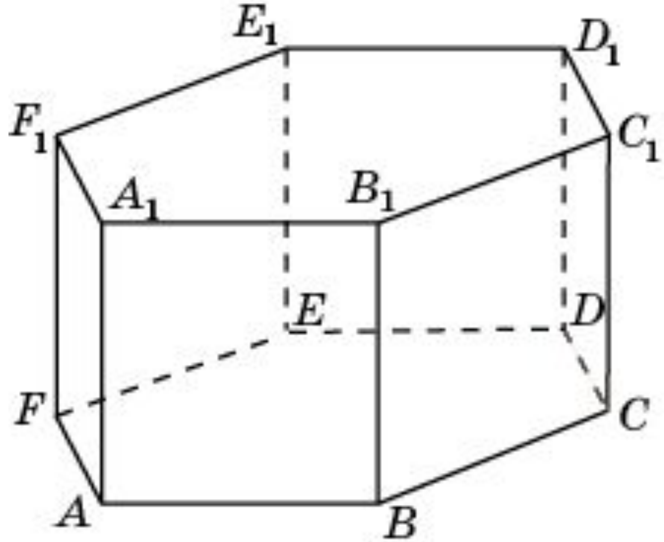
Докажите, что прямые AA_1 и CC_1, проходящие через вершины правильной шестиугольной призмы, параллельны.



Доказательство: Прямые AA_1 и CC_1 параллельны прямой BB_1, так как грани ABB_1A_1 и BCC_1B_1 – прямоугольники. Из транзитивности отношения параллельности следует, что прямые AA_1 и CC_1 параллельны.

Упражнение 15

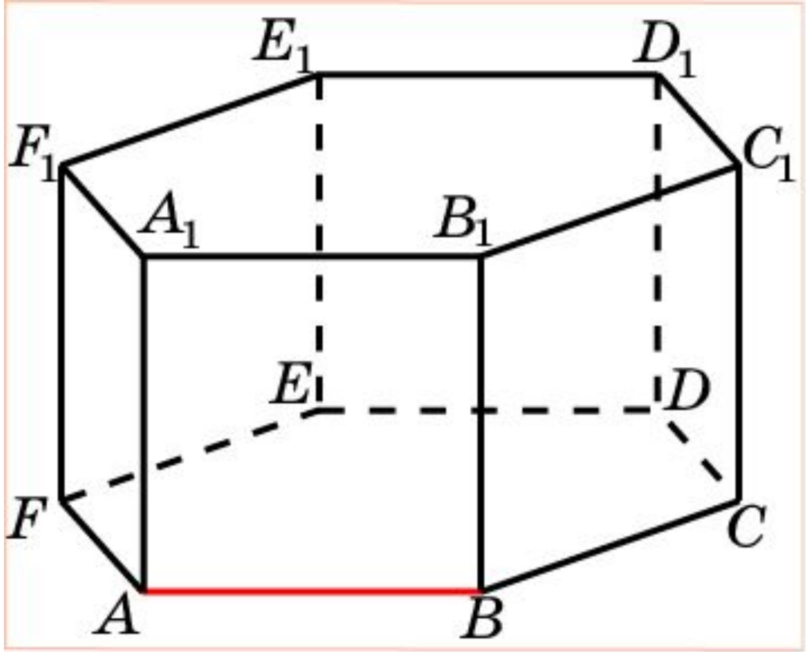
Докажите, что прямые AA_1 и DD_1, проходящие через вершины правильной шестиугольной призмы, параллельны.



Доказательство: Прямые AA_1 и CC_1 параллельны (задача 14). Прямые CC_1 и DD_1 параллельны, так как грань CDD_1C_1 – прямоугольник. Из транзитивности отношения параллельности следует, что прямые AA_1 и DD_1 параллельны.

Упражнение 16

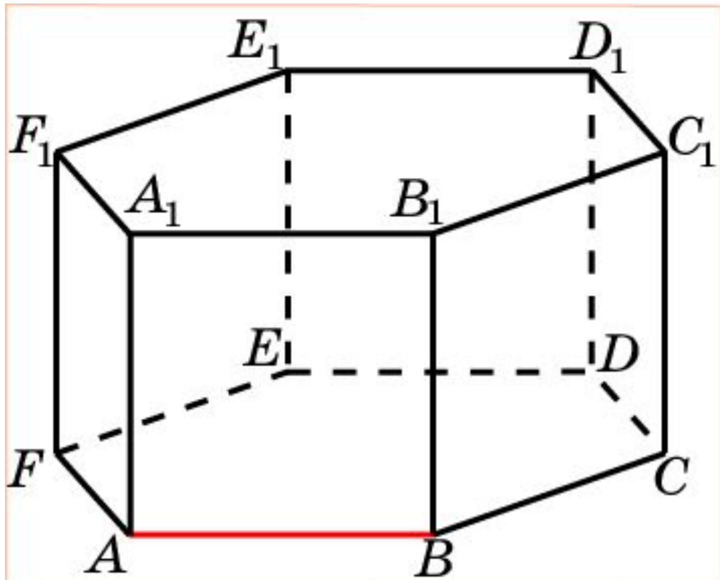
Назовите прямые, проходящие через вершины правильной шестиугольной призмы, параллельные прямой AB.



Ответ: A_1B_1; DE; D_1E_1; CF; C_1F_1.

Упражнение 17

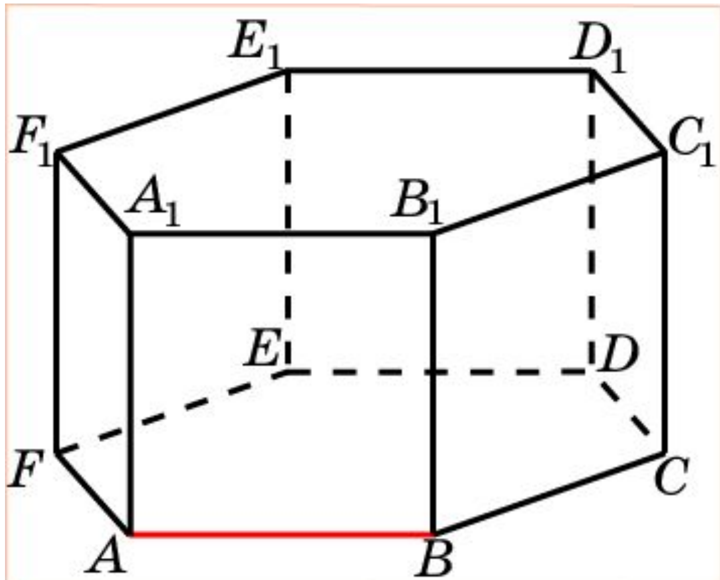
Докажите, что прямые AB и D_1E_1, проходящие через вершины правильной шестиугольной призмы, параллельны.



Доказательство: Прямые AB и DE параллельны, так как грань $ABCDEF$ – правильный шестиугольник. Прямые D_1E_1 и DE параллельны, так как грань DEE_1D_1 – прямоугольник. Из транзитивности отношения параллельности следует, что прямые AB и D_1E_1 параллельны.

Упражнение 18

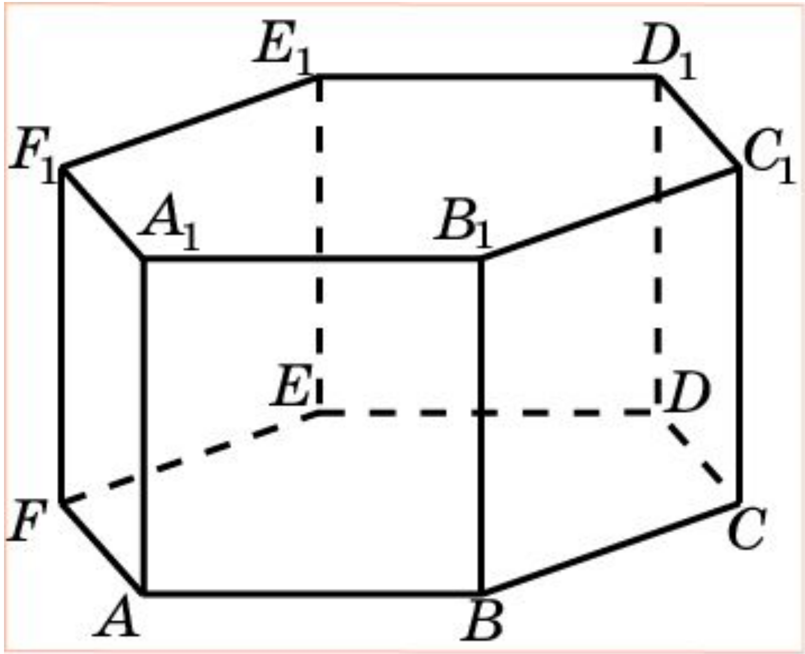
Докажите, что прямые AB и C_1F_1, проходящие через вершины правильной шестиугольной призмы, параллельны.



Доказательство: Прямые AB и A_1B_1 параллельны, так как грань ABB_1A_1 – прямоугольник. Прямые C_1F_1 и A_1B_1 параллельны, так как грань $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – правильный шестиугольник. Из транзитивности отношения параллельности следует, что прямые AB и C_1F_1 параллельны.

Упражнение 19

Сколько имеется пар параллельных прямых, содержащих ребра правильной шестиугольной призмы.

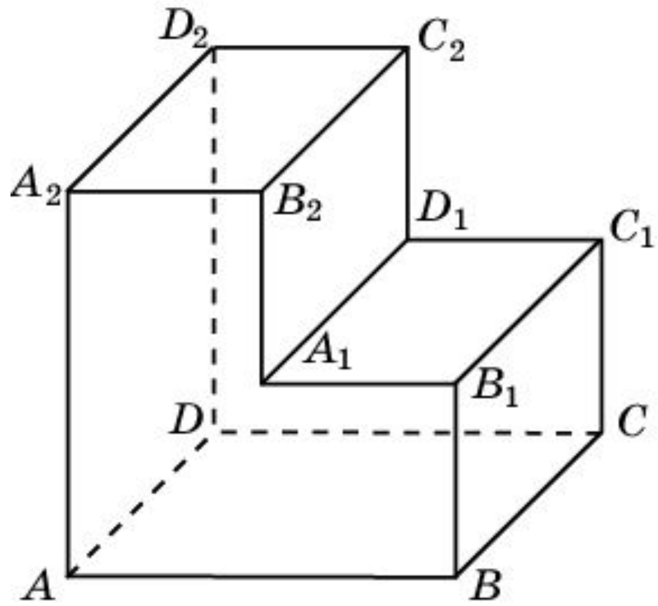


Решение: Каждое ребро оснований участвует в трех парах параллельных прямых. Каждое боковое ребро участвует в пяти парах параллельных прямых. Следовательно, искомое число пар параллельных прямых равно $\frac{12 \cdot 3}{2} + \frac{6 \cdot 5}{2} = 33.$

Ответ: $\frac{12 \cdot 3}{2} + \frac{6 \cdot 5}{2} = 33.$

Упражнение 20

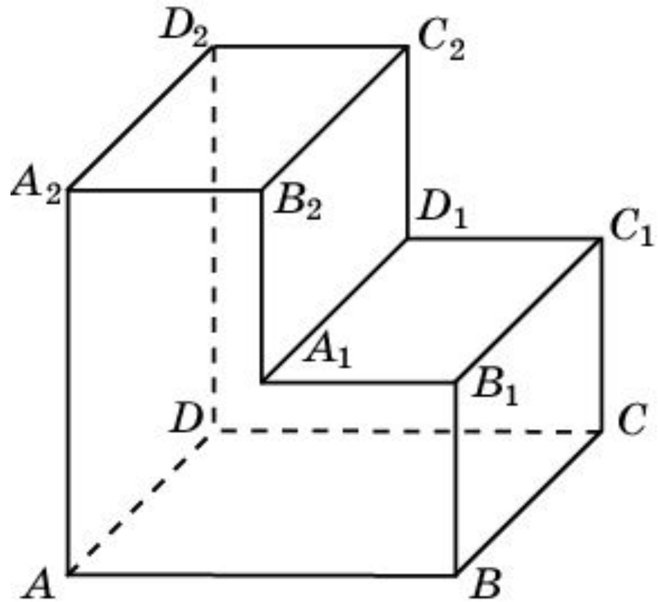
Назовите прямые, проходящие через вершины многогранника, изображенного на рисунке, все плоские углы которого прямые, параллельные прямой AA_2.



Ответ. BB_1, CC_1, DD_2, A_1B_2, D_1C_2.

Упражнение 21

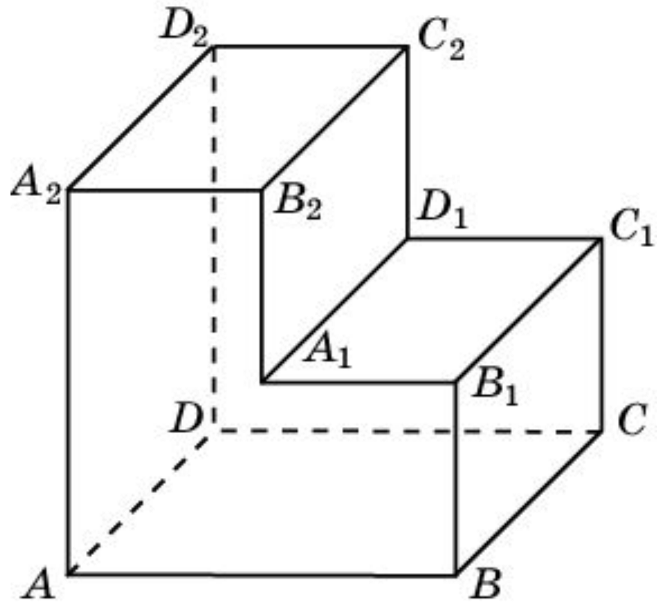
Докажите, что прямые AA_2 и CC_1, проходящие через вершины многогранника, изображенного на рисунке, все плоские углы которого прямые, параллельны.



Доказательство: Прямые AA_2 и CC_1 параллельны прямой BB_1. Из транзитивности отношения параллельности следует, что прямые AA_2 и CC_1 параллельны.

Упражнение 22

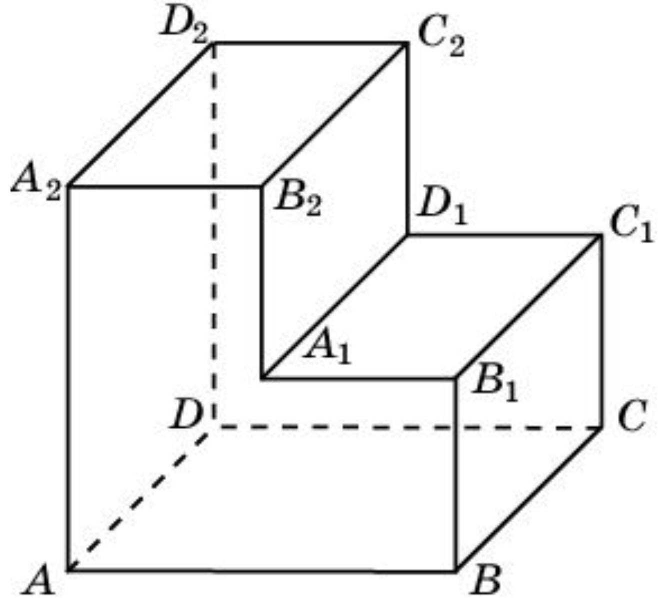
Докажите, что прямые AA_2 и D_1C_2, проходящие через вершины многогранника, изображенного на рисунке, все плоские углы которого прямые, параллельны.



Доказательство: Прямые AA_2 и D_1C_2 параллельны прямой DD_2. Из транзитивности отношения параллельности следует, что прямые AA_2 и D_1C_2 параллельны.

Упражнение 23

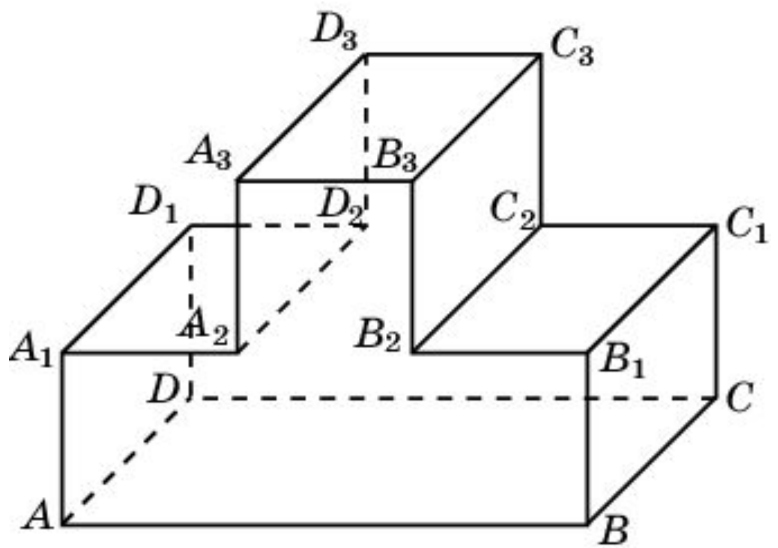
Докажите, что прямые AD и B_1C_1, проходящие через вершины многогранника, изображенного на рисунке, все плоские углы которого прямые, параллельны.



Доказательство: Прямые AD и B_1C_1 параллельны прямой BC. Из транзитивности отношения параллельности следует, что прямые AD и B_1C_1 параллельны.

Упражнение 24

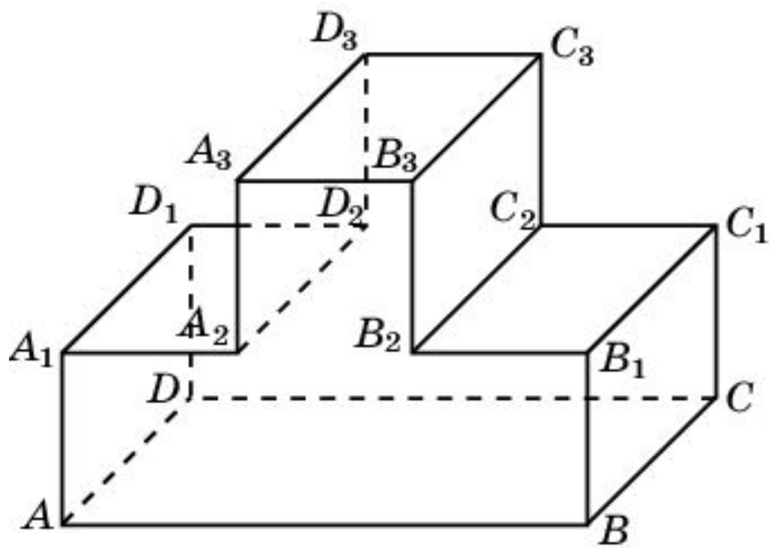
Назовите прямые, проходящие через вершины многогранника, изображенного на рисунке, все плоские углы которого прямые, параллельные прямой AB.



Ответ. DC, A_1A_2, B_1B_2, D_1D_2, C_1C_2, A_3B_3, C_3D_3.

Упражнение 25

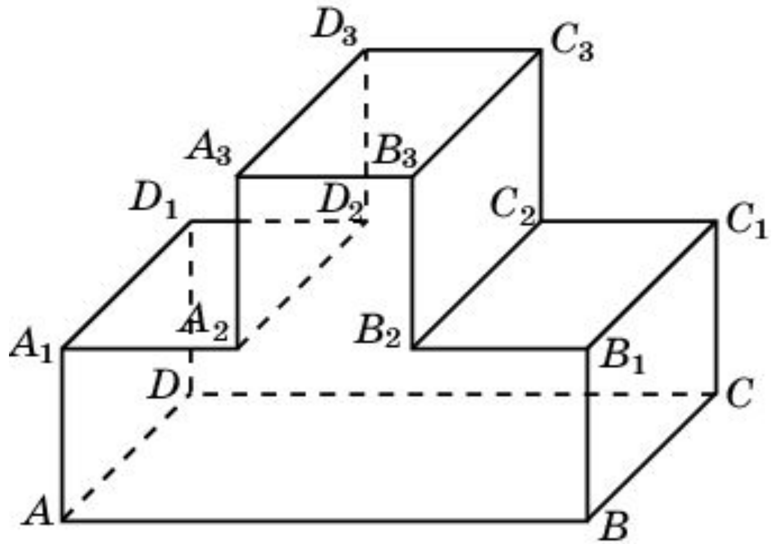
Докажите, что прямые AB и C_1C_2, проходящие через вершины многогранника, изображенного на рисунке, все плоские углы которого прямые, параллельны.



Доказательство: Прямые AB и C_1C_2 параллельны прямой CD. Из транзитивности отношения параллельности следует, что прямые AB и C_1C_2 параллельны.

Упражнение 26

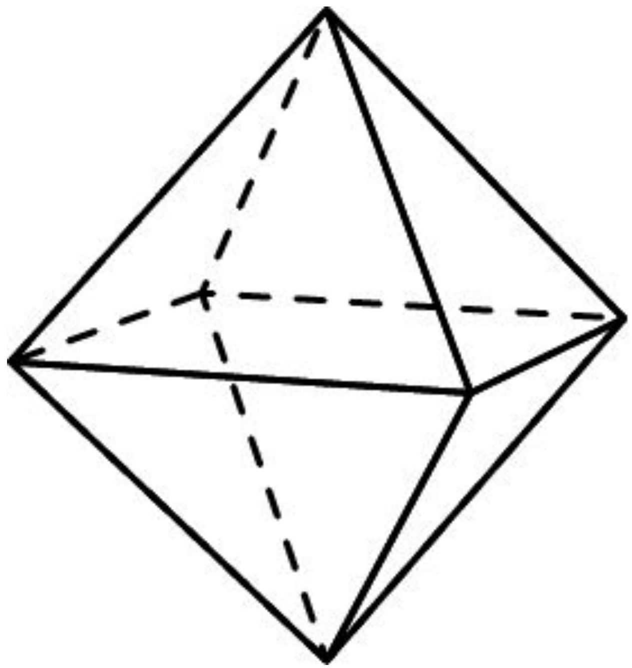
Докажите, что прямые AB и C_3D_3, проходящие через вершины многогранника, изображенного на рисунке, все плоские углы которого прямые, параллельны.



Доказательство: Прямые AB и C_3D_3 параллельны прямой CD. Из транзитивности отношения параллельности следует, что прямые AB и C_3D_3 параллельны.

Упражнение 27*

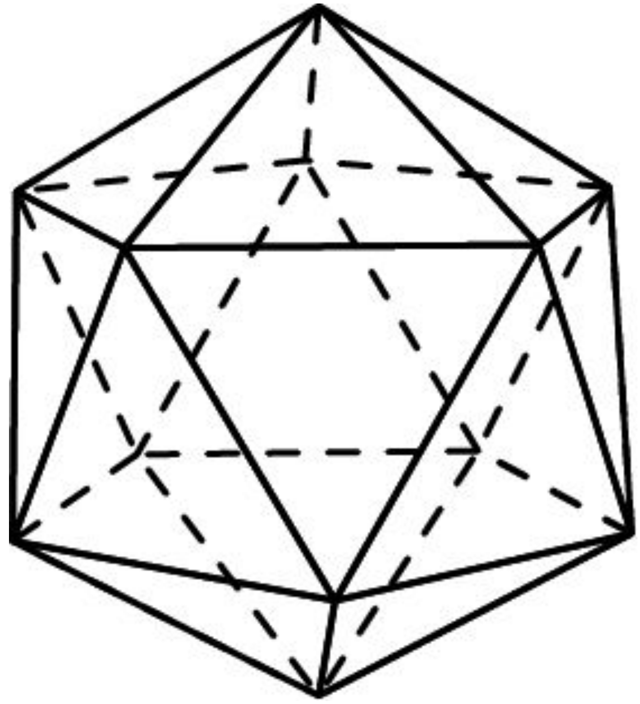
Сколько имеется пар параллельных прямых, содержащих ребра октаэдра.



Решение: Для каждого ребра имеется только одно ребро, ему параллельное. У октаэдра 12 ребер. Следовательно, искомое число пар параллельных прямых равно $\frac{12}{2} = 6.$

Упражнение 28*

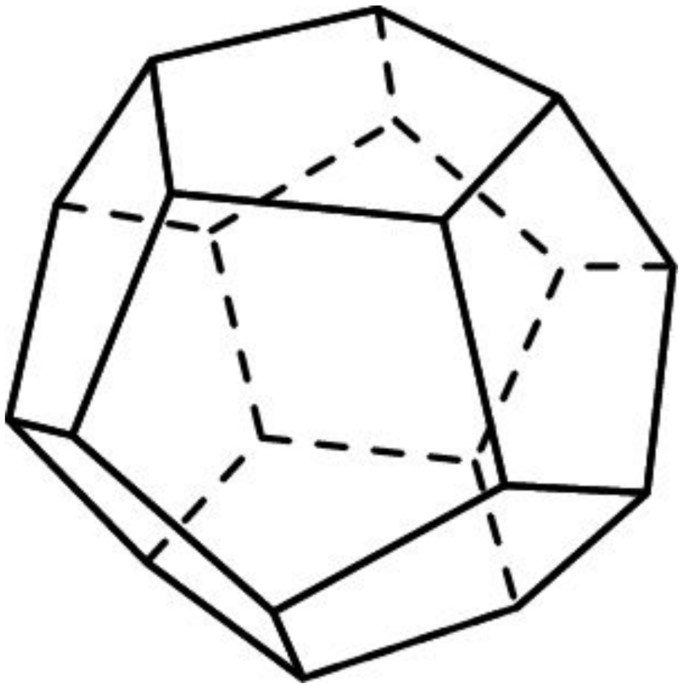
Сколько имеется пар параллельных прямых, содержащих ребра икосаэдра.



Решение: Для каждого ребра имеется только одно ребро, ему параллельное. У икосаэдра 30 ребер. Следовательно, искомое число пар параллельных прямых равно $\frac{30}{2} = 15$.

Упражнение 29*

Сколько имеется пар параллельных прямых, содержащих ребра додекаэдра.



Решение: Для каждого ребра имеется только одно ребро, ему параллельное. У додекаэдра 30 ребер. Следовательно, искомое число пар параллельных прямых равно $\frac{30}{2} = 15.$

Упражнение 30*

В пространстве даны n параллельных между собой прямых. Сколько плоскостей можно провести через различные пары этих прямых, если известно, что никакие три из них не лежат в одной плоскости?

Ответ: $\dfrac{n(n-1)}{2}$.