



# Лекция №2

*При планировании экстремального эксперимента очень важно определить параметр, который нужно оптимизировать.*

Цель исследования должна быть сформулирована очень четко и допускать количественную оценку.

Будем называть характеристику цели, заданную

количественно, **параметром**

**ОПТИМИЗАЦИИ.** *Параметр оптимизации является реакцией (откликом) на воздействие факторов, которые определяют поведение выбранной вами системы.*

Реакция объекта многогранна, многоаспектна. Выбор того аспекта, который представляет наибольший интерес, как раз и задается целью исследования.

Прежде чем сформулировать требования к параметрам оптимизации и рекомендации по их выбору, познакомимся с различными видами параметров.

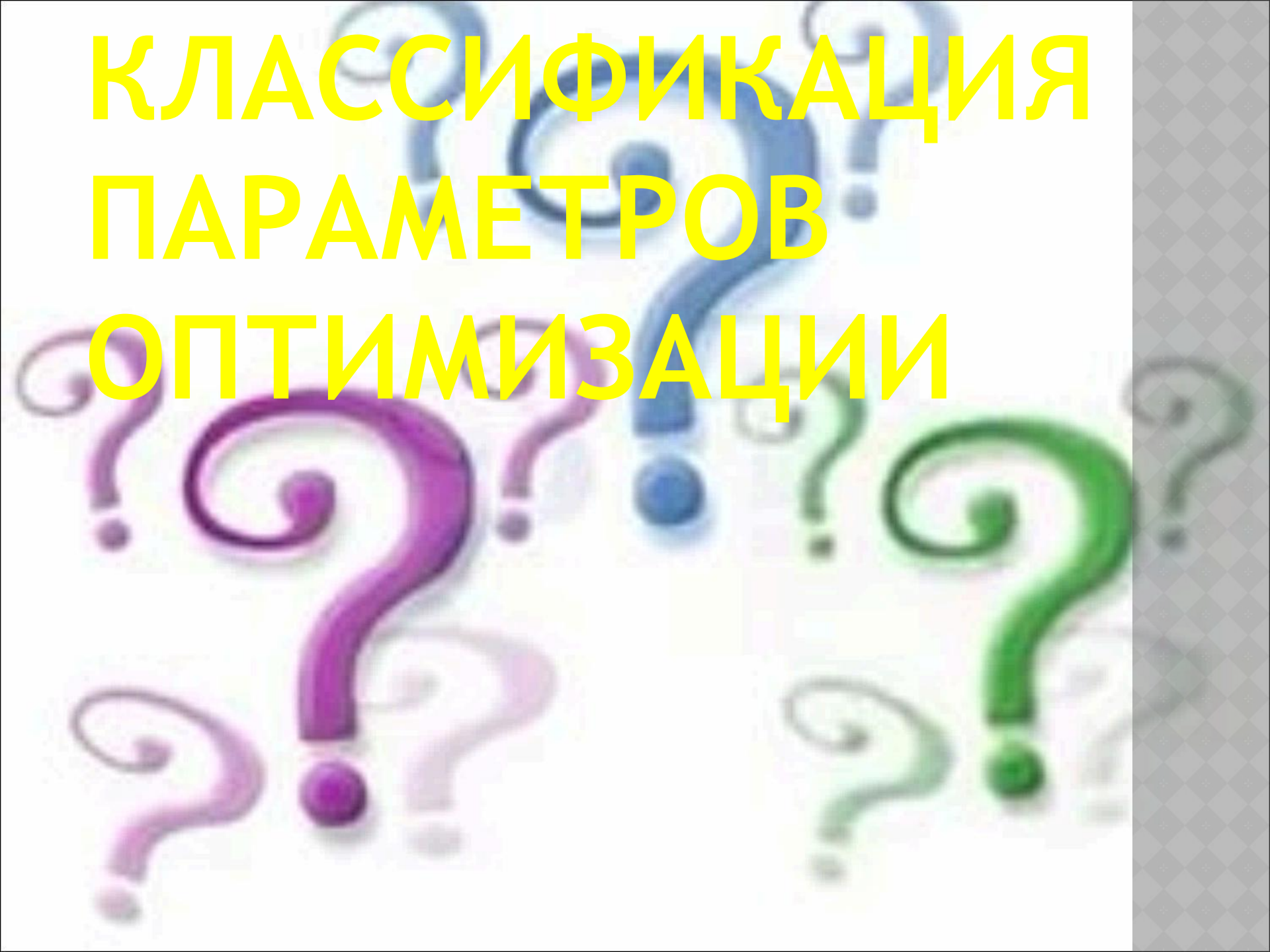
# ВИДЫ ПАРАМЕТРОВ ОПТИМИЗАЦИИ

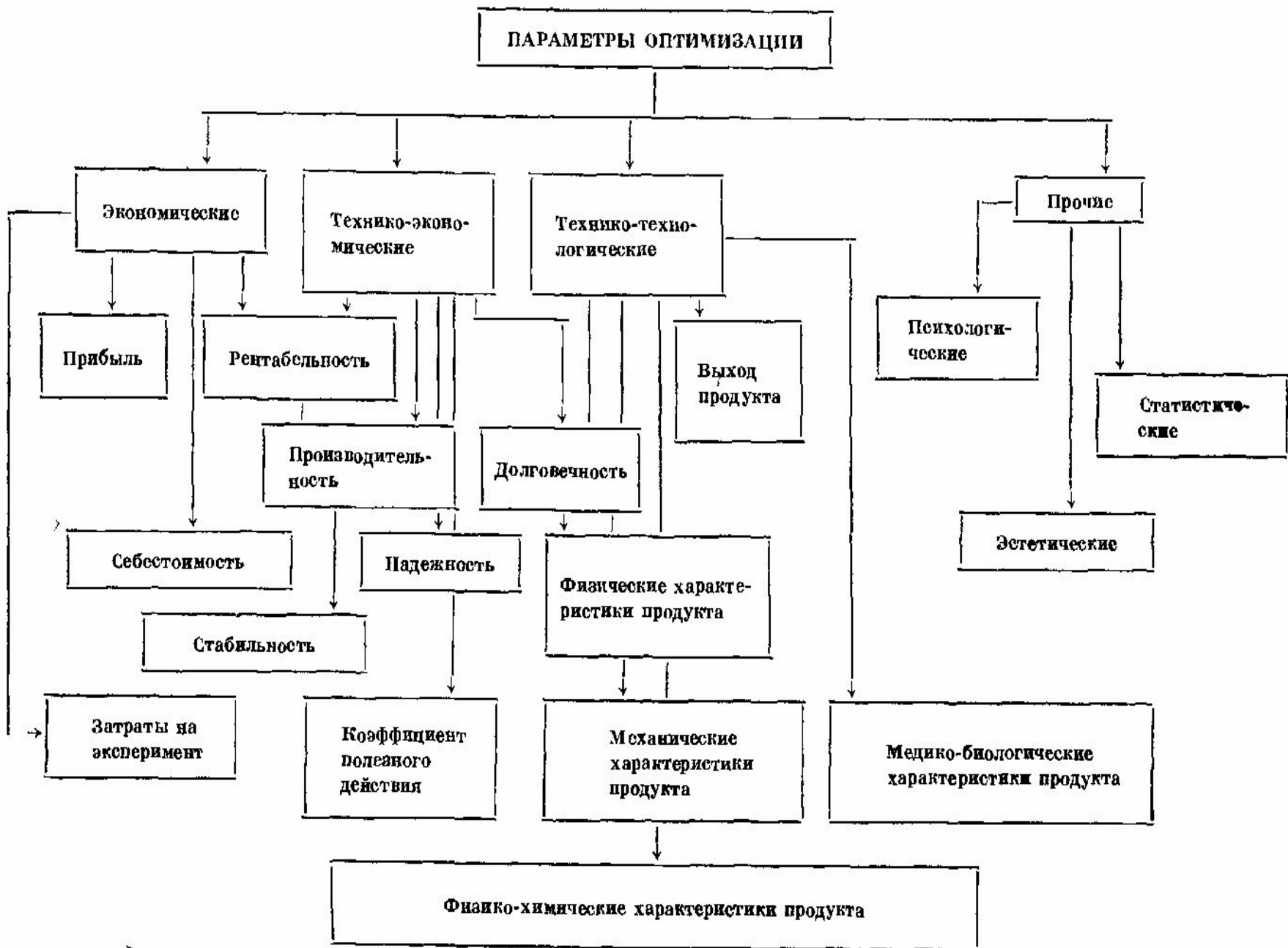
В принципе каждый объект может характеризоваться сразу всей совокупностью параметров. Движение к оптимуму возможно, если выбран единственный параметр оптимизации. Тогда прочие характеристики процесса уже не выступают в качестве параметров оптимизации, а служат ограничениями.

Другой путь - построение обобщенного параметра оптимизации как некоторой функции от множества исходных.



# КЛАССИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ОПТИМИЗАЦИИ





# Экономические

параметры оптимизации, такие, как прибыль, себестоимость и рентабельность, обычно используются при исследовании действующих промышленных объектов, тогда как затраты на эксперимент имеет смысл оценивать в любых исследованиях, в том числе и лабораторных. Если цена опытов одинакова, затраты на эксперимент пропорциональны числу опытов, которые необходимо поставить для решения данной задачи. Это в значительной мере определяет выбор плана эксперимента.

Среди *технико-экономических параметров* наибольшее распространение имеет *производительность*. Такие параметры, как долговечность, надежность и стабильность, связаны с длительными наблюдениями. Имеется некоторый опыт их использования при изучении дорогостоящих ответственных объектов, например радиоэлектронной аппаратуры.



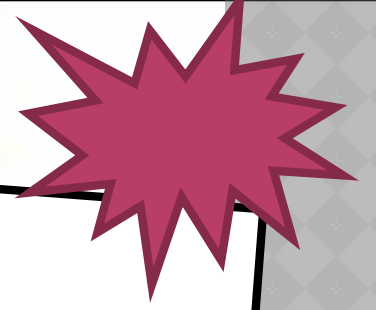
Показатели качества чрезвычайно разнообразны. Характеристики *количества и качества продукта* образуют группу **ТЕХНИКО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ параметров.**

Под рубрикой **«прочие»** сгруппированы различные параметры, которые реже встречаются, но не являются менее важными. Сюда попали статистические параметры, используемые для улучшения характеристик случайных величин или случайных функций.

В качестве примеров назовем задачи на минимизацию дисперсии случайной величины, на уменьшение числа выбросов случайного процесса за фиксированный уровень и т.д. Последняя задача возникает, в частности, при выборе оптимальных настроек автоматических регуляторов или при улучшении свойств нитей (проволока, пряжа, искусственное волокно и др.).



С ростом сложности объекта возрастает *роль психологических аспектов взаимодействия человека или животного с объектом*. Так, при выборе оптимальной организации рабочего места оператора параметром оптимизации может служить число ошибочных действий в различных возможных ситуациях. Сюда относятся задачи выработки условных рефлексов типа задачи «крысы в лабиринте».



**Пример 1.** Во время второй мировой войны несколько сот английских торговых судов на Средиземном море были вооружены зенитными орудиями для защиты от вражеских бомбардировщиков. Поскольку это мероприятие было достаточно дорогим (требовалось иметь на каждом судне боевую команду), через несколько месяцев решили оценить его эффективность

***Какой из параметров оптимизации более подходит для этой цели?***

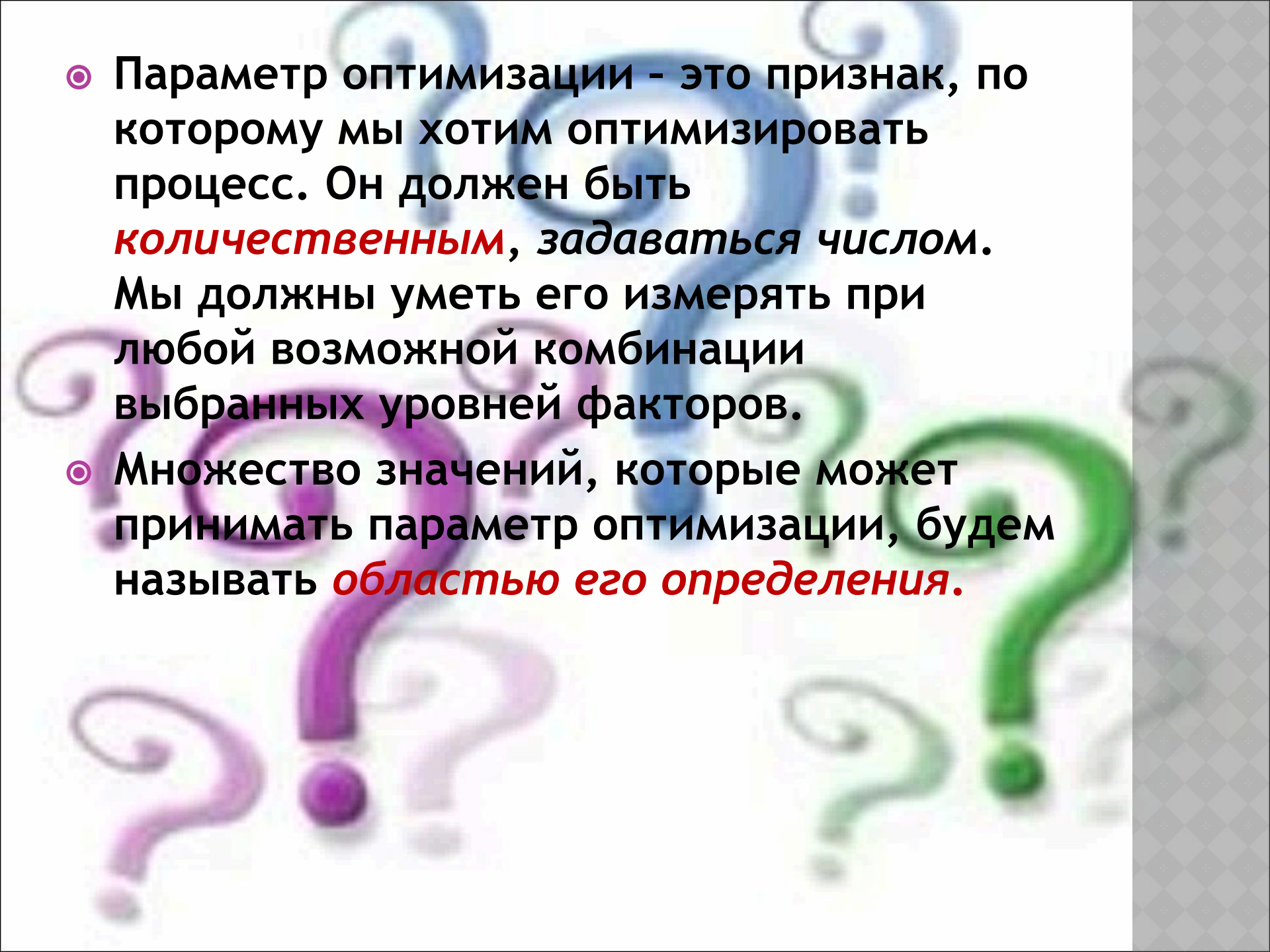
- ❖ Число сбитых самолетов.
- ❖ Потери в судах, оснащенных орудиями, по сравнению с судами без орудий.



- Если Вы считаете, что эффективность установления орудий на торговые суда можно оценить числом сбитых самолетов, то Вы вряд ли смогли бы занять пост командующего английским флотом на Средиземном море. Выбранный Вами параметр оптимизации оценивает эффективность уничтожения самолетов. В то же время ясно, что значения параметра оптимизации в этом случае будут низкими, так как существуют куда более эффективные средства для этой цели (авиация, боевой флот), чем зенитные орудия на торговых судах.
- Если же Вы полагаете, что эффективность установки орудий на торговые суда можно оценить сопоставлением потерь в судах, оснащенных орудиями, с потерями в судах без орудий, то это разумный выбор параметра оптимизации, потому что основной задачей при установке орудий была защита судов. Самолеты вынуждены были теперь использовать противозенитные маневры и бомбометание с большой высоты, что уменьшало потери. Из числа атакованных самолетами торговых судов с зенитными орудиями было потоплено 10% судов, а потери в судах без орудий составили 25%. Затраты на установку орудий и содержание боевых расчетов окупались очень быстро.

The background of the slide is white with several question marks scattered across it. The question marks are in three colors: blue, purple, and green. Some are sharp and in the foreground, while others are faded and in the background. On the right side of the slide, there is a vertical grey bar with a diamond-shaped grid pattern.

# ТРЕБОВАНИЯ К ПАРАМЕТРУ ОПТИМИЗАЦИИ

- 
- Параметр оптимизации - это признак, по которому мы хотим оптимизировать процесс. Он должен быть ***количественным***, задаваться числом. Мы должны уметь его измерять при любой возможной комбинации выбранных уровней факторов.
  - Множество значений, которые может принимать параметр оптимизации, будем называть ***областью его определения***.



# Области определения могут быть:

- Непрерывными;
- Дискретными;
- Ограниченными;
- Неограниченными.

- ◎ **Например, выход реакции - это параметр оптимизации с непрерывной ограниченной областью определения. Он может изменяться в интервале от 0 до 100%. Число бракованных изделий, число зерен на шлифе сплава, число кровяных телец в пробе крови - вот примеры параметров с дискретной областью определения, ограниченной снизу.**
- ◎ **Уметь измерять параметр оптимизации - это значит располагать подходящим прибором. В ряде случаев такого прибора может не существовать или он слишком дорог. Если нет способа количественного измерения результата, то приходится воспользоваться приемом, называемым ранжированием (ранговым подходом).**
- ◎ **При этом параметрам оптимизации присваиваются оценки - ранги по заранее выбранной шкале: двухбалльной, пятибалльной и т. д. Ранговый параметр имеет дискретную ограниченную область определения. В простейшем случае область содержит два значения (да, нет; хорошо, плохо). Это может соответствовать, например, годной продукции и браку.**

# Ран

Это количественная оценка параметра оптимизации, но она носит условный (субъективный) характер. Мы ставим в соответствие качественному признаку некоторое число - ранг.



***Для каждого физически измеряемого параметра оптимизации можно построить ранговый аналог.***

Потребность в построении такого аналога возникает, если имеющиеся в распоряжении исследователя численные характеристики неточны или неизвестен способ построения удовлетворительных численных оценок.

# Пример

2

Ваша жена решила испечь яблочный пирог по новому рецепту. Вам, конечно, трудно остаться в стороне, и вы предлагаете ей свои услуги по оптимизации этого процесса.

## Цель процесса:

-получение вкусного пирога, но такая формулировка цели еще не дает возможности приступить к оптимизации: необходимо выбрать количественный критерий, характеризующий степень достижения цели. Можно принять следующее решение: очень вкусный пирог получает отметку 5, просто вкусный пирог - отметку 4 и т.д.

Давайте разберемся. Нам важно количественно оценить результат оптимизации. Решает ли отметка эту задачу?

Конечно, потому что, как мы договорились, отметка 5 соответствует очень вкусному пирогу и т.д. Другое дело, что этот подход, называемый *ранговым*, часто *оказывается грубым, нечувствительным*. Но возможности такой количественной оценки результатов не должна вызывать сомнений.

Другие примеры рангового подхода:

- определение чемпиона мира по фигурному катанию или гимнастике, дегустация вин, сравнение произведений искусства и т. д. Или, если хотите, из области химии: сравнение продуктов по цвету, прозрачности, форме кристаллов.



# ТРЕБОВАНИЯ

*-параметр оптимизации должен выражаться одним числом.*

Иногда это получается естественно, как регистрация показания прибора. Например, скорость движения машины определяется числом на спидометре.

*Еще одно требование, связанное с количественной природой параметра оптимизации, - однозначность в статистическом смысле.*

Заданному набору значений факторов должно соответствовать одно с точностью до ошибки эксперимента значение параметра оптимизации. *(Однако обратное неверно: одному и тому же значению параметра могут соответствовать разные наборы значений факторов).*

Для успешного достижения цели исследования необходимо, чтобы параметр оптимизации действительно оценивал *эффективность функционирования системы в заранее выбранном смысле*. Это требование является главным, определяющим корректность постановки задачи.



*Мало иметь эффективный параметр оптимизации. Надо еще, чтобы он был эффективный в статистическом смысле.*

Понятие статистической эффективности достаточно сложное, фактически это требование сводится к выбору параметра оптимизации, который определяется с наибольшей возможной точностью. (Если и эта точность недостаточна, тогда приходится обращаться к увеличению числа повторных опытов.)

Пусть, например, нас интересует исследование прочностных характеристик некоторого сплава. В качестве меры прочности можно использовать как прочность на разрыв, так и макротвердость. Поскольку эти характеристики функционально связаны, то с точки зрения эффективности они эквивалентны. Однако точность измерения первой характеристики существенно выше, чем второй. Требование статистической эффективности заставляет отдать предпочтение прочности на разрыв.

# Требование универсальности или полноты.

Под **универсальностью** параметра оптимизации понимается его способность всесторонне характеризовать объект.

В частности, технологические параметры оптимизации недостаточно универсальны: они не учитывают экономику. Универсальностью обладают, например, обобщенные параметры оптимизации, которые строятся как функции от нескольких частных параметров.



- Желательно, чтобы параметр оптимизации имел *физический смысл, был простым и легко вычисляемым.*
- Требование физического смысла связано с последующей интерпретацией результатов эксперимента. Не представляет труда объяснить, что значит максимум извлечения, максимум содержания ценного компонента. Эти и подобные им технологические параметры оптимизации имеют ясный физический смысл, но иногда для них может не выполняться, например, требование статистической эффективности. Тогда рекомендуется переходить к преобразованию параметра оптимизации.
- *Преобразование, например типа  $\arcsin \Gamma y$ , может сделать параметр оптимизации статистически эффективным (например, дисперсии становятся однородными), но остается неясным: что же значит достигнуть экстремума этой величины?*
- Второе требование часто также оказывается весьма существенным. Для процессов разделения термодинамические параметры оптимизации более универсальны. Однако на практике ими пользуются мало: их расчет довольно труден.



**ПАРАМЕТР  
ОПТИМИЗАЦИИ В  
НЕКОТОРОЙ СТЕПЕНИ  
ОКАЗЫВАЕТ ВЛИЯНИЕ НА  
ВИД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ  
МОДЕЛИ ИССЛЕДУЕМОГО  
ОБЪЕКТА.**

Математические модели можно построить для каждого из параметров, но одновременно оптимизировать *несколько функций невозможно.*

Обычно оптимизируется одна функция, наиболее важная с точки зрения цели исследования, при ограничениях, налагаемых другими функциями. *Поэтому из многих выходных параметров выбирается один в качестве параметра оптимизации, а остальные служат ограничениями.* Всегда полезно исследовать возможность уменьшения числа выходных параметров. Для этого можно воспользоваться корреляционным анализом.

ПРИ ЭТОМ МЕЖДУ ВСЕВОЗМОЖНЫМИ ПАРАМИ ПАРАМЕТРОВ НЕОБХОДИМО ВЫЧИСЛИТЬ КОЭФФИЦИЕНТ ПАРНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ, КОТОРЫЙ ЯВЛЯЕТСЯ ОБЩЕПРИНЯТОЙ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ СВЯЗИ МЕЖДУ ДВУМЯ СЛУЧАЙНЫМИ ВЕЛИЧИНАМИ. ЕСЛИ ОБОЗНАЧИТЬ ОДИН ПАРАМЕТР ЧЕРЕЗ  $y_1$ , А ДРУГОЙ - ЧЕРЕЗ  $y_2$ , И ЧИСЛО ОПЫТОВ, В КОТОРЫХ ОНИ БУДУТ ИЗМЕРЯТЬСЯ, - ЧЕРЕЗ  $N$ , ТАК, ЧТО  $u=1, 2, \dots, N$ , ГДЕ  $u$  - ТЕКУЩИЙ НОМЕР ОПЫТА, ТО КОЭФФИЦИЕНТ ПАРНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ  $r$  ВЫЧИСЛЯЕТСЯ ПО ФОРМУЛЕ:

$$r_{y_1 y_2} = \frac{\sum_{u=1}^N (y_{1u} - \bar{y}_1) (y_{2u} - \bar{y}_2)}{\sqrt{\sum_{u=1}^N (y_{1u} - \bar{y}_1)^2 \sum_{u=1}^N (y_{2u} - \bar{y}_2)^2}}.$$

Здесь

$$\bar{y}_1 = \sum_{u=1}^N y_{1u} / N \text{ и } \bar{y}_2 = \sum_{u=1}^N y_{2u} / N$$

средние арифметические соответственно для  $y_1$  и  $y_2$ .



Значения коэффициента парной корреляции могут лежать в пределах от -1 до +1. Если с ростом значения одного параметра возрастает значение другого, у коэффициента будет знак плюс, а если уменьшается, то минус.

Чем ближе найденное значение корреляции к единице, тем сильнее значение одного параметра зависит от того, какое значение принимает другой, т.е. между такими параметрами существует линейная связь, и при изучении процесса можно рассматривать только один из них. Необходимо помнить, что коэффициент парной корреляции как мера тесноты связи имеет четкий математический смысл только при линейной зависимости между параметрами и в случае нормального их распределения.

При высокой значимости коэффициента корреляции любой из двух анализируемых параметров можно исключить из рассмотрения как не содержащий дополнительной информации об объекте исследования. *Исключить можно тот параметр, который технически труднее измерять, или тот, физический смысл которого менее ясен.*

- При планировании эксперимента целесообразно измерять все параметры, затем **оценить корреляцию между ними и строить модели для их минимально возможного числа или же воспользоваться обобщенным параметром.** Но бывают случаи, когда приходится рассматривать и коррелированные параметры.

# ФАКТОР

После того как выбран объект исследования и функция отклика, нужно включить в рассмотрение все существенные факторы, которые могут влиять на процесс. Если какой-либо существенный фактор окажется неучтенным, то это может привести к неприятным последствиям.

«Ну, а как же преодолеть большое число опытов? Чем больше факторов, тем больше опытов». Действительно, число опытов растет по показательной функции. Размерность факторного пространства увеличивается, и математики в таких случаях говорят о «проклятии размерности».



**Если число факторов больше пятнадцати, нужно обратиться к методам отсеивания несущественных факторов.**

**Здесь можно воспользоваться формализацией априорной информации, методом случайного баланса, планами Плакетта-Бермана и др.**

**Иногда эти планы применяются и при меньшем числе факторов.**



# ОПРЕДЕЛЕНИЯ

**ФАКТОРОМ** НАЗЫВАЕТСЯ ИЗМЕРЯЕМАЯ ПЕРЕМЕННАЯ ВЕЛИЧИНА, ПРИНИМАЮЩАЯ В НЕКОТОРЫЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ ОПРЕДЕЛЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ.

ФАКТОРЫ СООТВЕТСТВУЮТ СПОСОБАМ ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЯ.

Каждый фактор имеет область определения. Под **областью определения** понимается совокупность всех значений, которые в принципе может принимать данный фактор. Ясно, что совокупность значений фактора, которая используется в эксперименте, является подмножеством из множества значений, образующих область определения.

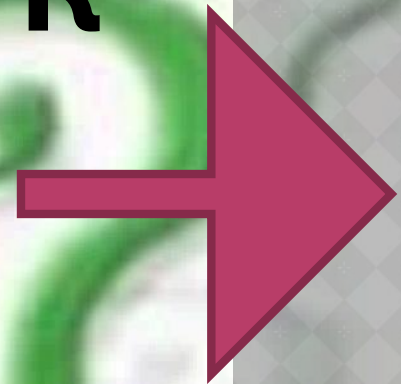


*Область определения может быть непрерывной или дискретной.*

*Факторы разделяются на количественные и качественные.*

*Качественные факторы - это разные вещества, разные технологические способы, аппараты, исполнители и т.д.*

**Требования,  
предъявляемые к  
факторам при  
планировании  
эксперимента**



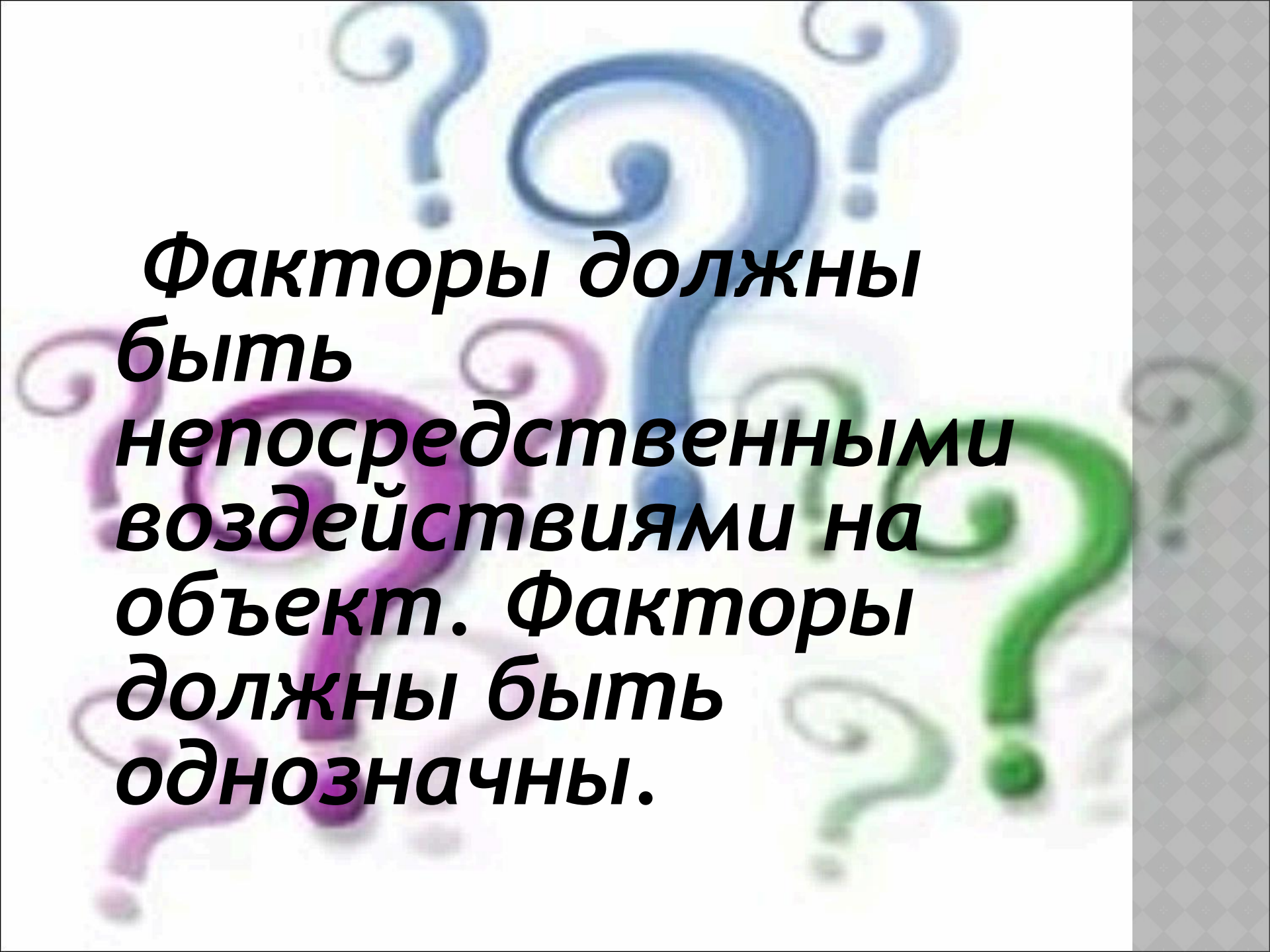
*При планировании эксперимента факторы должны быть управляемыми.*

Это значит, что экспериментатор, выбрав нужное значение фактора, может его поддерживать постоянным в течение всего опыта, т.е. может управлять фактором. В этом состоит особенность «активного» эксперимента. Планировать эксперимент можно только в том случае, если уровни факторов подчиняются воле экспериментатора.



**ЧТОБЫ ТОЧНО ОПРЕДЕЛИТЬ ФАКТОР, НУЖНО  
УКАЗАТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ДЕЙСТВИЙ  
(ОПЕРАЦИЙ), С ПОМОЩЬЮ КОТОРЫХ  
УСТАНОВЛИВАЮТСЯ ЕГО КОНКРЕТНЫЕ  
ЗНАЧЕНИЯ (УРОВНИ). ТАКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ  
ФАКТОРА БУДЕМ НАЗЫВАТЬ  
ОПЕРАЦИОНАЛЬНЫМ.**

*Точность замера факторов должна быть  
возможно более высокой.*

The background features several large, stylized question marks in blue, purple, and green, set against a white background. On the right side, there is a vertical grey bar with a white and grey checkered pattern.

**Факторы должны  
быть  
непосредственными  
воздействиями на  
объект. Факторы  
должны быть  
однозначны.**

# Требования к совокупности факторов

При планировании эксперимента обычно одновременно изменяется несколько факторов. Поэтому очень важно сформулировать требования, которые предъявляются к совокупности факторов.

Прежде всего выдвигается требование совместимости. Совместимость факторов означает, что все их комбинации осуществимы и безопасны. Это очень важное требование. Представьте себе, что вы поступили легкомысленно, не обратили внимания на требование совместимости факторов и запланировали такие условия опыта, которые могут привести к взрыву установки. Согласитесь, что такой результат очень далек от целей оптимизации.



*При планировании эксперимента важна независимость факторов, т.е. возможность установления фактора на любом уровне вне зависимости от уровней других факторов. Если это условие невыполнимо, то невозможно планировать эксперимент. Итак, мы подошли ко второму требованию - отсутствию корреляции между факторами. Требование некоррелированности не означает, что между значениями факторов нет никакой связи. Достаточно, чтобы связь не была линейной.*

# МОДЕЛИ

Под моделью будем понимать вид функции отклика  $y = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_k)$ .

*Выбрать модель - значит выбрать вид этой функции, записать ее уравнение. Тогда останется спланировать и провести эксперимент для оценки численных значений констант (коэффициентов) этого уравнения.*

Но как выбрать модель?

Чтобы постепенно продвигаться к ответу на этот вопрос, давайте сначала построим геометрический аналог функции отклика - поверхность отклика. Будем для наглядности рассматривать случай с двумя факторами.

Мы хотим изобразить геометрически возможные состояния «черного ящика» с двумя входами. Для этого достаточно располагать плоскостью с обычной декартовой системой координат. По одной оси координат будем откладывать в некотором масштабе значения (уровни) одного фактора, а по другой оси - второго. Тогда каждому состоянию «ящика» будет соответствовать точка на плоскости.

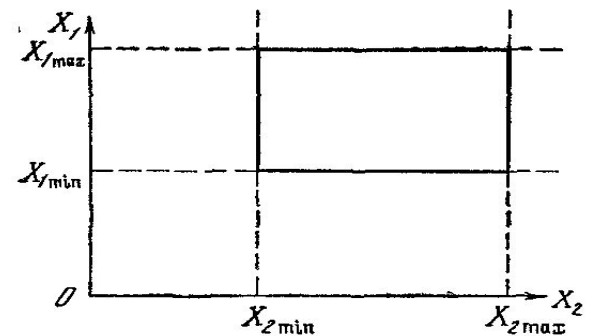


Рис. 11. Область определения факторов

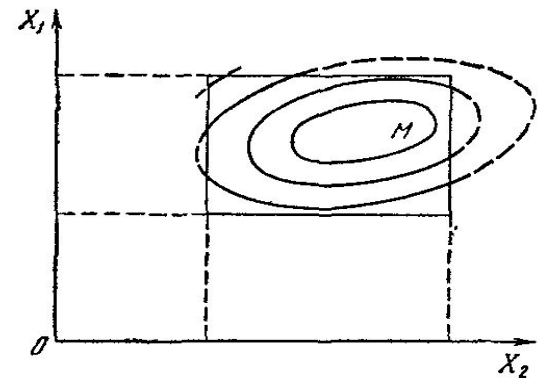


Рис. 13. Проекция сечений поверхности отклика на плоскость

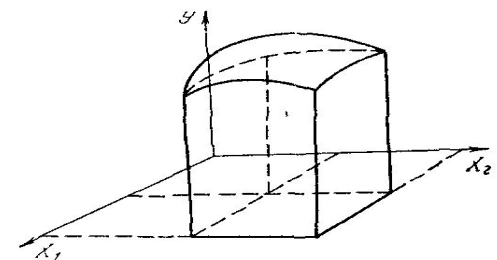


Рис. 12. Поверхность отклика



*Пространство, в котором строится поверхность отклика, мы будем называть факторным пространством.*

Оно задается координатными осями, по которым откладываются значения факторов и параметра оптимизации (Иногда под факторным пространством понимается пространство, образованное только осями факторов).

Но для двух факторов можно даже не переходить к трехмерному пространству, а ограничиться плоскостью. Для этого достаточно произвести сечение поверхности отклика плоскостями, параллельными плоскости  $X_1 O X_2$ , и полученные в сечениях линии спроектировать на эту плоскость.

Так строят, например, изображения гор и морских впадин на географических картах.

**Точка М** на рисунке - это и есть та оптимальная точка, которую мы ищем. Каждая линия соответствует постоянному значению параметра оптимизации. Такая линия называется *линией равного отклика*.

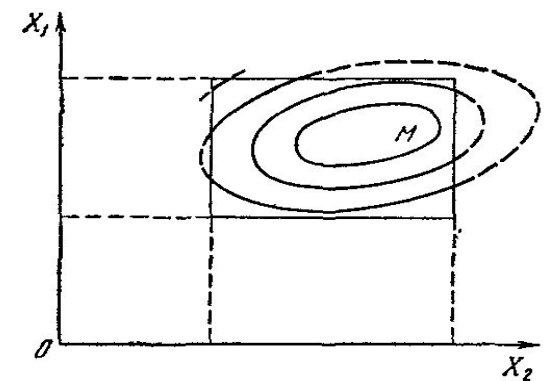


Рис. 13. Проекция сечений поверхности отклика на плоскость

Однако обратное неверно:

одному возможному значению параметра оптимизации может соответствовать и одно, и несколько; и сколько угодно состояний «ящиков».

**СУЩЕСТВУЕТ  
СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ  
СОСТОЯНИЕМ «ЯЩИКА»  
И ЗНАЧЕНИЕМ  
ПАРАМЕТРА  
ОПТИМИЗАЦИИ:  
КАЖДОМУ ВОЗМОЖНОМУ  
СОСТОЯНИЮ «ЯЩИКА»  
СООТВЕТСТВУЕТ ОДНО  
ЗНАЧЕНИЕ ПАРАМЕТРА  
ОПТИМИЗАЦИИ.**



# КАК ВЫБРАТЬ МОДЕЛЬ???

Модели бывают разные. Моделей бывает много. Чтобы выбрать одну из них, надо понять, что мы хотим от модели, какие требования мы к ней предъявляем.

Если несколько различных моделей отвечают нужным требованиям, то следует предпочесть ту из них, которая является самой простой.

Если рассмотреть логарифмическую функцию. На некотором отрезке  $[x_{\min}, x_{\max}]$  она с удовлетворительной точностью описывается двумя уравнениями:

- $y = \log_b x$ ,
- $y = bx$ .

Во втором уравнении  $b$  - коэффициент, который мы можем оценить, например, по результатам эксперимента. Какое из уравнений, по вашему мнению, проще?

Простота - вещь относительная. Если вы заранее не сформулируете точно, что называется простым, а что сложным, то невозможно произвести выбор. Вот почему на наш вопрос не было никакого другого ответа, кроме «не знаю».

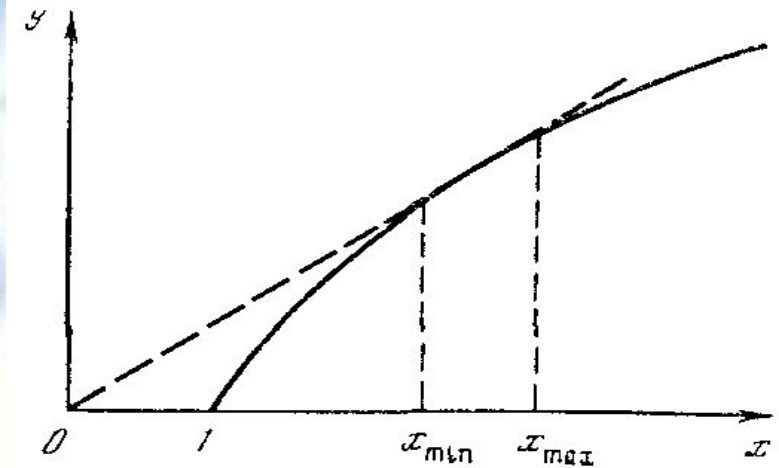


Рис. 17. График логарифмической функции

- возможно, будем искать модель среди полиномов. Построение полинома возможно в окрестностях любой точки факторного пространства, поскольку мы предположили, что функция является аналитической.
- Выбрать - значит сравнить. А как сравнить между собой классы моделей, если свойства объекта заранее неизвестны? Остается предполагать, что нам будут редко встречаться задачи, в которых исходные постулаты окажутся существенно неверными.
- Если это так, то мы действительно выбрали наиболее простой, удобный и математически разработанный класс моделей. Возможно, что кто-то заранее выбрал для нашей задачи конкретную модель. Тогда тоже возникает необходимость в планировании эксперимента для оценки ее коэффициентов. Но мы не будем рассматривать задачи этого типа.
- Давайте выпишем полиномы для случая двух факторов. Они будут различаться по максимальным степеням входящих в них переменных.
- Полином нулевой степени:  $y = b_0$ .
- Полином первой степени:  $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$ .
- Полином второй степени:  $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2$ .

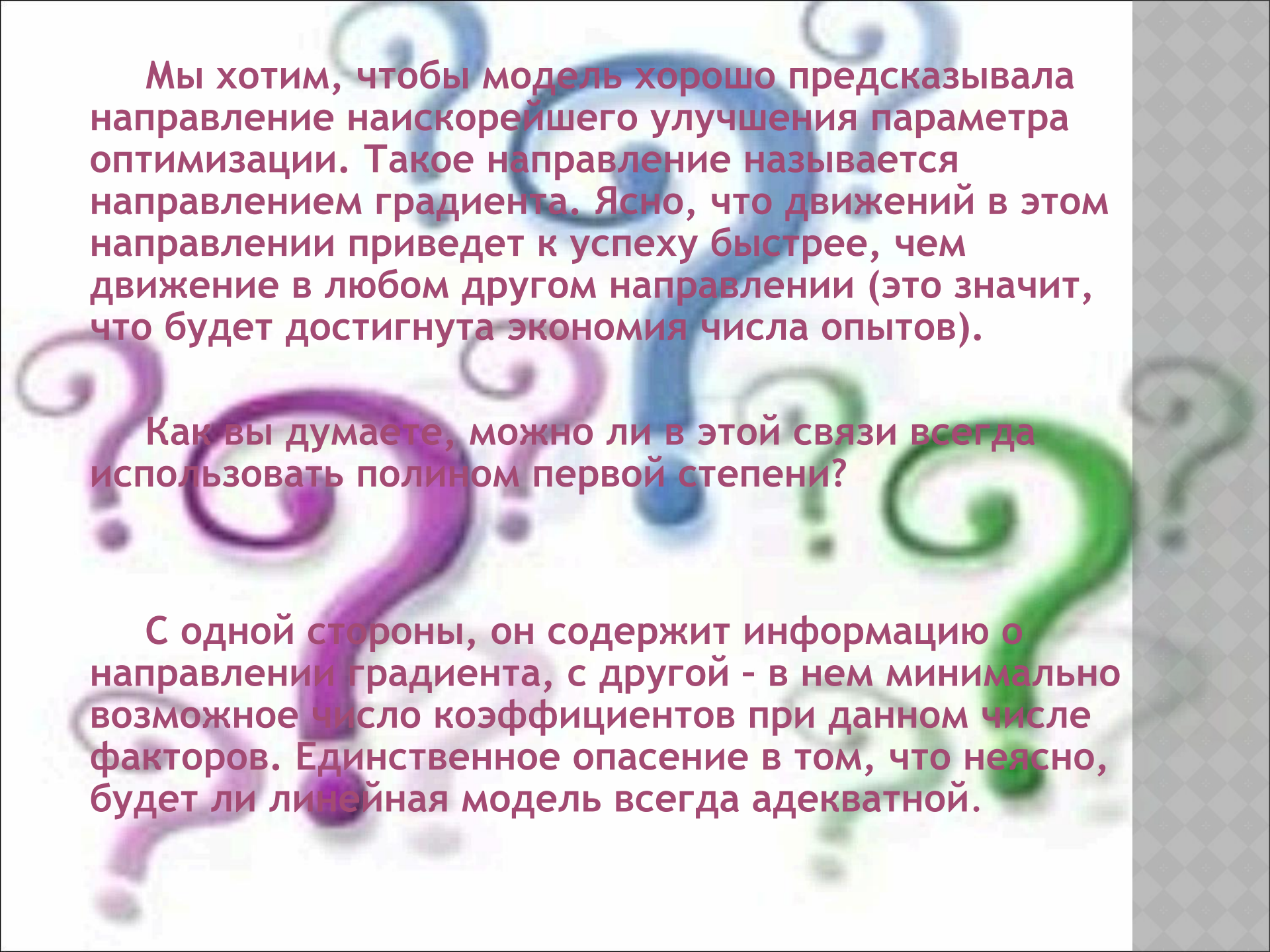
# ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ

**Но полиномы бывают разных степеней. Какой взять на первом шаге?**

- Эксперимент нужен только для того, чтобы найти численные значения коэффициентов полинома. Поэтому чем больше коэффициентов, тем больше опытов окажется необходимым. А мы стремимся сократить их число. Значит, надо найти такой полином, который содержит как можно меньше коэффициентов, но удовлетворяет требованиям, предъявленным к модели.

Чем ниже степень полинома при заданном числе факторов, тем меньше в нем коэффициентов.



The background features several large, stylized question marks in shades of blue, purple, and green. On the right side, there is a vertical grey and white checkered pattern.

Мы хотим, чтобы модель хорошо предсказывала направление наискорейшего улучшения параметра оптимизации. Такое направление называется направлением градиента. Ясно, что движений в этом направлении приведет к успеху быстрее, чем движение в любом другом направлении (это значит, что будет достигнута экономия числа опытов).

Как вы думаете, можно ли в этой связи всегда использовать полином первой степени?

С одной стороны, он содержит информацию о направлении градиента, с другой - в нем минимально возможное число коэффициентов при данном числе факторов. Единственное опасение в том, что неясно, будет ли линейная модель всегда адекватной.

# Принятие решений перед планированием эксперимента

При выборе области эксперимента прежде всего надо оценить границы областей определения факторов. При этом должны учитываться ограничения нескольких типов.

Первый тип - принципиальные ограничения для значений факторов, которые не могут быть нарушены ни при каких обстоятельствах. Например, если фактор - температура, то нижним пределом будет абсолютный нуль.

Второй тип - ограничения, связанные с технико-экономическими соображениями, например, со стоимостью сырья, дефицитностью отдельных компонентов, временем ведения процесса.

Третий тип ограничений, с которым чаще всего приходится иметь дело, определяется конкретными условиями проведения процесса, Например, существующей аппаратурой, технологией, организацией. В реакторе, изготовленном из некоторого материала, температуру нельзя поднять выше температуры плавления этого материала или выше рабочей температуры данного катализатора.

**Итак, выбор экспериментальной области факторного пространства связан с тщательным анализом априорной информации.**

**Далее в области определения надо найти локальную подобласть для планирования эксперимента. Процедура выбора этой подобласти включает два этапа: выбор основного уровня и выбор интервалов варьирования.**



# УРОВЕНЬ НУЛЯ

Наилучшим условиям, определенным из анализа априорной информации, соответствует комбинация (или несколько комбинаций) уровней факторов. Каждая комбинация является многомерной точкой в факторном пространстве. Ее можно рассматривать как исходную точку для построения плана эксперимента. Назовем ее основным (нулевым) уровнем. Построение плана эксперимента сводится к выбору экспериментальных точек, симметричных относительно нулевого уровня.

Пример 2. На рис. 18 изображена область определения для двух факторов. Крестиком отмечены наилучшие условия, известные из априорной информации. Известно также, что имеется возможность дальнейшего улучшения параметра оптимизации, а данное значение нас не удовлетворяет. Эту точку нельзя рассматривать в качестве основного уровня. Дело в том, что она расположена на границе области определения.

Требование симметрии экспериментальных точек относительно нулевого уровня привело бы в этом случае к выходу за границы области определения, чего делать также нельзя.

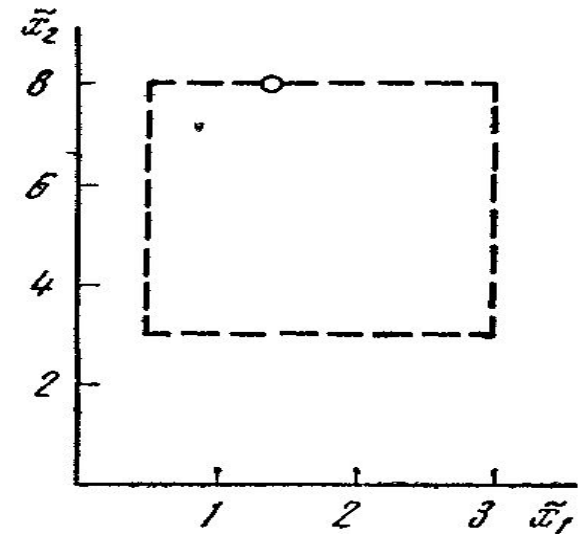


Рис. 18. Область определения двух факторов

# ВЫБОР ИНТЕРВАЛОВ ВАРЬИРОВАНИЯ

Представьте себе координатную ось, на которой откладываются значения данного фактора, для определенности - температуры. Пусть основным уровнем уже выбран и равен  $100^{\circ}\text{C}$ . Это значение изображается точкой. Тогда два интересующих нас уровня можно изобразить двумя точками, симметричными относительно первой. Будем называть один из этих уровней верхним, а второй - нижним. Обычно за верхний уровень принимается тот, который соответствует большему значению фактора, хотя это не обязательно, а для качественных факторов вообще безразлично.

**Интервалом** варьирования факторов называется некоторое число (свое для каждого фактора), прибавление которого к основному уровню дает верхний, а вычитание - нижний уровни фактора. Другими словами, интервал варьирования - это расстояние на координатной оси между основным и верхним (или нижним) уровнем. Таким образом, задача выбора уровней сводится к более простой задаче выбора интервала варьирования.



Заметим еще, что для упрощения записи условий эксперимента и обработки экспериментальных данных масштабы по осям выбираются так, чтобы верхний уровень соответствовал +1, нижний -1, а основной - нулю. Для факторов с непрерывной областью определения это всегда можно сделать с помощью преобразования, где нормированное значение фактора,  $X$  - натуральное значение фактора;  $X_0$  - натуральное значение основного уровня фактора;  $dx$  - интервал варьирования фактора.

Для качественных факторов, имеющих два уровня, один уровень обозначается +1, а другой - 1; порядок уровней не имеет значения.

Пусть процесс определяется четырьмя факторами. Основной уровень и интервалы варьирования выбраны следующим образом.

|                  |   |    |     |    |
|------------------|---|----|-----|----|
| Основной уровень | 3 | 30 | 1,5 | 15 |
|------------------|---|----|-----|----|

|                       |   |    |   |    |
|-----------------------|---|----|---|----|
| Интервал варьирования | 2 | 10 | 1 | 10 |
|-----------------------|---|----|---|----|

Остановимся на первом факторе. Отметим на координатной оси три уровня: нижний, основной и верхний.

|                      |   |   |   |   |
|----------------------|---|---|---|---|
| Натуральные значения | 1 | 2 | 3 | 5 |
|----------------------|---|---|---|---|

|                       |    |   |   |    |
|-----------------------|----|---|---|----|
| Кодированные значения | -1 | x | 0 | +1 |
|-----------------------|----|---|---|----|

Нужно найти кодированное значение для  $x_1 = 2,0$ . Это значение лежит между 1,0 и 3,0, т.е. между -1 и 0 в кодированном масштабе. Так как в натуральном масштабе 2,0 лежит посередине между 1,0 и 3,0; то ему соответствует -0,5 в кодированном масштабе.

**Выбор интервалов варьирования - задача трудная, так как она связана с неформализованным этапом планирования эксперимента.**

**Возникает вопрос, какая априорная информация может быть полезна на данном этапе? Это - сведения о точности, с которой экспериментатор фиксирует значения факторов, о кривизне поверхности отклика и о диапазоне изменения параметра оптимизации.**

**Обычно эта информация является ориентировочной (в некоторых случаях она может оказаться просто ошибочной), но это единственная разумная основа, на которой можно начинать планировать эксперимент. В ходе эксперимента ее часто приходится корректировать.**



Для интервалов также введем градацию. Будем рассматривать широкий, средний и узкий интервалы варьирования, а также случай, когда трудно принять однозначное решение.

Размер интервала варьирования составляет некоторую долю от области определения фактора. Можно, например, условиться о следующем: если интервал составляет не более 10% от области определения, считать его узким, не более 30% - средним и в остальных случаях - широким. Это, конечно, весьма условно, и в каждой конкретной задаче придется специально определять эти понятия, которые зависят не только от размера области определения, но и от характера поверхности отклика, и от точности фиксирования факторов.



Перейдем к рассмотрению блок-схем принятия решений. На первой схеме (рис. 19) представлены девять ситуаций, имеющих место при низкой точности фиксирования факторов. При выборе решений учитываются информация о кривизне поверхности отклика и о диапазоне изменения параметра оптимизации.

Типичное решение - широкий интервал варьирования. Узкий интервал варьирования совершенно не используется, что вполне понятно при низкой точности.

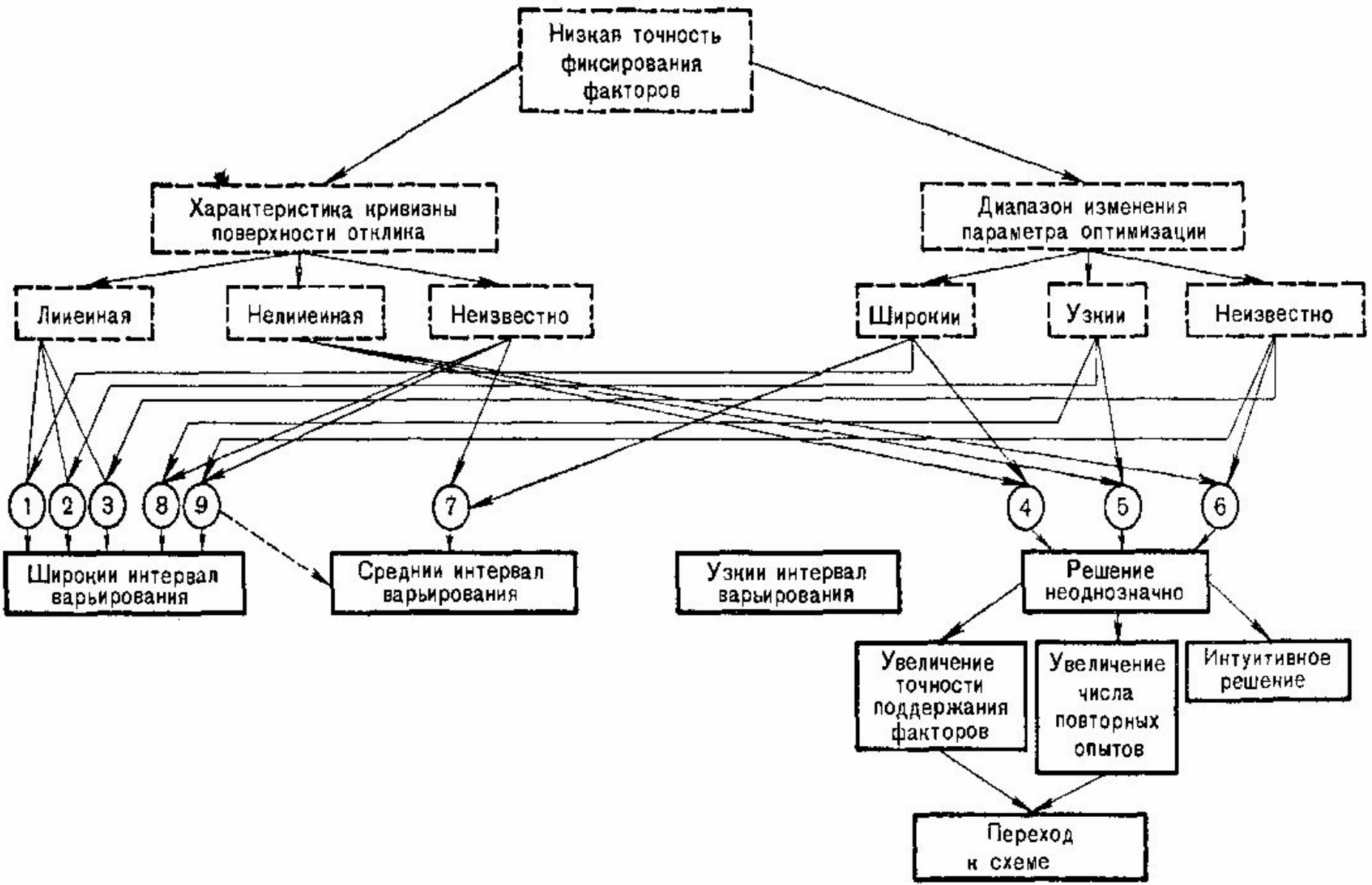


Рис. 19. Принятие решений при низкой точности фиксации факторов

Пусть ситуация определяется следующими признаками: поверхность отклика линейна, а диапазон изменения параметра оптимизации узок.

# Какое решение вы бы предпочли?

Эта ситуация обозначена на нашей схеме номером 2. Признаки ситуации определяются стрелками, направленными к данному кружочку. Стрелка, выходящая из кружочка, указывает решение. Низкая точность фиксирования факторов приводит к отказу от выбора узкого интервала варьирования, иначе результаты могут оказаться неразличимыми. Нам известно, что поверхность линейна. Это не налагает ограничений на расширение интервалов. Кроме того, надо учитывать сведения о диапазоне изменения параметра оптимизации. Он узок, а мы стремимся получить в эксперименте различающиеся значения параметра оптимизации. Поэтому интервал следует увеличивать.

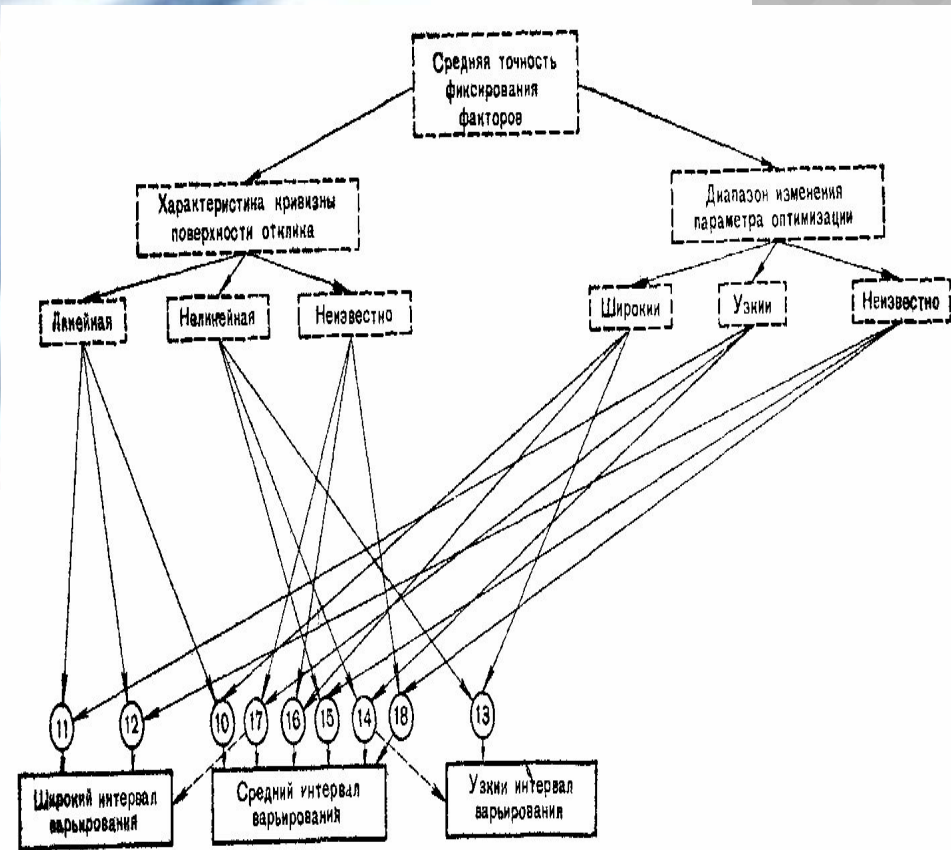


Рис. 20. Принятие решений при средней точности фиксирования факторов



НА РИС. 20 ИЗОБРАЖЕНА БЛОК-СХЕМА ДЛЯ СЛУЧАЯ СРЕДНЕЙ ТОЧНОСТИ ФИКСИРОВАНИЯ ФАКТОРОВ.

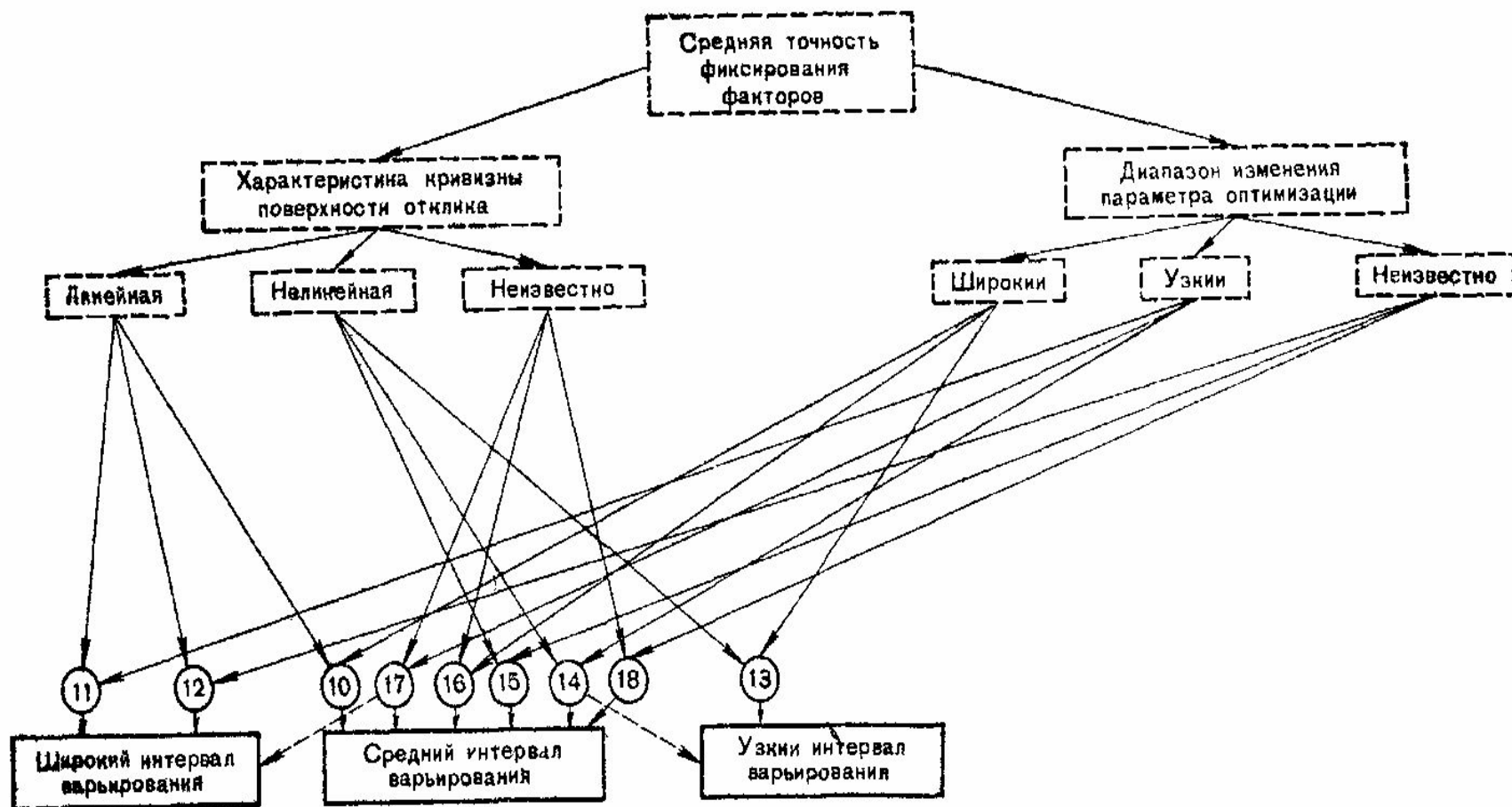
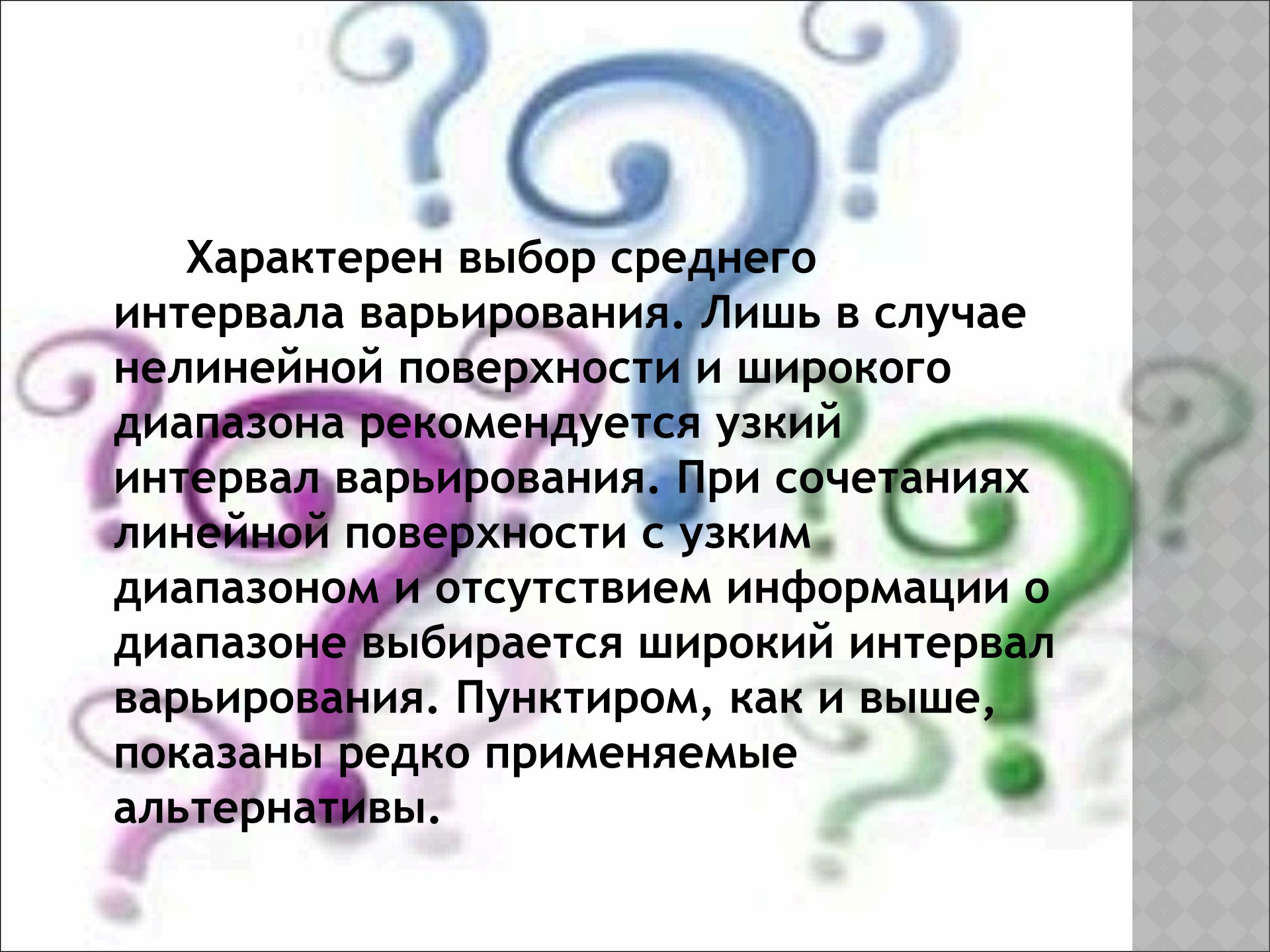


Рис. 20. Принятие решений при средней точности фиксирования факторов



**Характерен выбор среднего интервала варьирования. Лишь в случае нелинейной поверхности и широкого диапазона рекомендуется узкий интервал варьирования. При сочетаниях линейной поверхности с узким диапазоном и отсутствием информации о диапазоне выбирается широкий интервал варьирования. Пунктиром, как и выше, показаны редко применяемые альтернативы.**

НАКОНЕЦ, НА РИС. 21 ПОСТРОЕНА БЛОК-СХЕМА ДЛЯ СЛУЧАЯ ВЫСОКОЙ ТОЧНОСТИ ФИКСИРОВАНИЯ ФАКТОРА. СОЧЕТАНИЕ ВЫСОКОЙ ТОЧНОСТИ С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ПОВЕРХНОСТИ ВСЕГДА ПРИВОДИТ К ВЫБОРУ УЗКОГО ИНТЕРВАЛА.

ДОВОЛЬНО ЧАСТО ВЫБИРАЕТСЯ СРЕДНИЙ ИНТЕРВАЛ И ЛИШЬ В ДВУХ СЛУЧАЯХ ШИРОКИЙ. В ОБЕИХ ПОСЛЕДНИХ БЛОК-СХЕМАХ ОТСУТСТВУЮТ НЕОДНОЗНАЧНЫЕ РЕШЕНИЯ.

ИТАК, ВООРУЖИВШИСЬ УМЕНИЕМ ВЫБИРАТЬ ОСНОВНОЙ УРОВЕНЬ И ИНТЕРВАЛЫ ВАРИРОВАНИЯ ФАКТОРОВ, МЫ ГОТОВЫ ПРИСТУПИТЬ К ПОСТРОЕНИЮ ПЛАНА ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА.

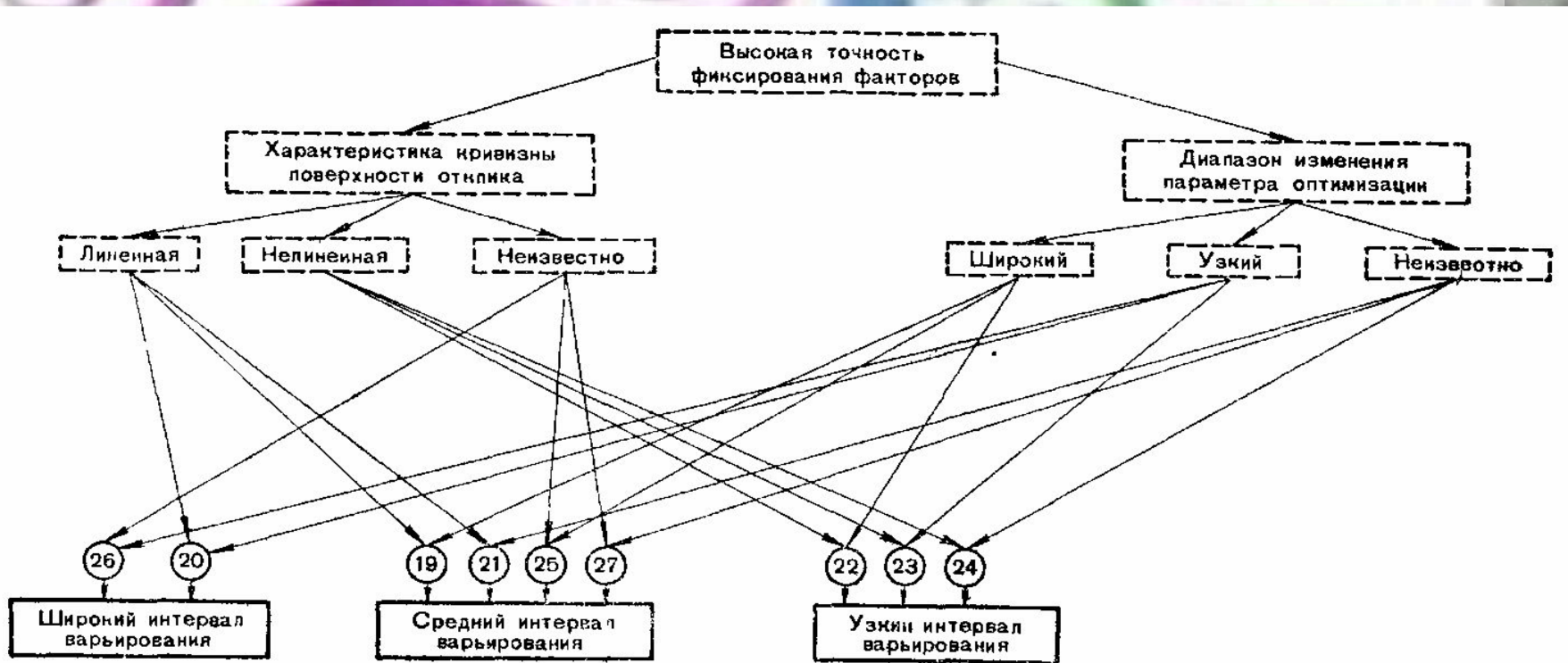


Рис. 21. Принятие решений при высокой точности фиксирования факторов





**Спасибо за  
внимание!!!**