Перестановки

Перестановки

- **Определение 1**

Перестановкой из n элементов называется всякий способ нумерации этих элементов

Пример 1

Дано множество $A = \{a; b; c\}$. Составить все перестановки этого множества.

Решение. $(a; b; c); (a; c; b); (b; a; c); (b; c; a); (c; a; b); (c; b; a)$

Число перестановок

- **Теорема 1.** Число всех различных перестановок из n элементов равно n!
- **Замечание.**

$n!$ читается «n факториал» и вычисляется по формуле

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

- Например, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6,$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120,$$

- Считают, что $0! = 1$

Число перестановок

- Доказательство теоремы 1.
- Любую перестановку из n элементов можно получить с помощью n действий:

1) выбор первого элемента n различными способами,
2) выбор второго элемента из оставшихся (n-1) элементов, т.е. (n-1) способом,
3) выбор третьего элемента (n-2) способами,

……

n) выбор n-го элемента 1 способом.

По правилу умножения число всех способов выполнения действий, т.е. число перестановок, равно

$$n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = n!$$

Теорема доказана.

Перестановки

- Число всех перестановок обозначается P_n
- Итак, $P_n = n!$

Пример

В команде 6 человек. Сколькими способами они могут построиться для приветствия?

Решение

Число способов построения равно числу перестановок 6 элементов, т.е.

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

Перестановки с повторениями

Теорема 2

- Число перестановок n – элементов, в котором есть одинаковые элементы, а именно n_i элементов *i* –того типа $(i = 1,2,...,k)$ вычисляется по формуле

$$P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{(n_1 + n_2 + ... + n_k)!}{n_1! n_2! ... n_k!},$$

где $$n = n_1 + n_2 + ... + n_k$$

Доказательство. Так как перестановки между одинаковыми элементами не изменяют вид перестановки в целом, количество перестановок всех элементов множества нужно разделить на число перестановок одинаковых элементов.

Пример

- <u>**Задача**</u>**:** Сколько слов можно составить, переставив буквы в слове «экзамен», а в слове «математика»?
- **Решение:** В слове «экзамен» все буквы различны, поэтому используем формулу для числа перестановок без повторений

$$P_7 = 7! = 5040.$$

- В слове «математика» 3 буквы «а», 2 буквы «м», 2 буквы «т», поэтому число перестановок всех букв разделим на число перестановок повторяющихся букв:

$$P(2,3,2,1,1,1) = \frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 151200$$

Размещения

Размещения

- **Определение 1**

Размещением из n элементов по k называется всякая перестановка из k элементов, выбранных каким-либо способом из данных n.

Пример

Дано множество $A=\{a;b;c\}$. Составим все 2-размещения этого множества.

$$(a;b);(b;a);(a;c);(c;a);(b;c);(c;b)$$

Число размещений

- **Теорема 1** Число всех размещений из n элементов по k вычисляется по формуле

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1).$$

- **Доказательство.** Каждое размещение можно получить с помощью k действий:
- 1) выбор первого элемента n способами;
- 2) выбор второго элемента (n-1) способами;
- и т. д.
- k) выбор k –го элемента (n-(k-1))=(n-k+1) способами.

По правилу умножения число всех размещений будет n(n-1)(n-2)…(n-k+1). Теорема доказана.

Число размещений

- **Замечание.** Формулу для числа размещений можно записать в виде

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

- Действительно

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{(n-k)!(n-k+1)\cdot\ldots\cdot(n-1)n}{(n-k)!} = (n-k+1)\cdot\ldots\cdot(n-1)n.$$

Пример

- Абонент забыл последние 3 цифры номера телефона. Какое максимальное число номеров ему нужно перебрать, если он вспомнил, что эти последние цифры разные?
- **Решение.**

Задача сводится к поиску различных перестановок 3 элементов из 10 (так как всего цифр 10). Применим формулу для числа перестановок.

$$A_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{7!} = 720$$

Размещения с повторениями

- **Определение 2**

Размещением с повторением из n элементов по k называется всякая перестановка из k элементов, выбранных каким-либо способом из данных n элементов возможно с повторениями.

- **Пример**

Дано множество $A=\{a;b;c\}$

Составим 2- размещения с повторениями:

$$(a;b);(b;a);(a;c);(c;a);(b;c);(c;b);(a;a);(b;b);(c;c)$$

Число размещений с повторениями

Теорема 2. Число k- размещений с повторениями из n элементов вычисляется по формуле

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

Доказательство. Каждый элемент размещения можно выбрать n способами. По правилу умножения число всех размещений с повторениями равно

$$\underbrace{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}_{k} = n^k.$$

Пример

- Сколько существует номеров машин?

- Решение. Считаем, что в трех буквах номера машины не используются буквы «й», «ы», «ь», «ъ», тогда число перестановок букв равно $\overline{A}_{29}^{3} = 29^{3}$.

Число перестановок цифр равно $\overline{A}_{10}^{3} = 10^{3}$.

По правилу умножения получим число номеров машин

$$\overline{A}_{10}^{3} \cdot \overline{A}_{29}^{3} = 29^{3} \cdot 10^{3} = 24389000$$

Решение задач

Задачи

- 1)Сколькими способами можно составить список из 8 учеников, если нет полного совпадения ФИО?
- **Решение**

Задача сводится к подсчету числа перестановок ФИО.

$$P_8 = 8! = 40320$$

Задачи

- 2)Сколькими способами можно составить список 8 учеников, так, чтобы два указанных ученика располагались рядом?
- **Решение**

Можно считать двоих указанных учеников за один объект и считать число перестановок уже 7 объектов, т.е. $P_7 = 7! = 5040$

Так как этих двоих можно переставлять местами друг с другом, необходимо умножить результат на 2!

$$P_7 \cdot 2! = 7! \cdot 2! = 5040 \cdot 2 = 10080$$

Задачи

- 3) Сколькими способами можно разделить 11 спортсменов на 3 группы по 4, 5 и 2 человека соответственно?
- **Решение.** Сделаем карточки: четыре карточки с номером 1, пять карточек с номером 2 и две карточки с номером 3. Будем раздавать эти карточки с номерами групп спортсменам, и каждый способ раздачи будет соответствовать разбиению спортсменов на группы. Таким образом нам необходимо посчитать число перестановок 11 карточек, среди которых четыре карточки с одинаковым номером 1, пять карточек с номером 2 и две карточки с номером 3.

$$P(4,5,2) = \frac{11!}{4!5!2!} = \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 1\cdot 2} = 6930$$

Задачи

- 4) Сколькими способами можно вызвать по очереди к доске 4 учеников из 7?
- **Решение.** Задача сводится к подсчету числа размещений из 7 элементов по 4

$$A_7^4 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 840$$

Задачи

- 5)Сколько существует четырехзначных чисел, у которых все цифры различны?
- **Решение.** В разряде единиц тысяч не может быть нуля, т.е возможны 9 вариантов цифры.

  В остальных трех разрядах не может быть цифры, стоящей в разряде единиц тысяч (так как все цифры должны быть различны), поэтому число вариантов вычислим по формуле размещений без повторений из 9 по 3

$$A_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$$

По правилу умножения получим $9 \cdot A_9^3 = 4536$

Задачи

- 6)Сколько существует двоичных чисел, длина которых не превосходит 10?
- **Решение.** Задача сводится к подсчету числа размещений с повторениями из двух элементов по 10

$$\overline{A}_2^{10} = 2^{10} = 1024$$

Задачи

- 7)В лифт 9 этажного дома зашли 7 человек. Сколькими способами они могут распределиться по этажам дома?
- **Решение.** Очевидно, что на первом этаже никому не надо выходить. Каждый из 7 человек может выбрать любой из 8 этажей, поэтому по правилу умножения получим

$$\underbrace{8 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 8}_{7} = 8^7 = 2097152$$

- Можно так же применить формулу для числа размещений с повторениями из 8 (этажей) по 7(на каждого человека по одному этажу)

$$\overline{A}_8^7 = 8^7$$

Задачи

- 8)Сколько чисел, меньше 10000 можно написать с помощью цифр 2,7,0?
- **Решение.** Так как среди цифр есть 0, то, например запись 0227 соответствует числу 227, запись 0072 соответствует числу 72, а запись 0007 соответствует числу 7. Таким образом, задачу можно решить, используя формулу числа размещений с повторениями

$$\overline{A}_3^4 = 3^4 = 81$$