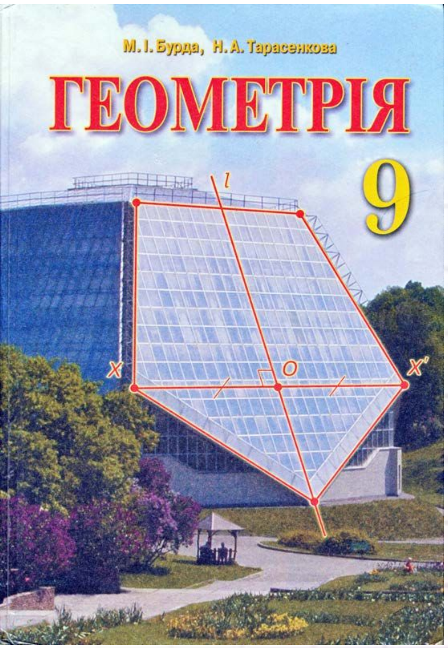
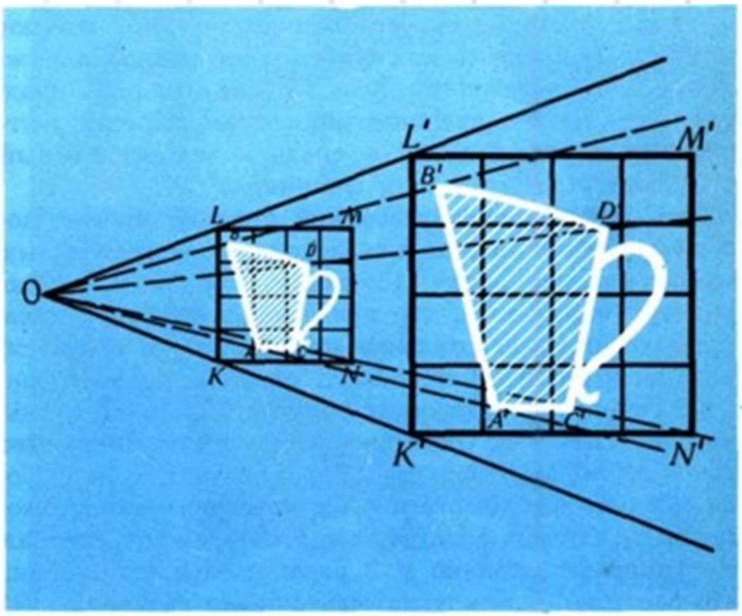


Геометрія
9А , 9В класи
вчитель Тарасенко О. М.

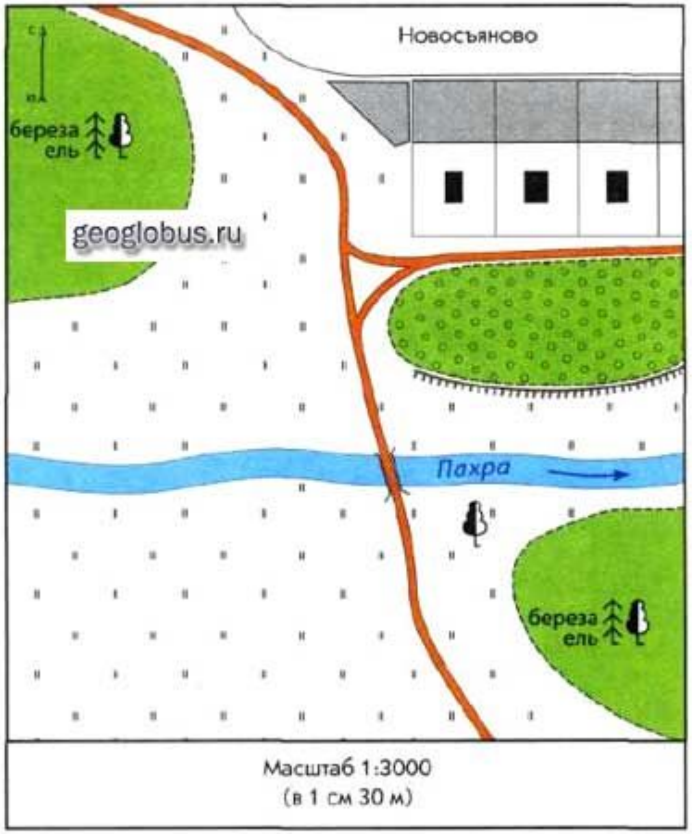
Розділ 4. Геометричні перетворення

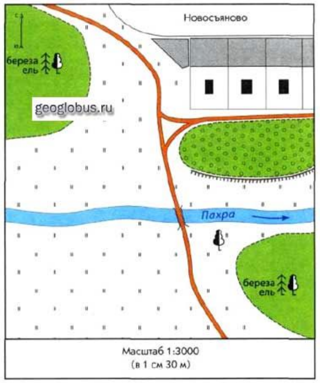
Тема уроку:
Перетворення подібності. Гомотетія



Поняття перетворення подібності

Один план місцевості отримали з іншого “перетворенням подібності”

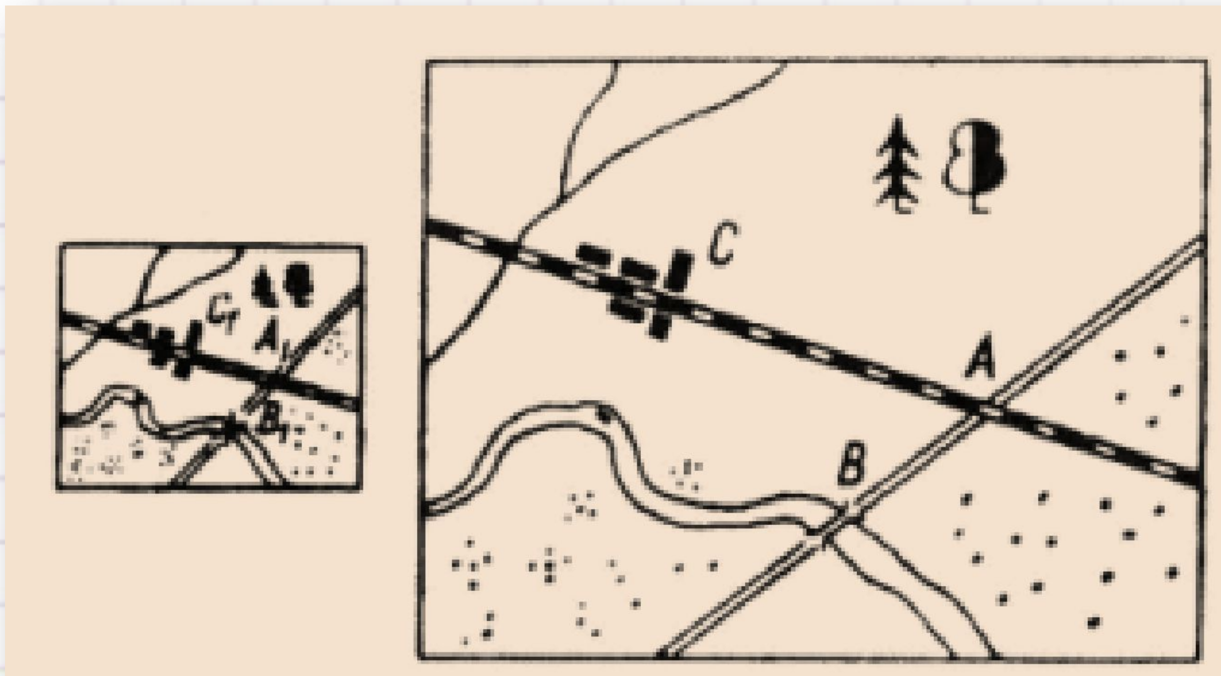




- Подивіться на малюнок.

З одного плану ділянки місцевості виготовили інший. При цьому відношення відстаней між відповідними парами точок на планах рівні і дорівнюють 2,5 (відношенню масштабів): $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$=$\frac{BC}{B_1C_1}$=…=2,5.

Можна сказати, що один план отримали з іншого перетворенням подібності.

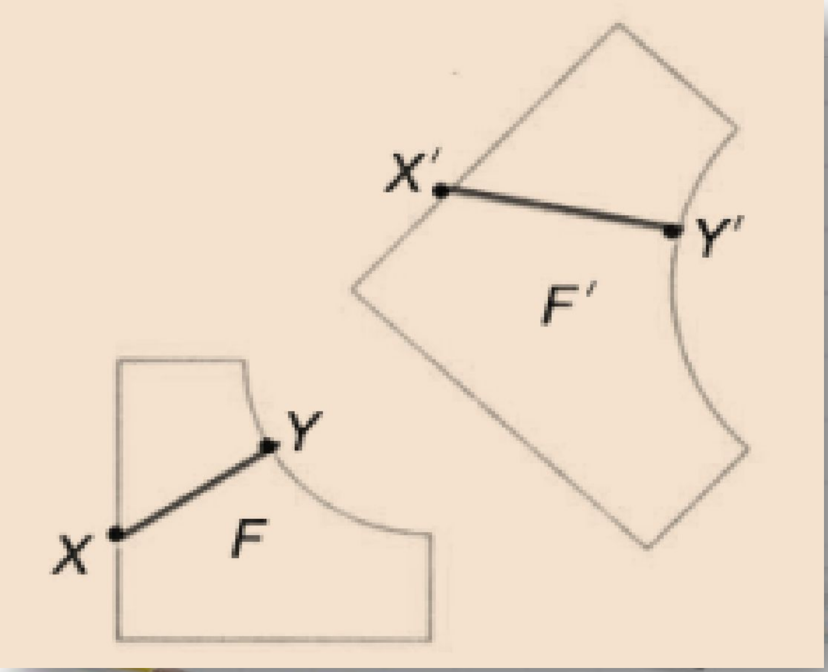


Перетворення подібності

- Перетворення, що переводить фігуру F у фігуру F', при якому відстані між відповідними точками змінюються в тому самому відношенні $k>0$, називається перетворенням подібності, або подібністю.

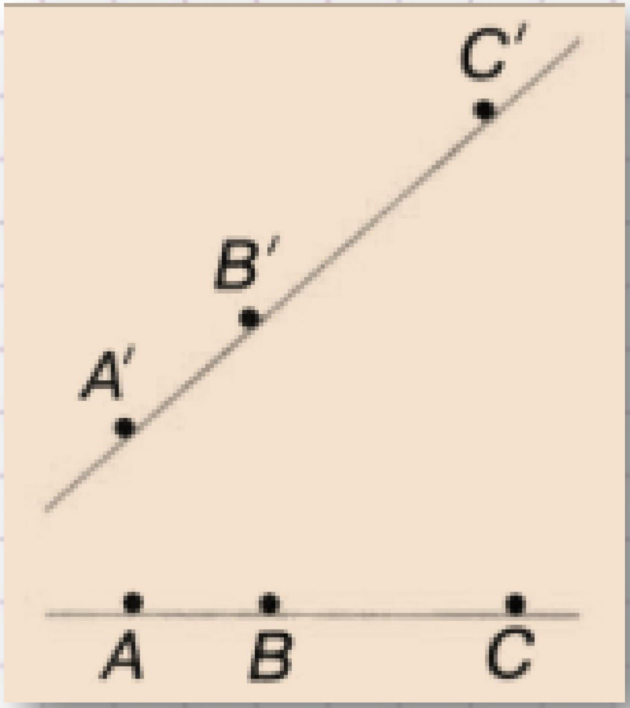
Це означає, що коли довільні точки X і Y фігури F при перетворенні подібності переходять у точки X' і Y' фігури F', то $X'Y' = k*XY$, де $k>0$.

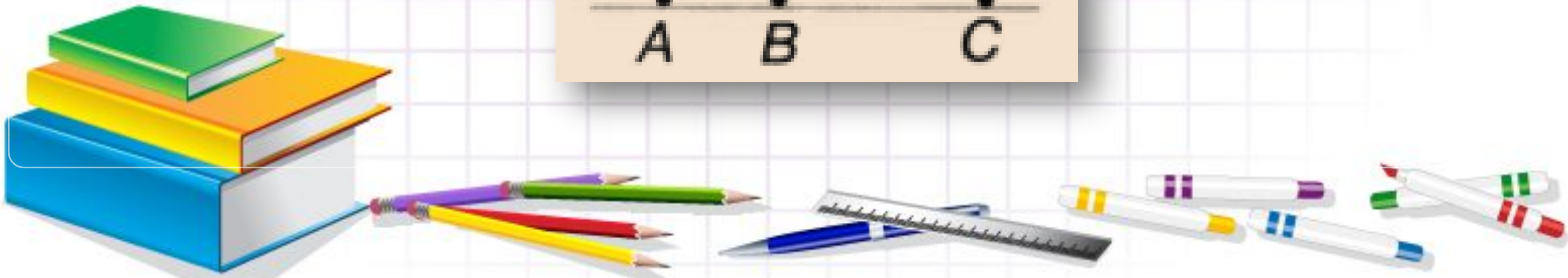
Число k називається коефіцієнтом подібності.



Властивість перетворення подібності

Теорема. При перетворенні подібності точки, що лежать на прямій, переходять у точки, що лежать на прямій, і зберігається порядок їх взаємного розміщення.





Властивість перетворення подібності

Доведення.

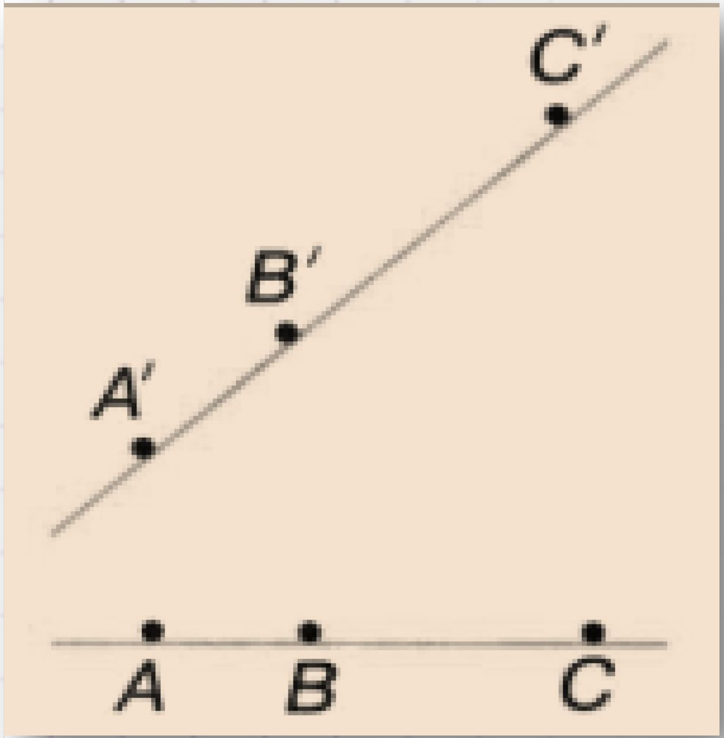
Нехай точки A, B і C лежать на одній прямій і точка влежить між точками A і C.

Тоді $AC = AB + BC$. Деяке перетворення подібності переводить точки A, B, C у точки $A'B'C'$.

За означенням перетворення подібності, маємо:

$A'C' = k \cdot AC = k \cdot (AB + BC) = k \cdot AB + k \cdot BC = A'B' + B'C'$.

З рівності $A'C' = A'B' + B'C'$ випливає, що точки A', B', C' лежать на одній прямій, а точка B' лежить між точками A' і C'.

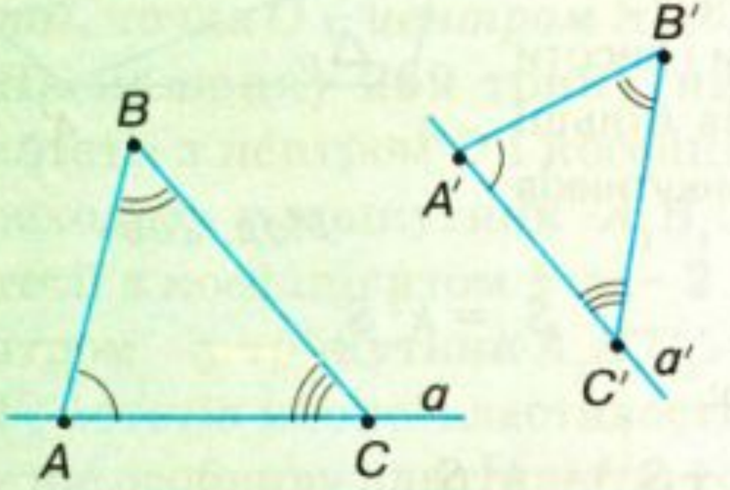


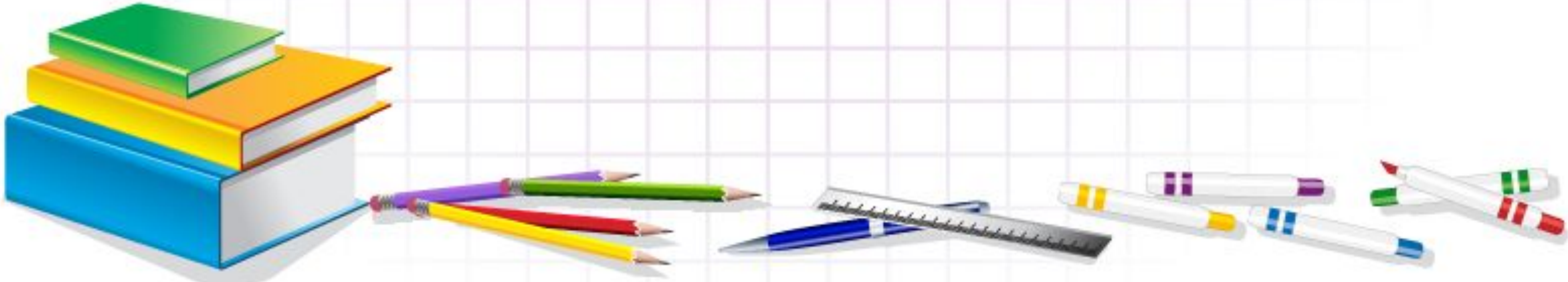
Властивість перетворення подібності

<u>Наслідок.</u> Перетворення подібності прямі переводить у прямі, промені – у промені, відрізки –у відрізки.

Перетворення подібності кут переводить у рівний йому кут

Властивість перетворення подібності

Перетворення подібності	Властивості
	1. Пряма переходить у пряму (a в a'), промінь — у промінь. 2. Відрізок переходить у відрізок (AB у $A'B'$, BC у $B'C'$, AC у $A'C'$). 3. Кут переходить у рівний йому кут ($\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$).

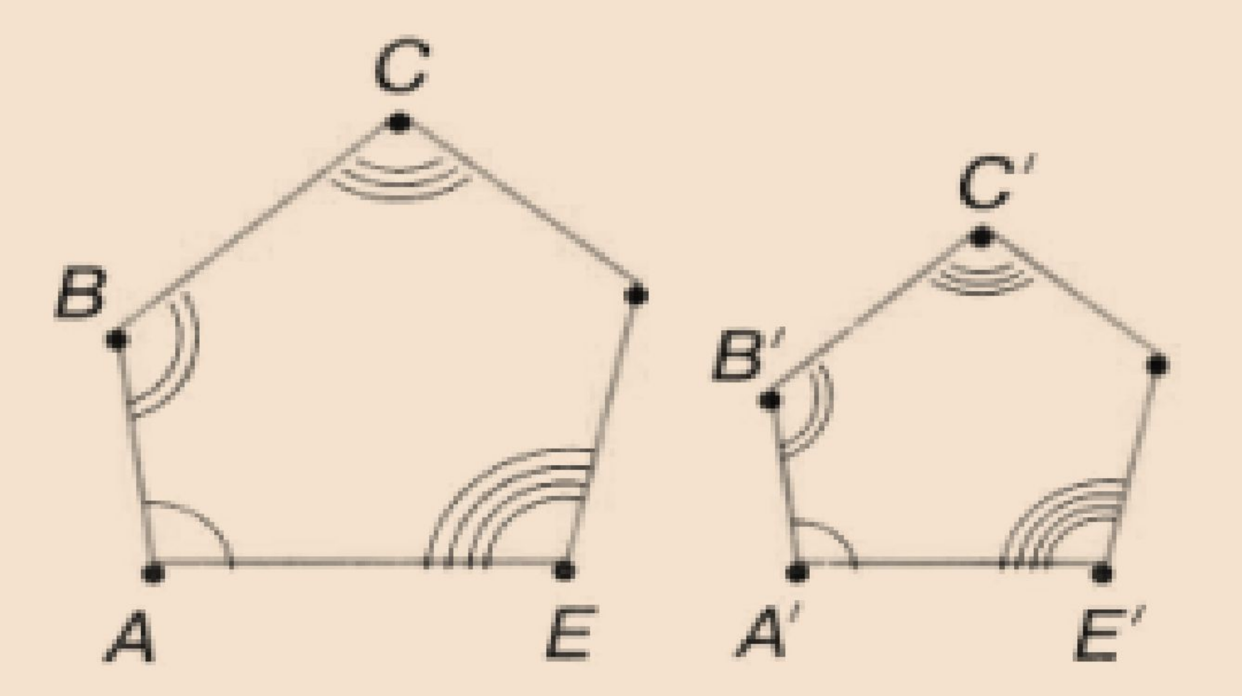


Подібні фігури

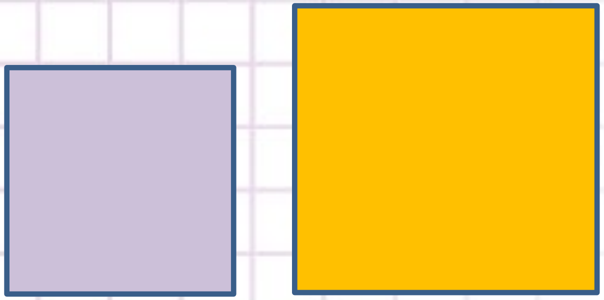
- **Дві фігури називаються подібними, якщо вони переводяться одна в одну перетворенням подібності.**

Якщо фігура F подібна фігурі F', то записують $F \sim F'$.

З властивостей перетворення подібності випливає, що у подібних фігур відповідні кути рівні, а відповідні відрізки - пропорційні.



Приклади подібних фігур



Відношення площ подібних многокутників

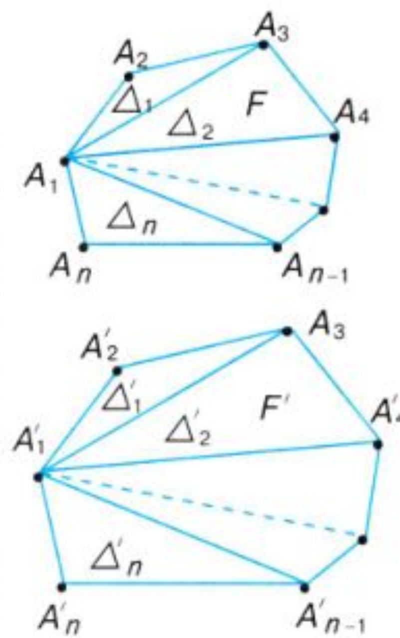
<u>Теорема</u>. Відношення площ подібних многокутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності.

Коефіцієнт подібності k дорівнює відношенню довжин відповідних елементів подібних фігур.

Дано: F і F' – подібні многокутники з коефіцієнтом подібності k (мал. 266)

Довести: $\dfrac{S_{F'}}{S_F} = k^2$.

Доведення. Розіб'ємо многокутник F на трикутники $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ (мал. 266). Оскільки многокутники F і F' подібні, то існує перетворення подібності, яке переводить многокутник F у многокутник F', а трикутники розбиття многокутника F у трикутники $\Delta'_1, \Delta'_2, \ldots, \Delta'_n$ відповідного розбиття многокутника F'. Площа многокутника F дорівнює сумі площ трикутників $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, а площа многокутника F' дорівнює сумі площ трикутників $\Delta'_1, \Delta'_2, \ldots, \Delta'_n$. Якщо коефіцієнт подібності k, то сторони і висоти трикутників многокутника F' у k разів більші (мал. 266) за відповідні сторони і висоти трикутників многокутника F.



Мал. 266

Звідси випливає: $S_{\Delta'_1} = k^2 S_{\Delta_1}$, $S_{\Delta'_2} = k^2 S_{\Delta_2}$, …, $S_{\Delta'_n} = k^2 S_{\Delta_n}$.

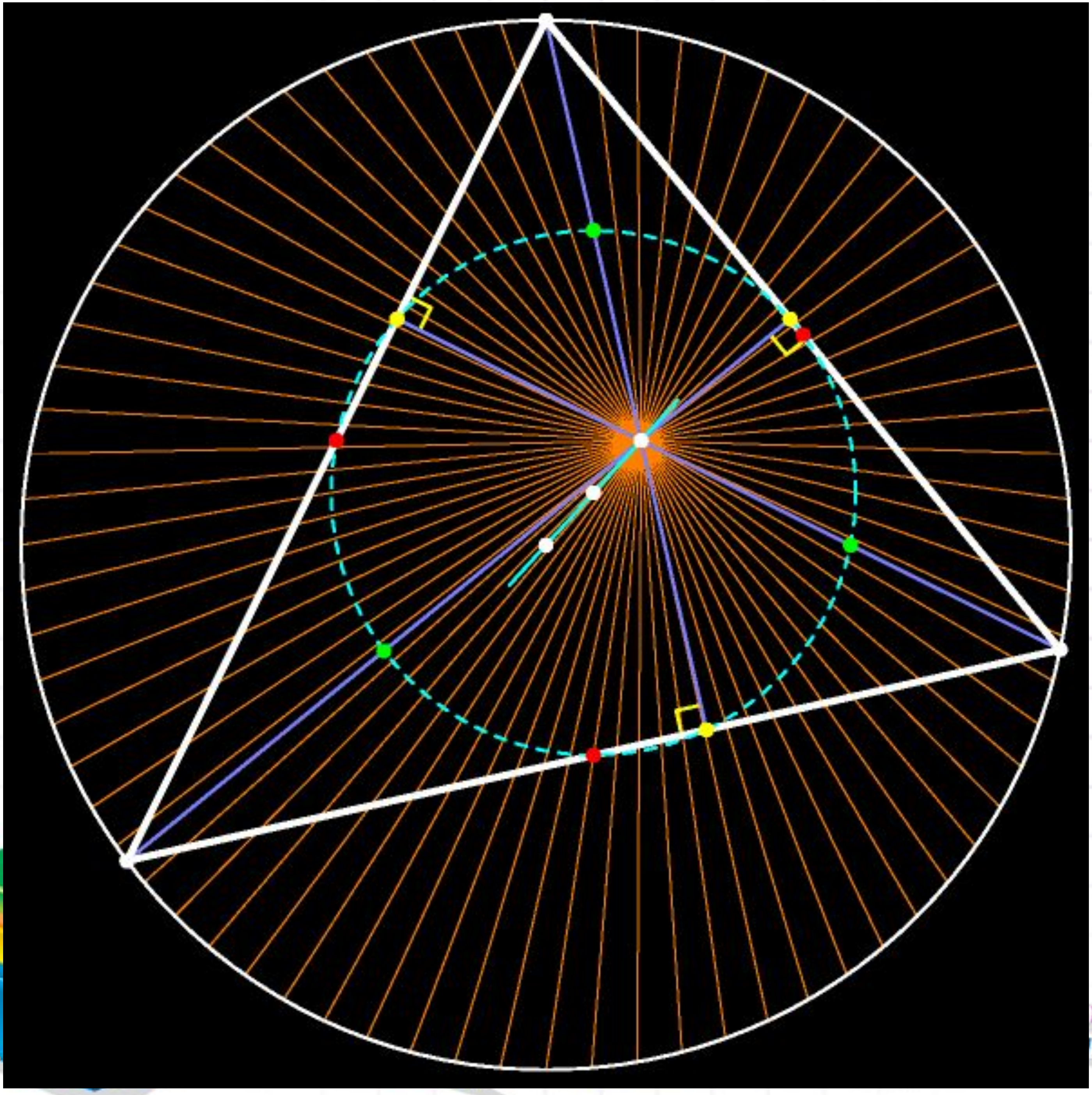
Додавши ці рівності почленно, дістанемо:

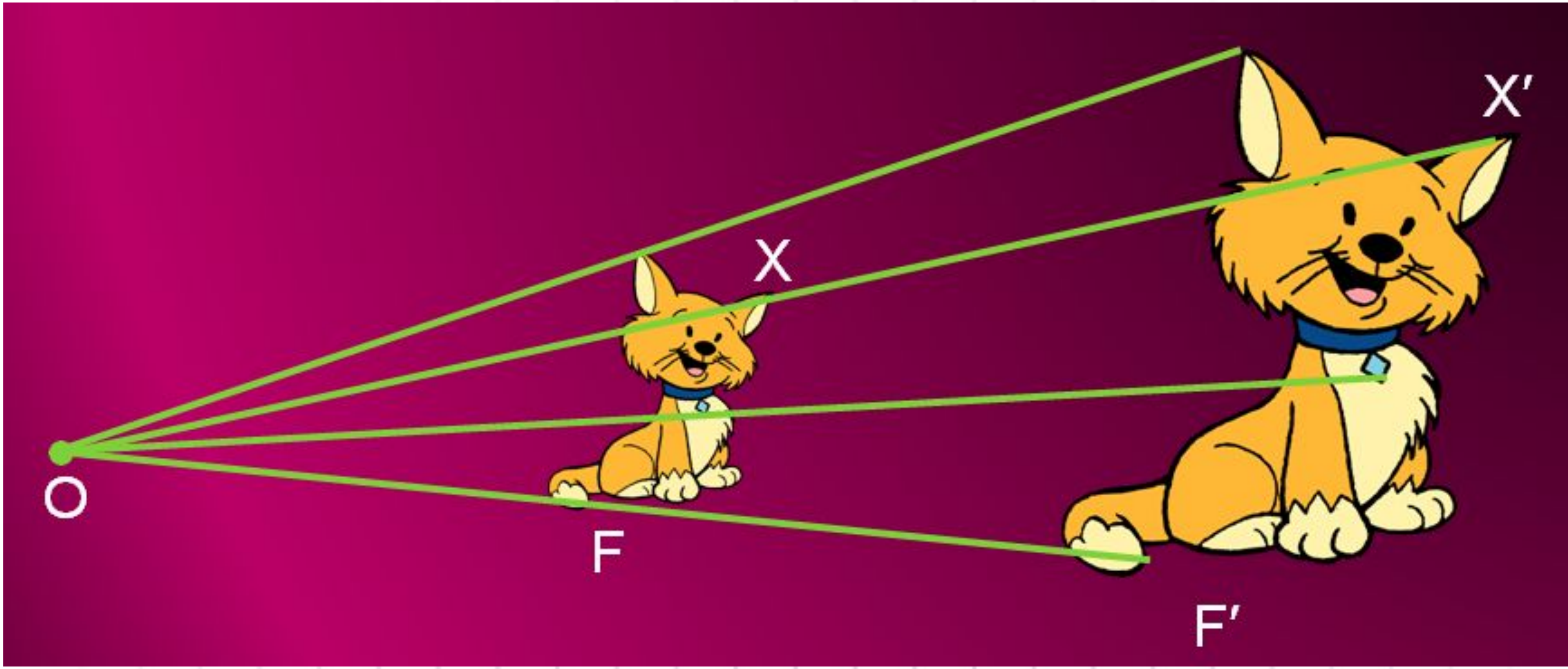
$$S_{F'} = S_{\Delta'_1} + S_{\Delta'_2} + \ldots + S_{\Delta'_n} = k^2 (S_{\Delta_1} + S_{\Delta_2} + \ldots + S_{\Delta_n}) = k^2 S_F.$$

Звідки $\dfrac{S_{F'}}{S_F} = k^2$.

Цей факт справджується для будь-яких фігур.

ГОМОТЕТІЯ



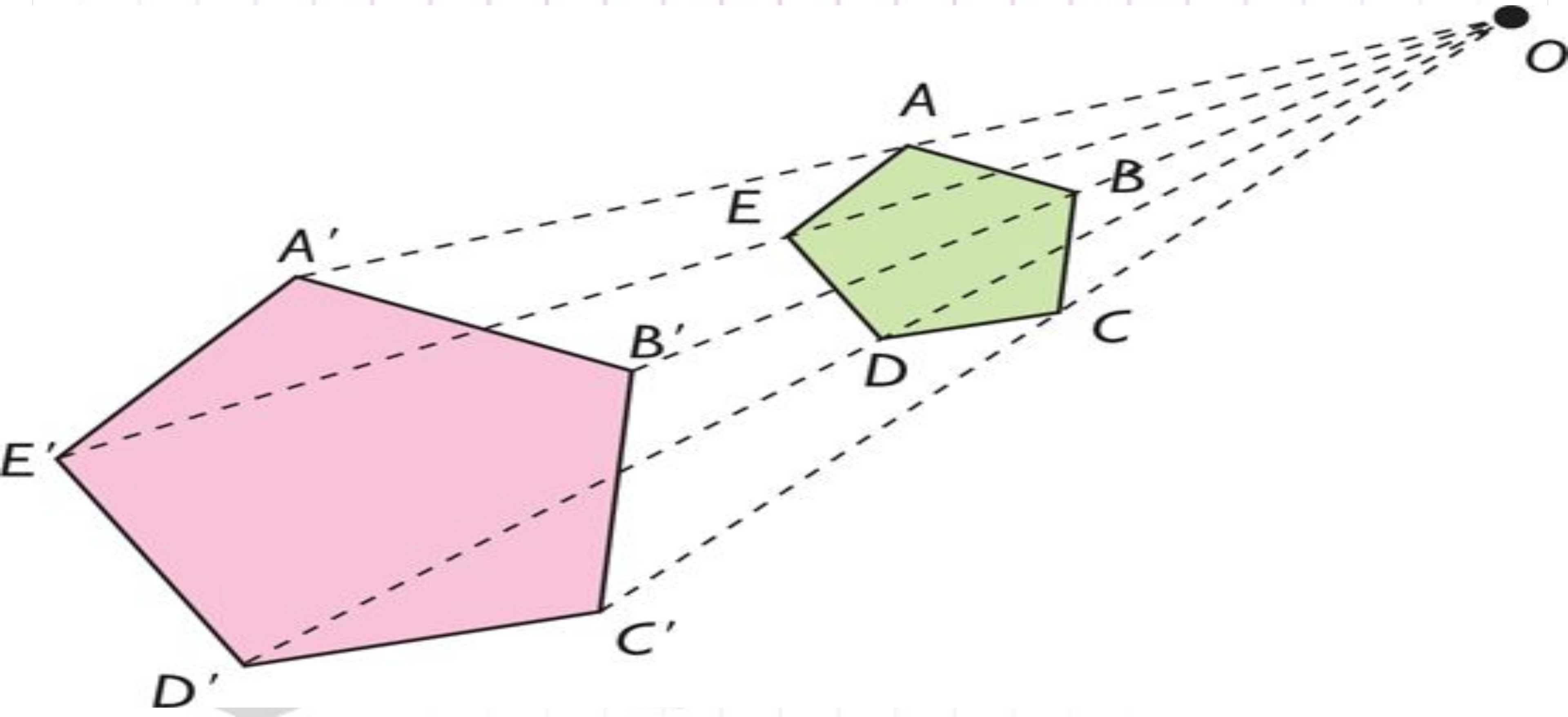

X′
X
O
F
F′

Гомотетія

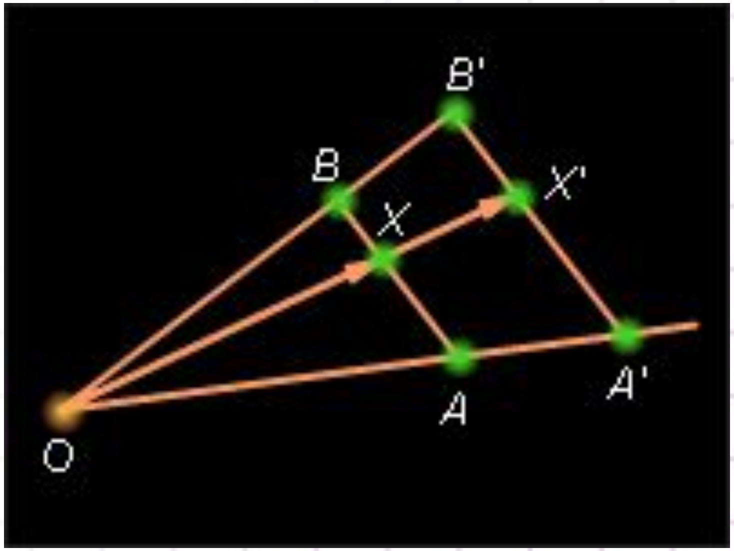
- Побудуємо подібні фігури.

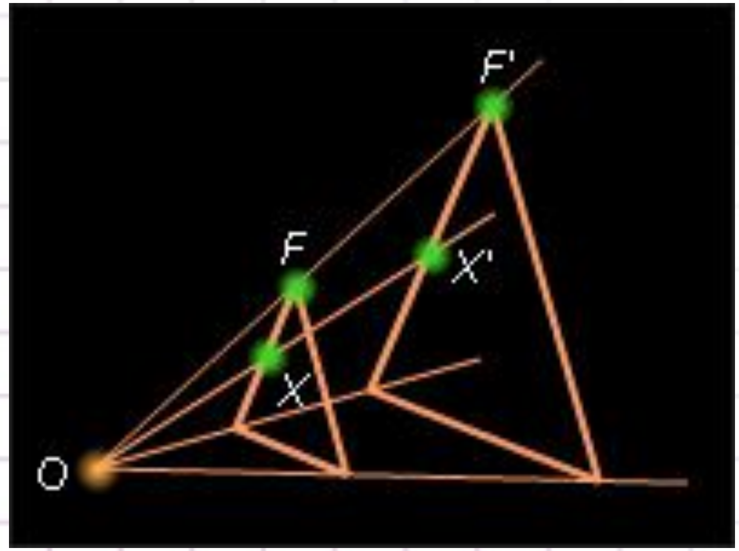
Нехай F – дана фігура (ABCDE). Позначимо довільну точку O. Через кожну точку фігури F проведемо промені OA, OB, OC, OD, OE та відкладемо на них відрізки k*OA, …, k*OE. Отримаємо шукану фігуру F' $(A'B'C'D'E')$.

Фігури F і F1 називають гомотетичними з коефіцієнтом гомотетії k і центром гомотетії у точці O.

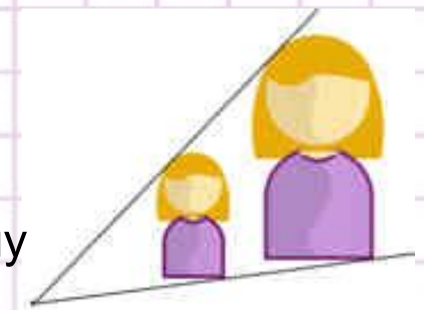


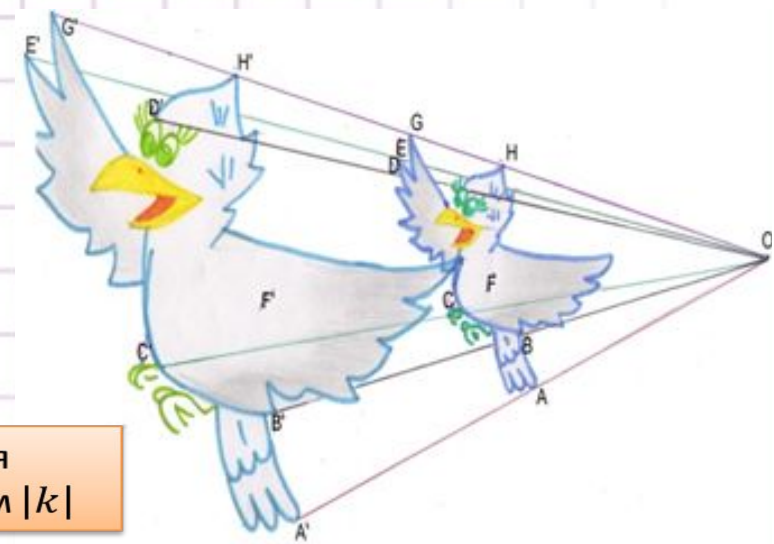
Гомотетія





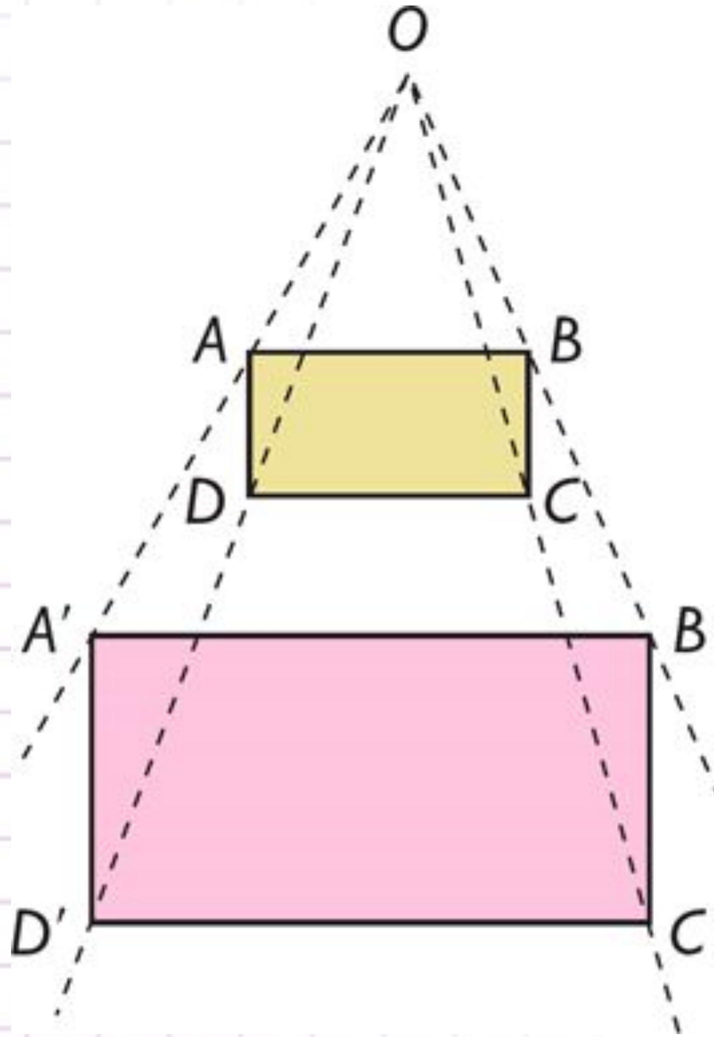
Гомотетія має всі властивості перетворення подібності. Крім того, вона ще має особливу властивість: гомотетія переводить пряму у паралельну їй пряму або у саму себе, якщо дана пряма проходить через центр гомотетії.

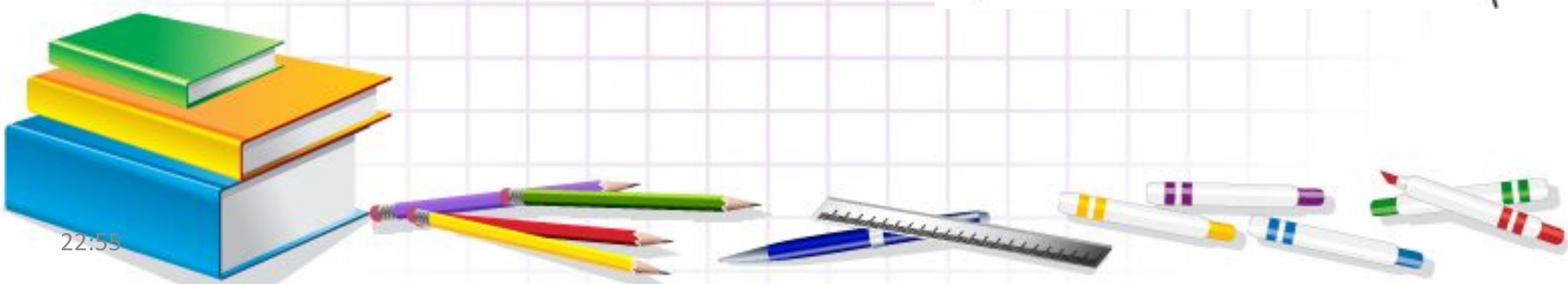




Гомотетія – перетворення подібності з коефіцієнтом $|k|$

Задача.
Сторони прямокутника ABCD дорівнюють 8 см та 10 см. Коефіцієнт гомотетії дорівнює 2. Знайти площу подібного прямокутника $A'B'C'D'$.



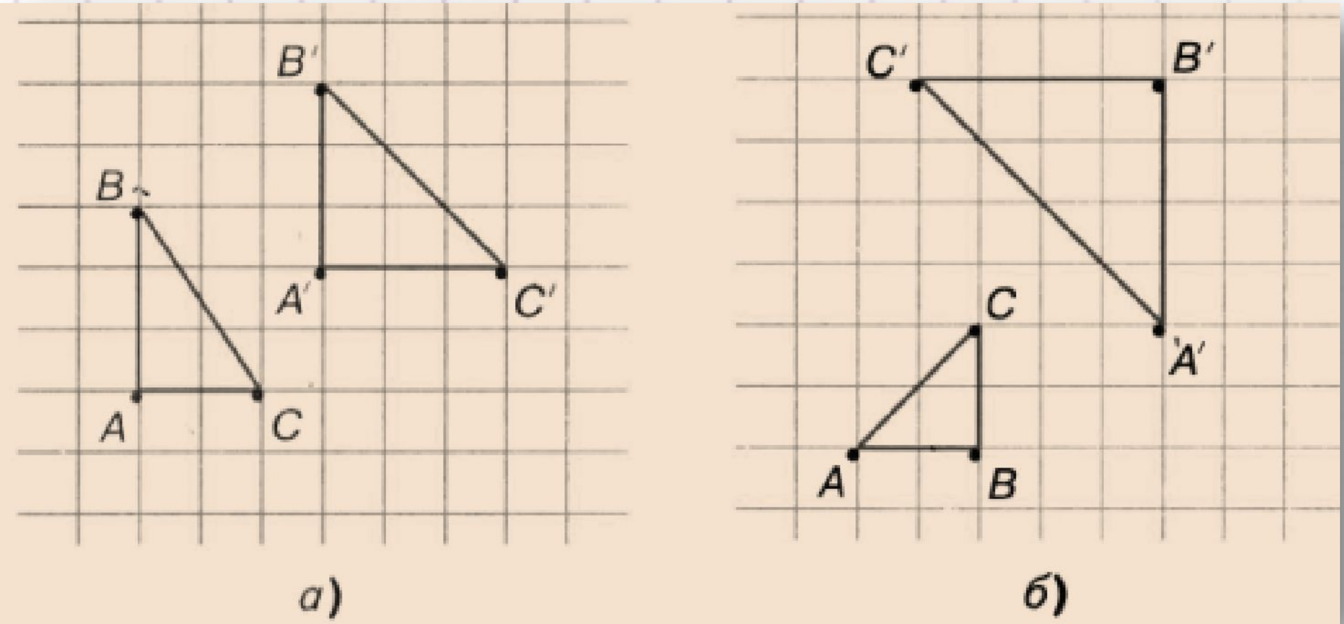


Повторення

1) Що таке перетворення подібності?
2) Як довести, що при перетворенні подібності точки, які лежать на прямій, переходять у точки, які теж лежать на прямій, і зберігається порядок їх взаємного розміщення.
3) У які фігури переходять прямі, промені, відрізки, кути під час перетворення подібності?
4) Які дві фігури називаються подібними? Наведіть приклад подібних фігур.
5) Що таке гомотетія?
6) Що таке центр гомотетії? Коефіцієнт гомотетії?
7) Назвіть властивості гомотетії.

Усні вправи

687. На якому з малюнків а) — б) зображено перетворення подібності, що переводить трикутник АВС у трикутник $A'B'C'$?



Усні вправи

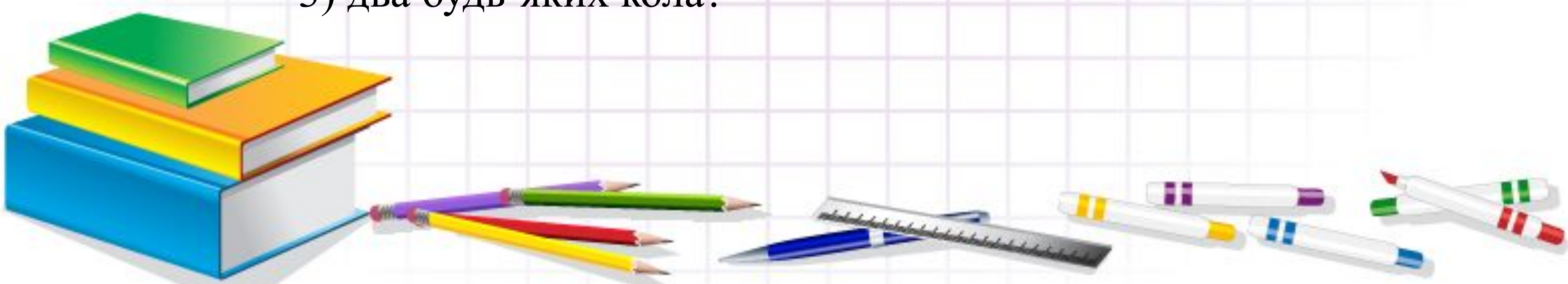
690. За якої умови дві подібні фігури рівні?

691. Побудуйте які-небудь дві подібні, але не рівні фігури.

692. Чи достатньо лише рівності відповідних кутів двох многокутників або лише пропорційності відповідних сторін, щоб ці многокутники були подібними?

693. Чи будуть подібними:

1) два будь-яких квадрати;
2) два будь-яких прямокутники;
3) два будь-яких кола?



Тренувальні вправи

694. Чому дорівнює відношення площ двох подібних многокутників, якщо коефіцієнт їх подібності дорівнює: 1) 0,5; 2) 2; 3) 5?

695. Позначте точки O і X. Побудуйте точку X', в яку переходить точка X при гомотетії з центром O і коефіцієнтом: 1) $k=3$; 2) $k = -3$; 3) $k=1/2$.

696. Гомотетія точку X переводить у точку X'. Побудуйте центр гомотетії, якщо коефіцієнт гомотетії дорівнює: 1) 4; 2) -2; 3) 0,5.

Тренувальні вправи

697. Позначте точки *O* і *A.* Побудуйте точку *A*' так, щоб:

1) $OA' = 3OA$; 2) $0A' = -20A$; 3) $OA' = 1/3*OA$.

698. Гомотетія з центром О точку *A* переводить у точку *A'*. *Я*к розміщені точки *A* і A' відносно центра гомотетії, якщо:

1) $k > 0$; 2) $k < 0$; 3) $k > 1$?

699. Чи подібні два ромби, якщо:

1) кут одного ромба дорівнює 45 , а кут другого — 135°;
2) у кожного з них сторона дорівнює меншій діагоналі?

Домашнє завдання

- Опрацювати п. 21
- Виконати тренувальні вправи

Підсумок уроку

- ✔ З якими новими поняттями ми сьогодні познайомилися?
- ✔ Чого ми навчилися на уроці?
- ✔ Що для вас залишилося не зрозумілим?
- ✔ Чи комфортно вам було працювати на уроці?
- ✔ Ви йдете з уроку задоволені собою?