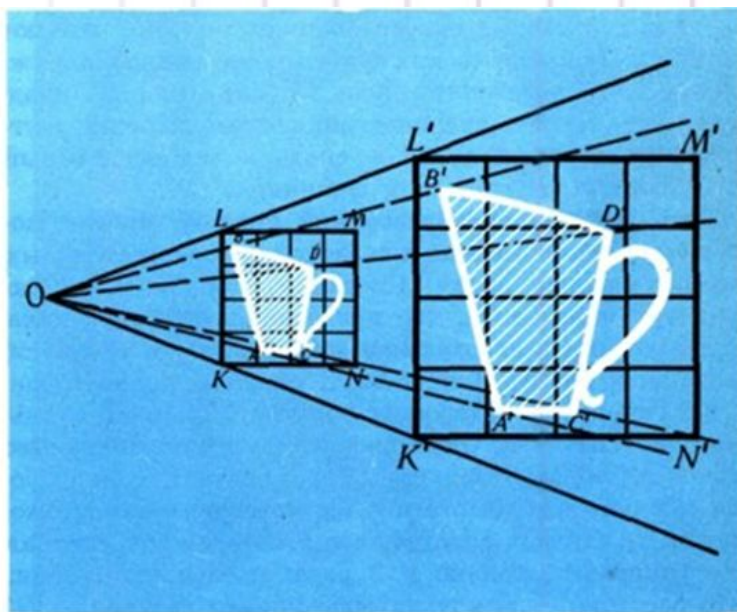


# Геометрія 9А , 9В класи вчитель Тарасенко О. М.

## Розділ 4. Геометричні перетворення

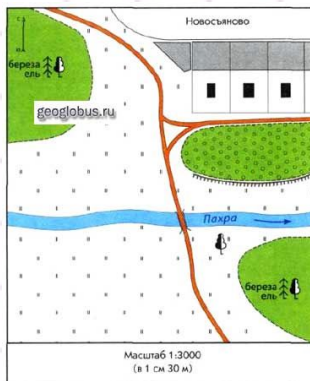
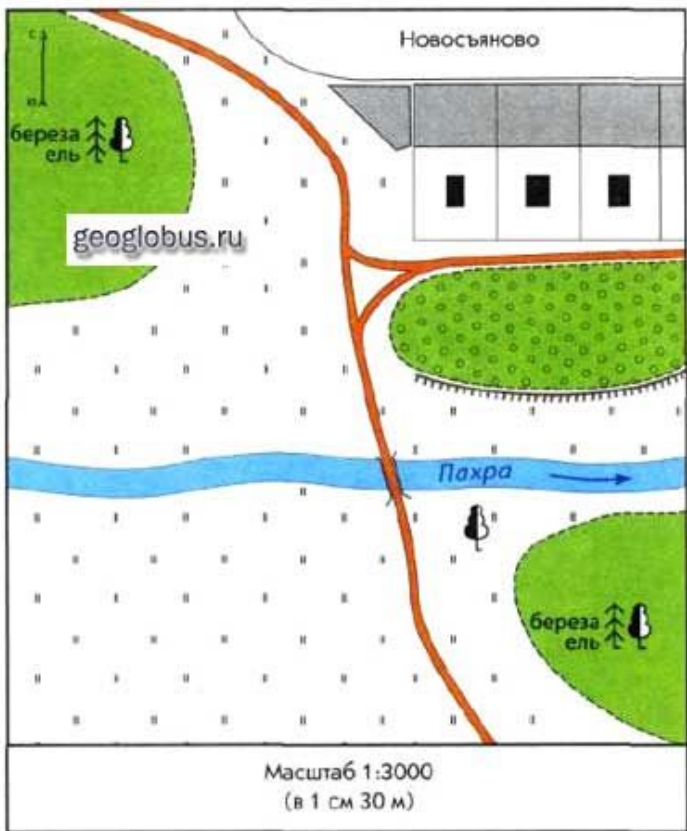


# Тема уроку: Перетворення подібності. Гомотетія



# Поняття перетворення подібності

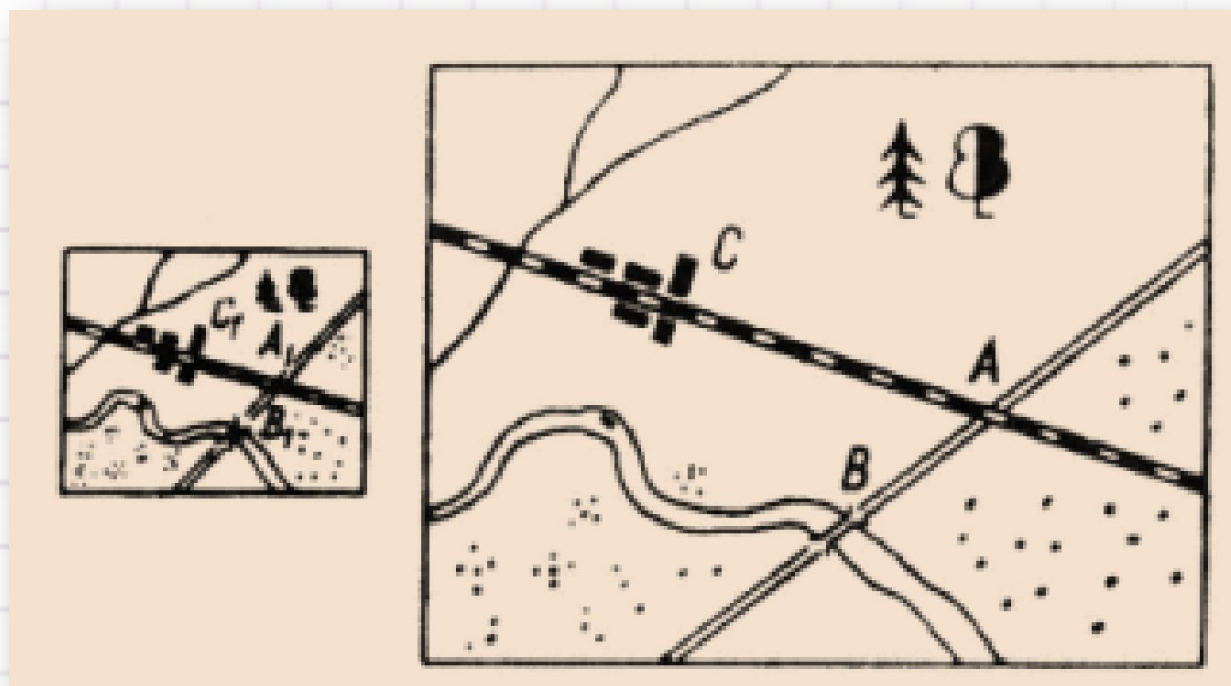
Один план місцевості отримали з іншого “перетворенням подібності”



- Подивіться на малюнок.

З одного плану ділянки місцевості виготовили інший. При цьому відношення відстаней між відповідними парами точок на планах рівні і дорівнюють 2,5 (відношенню масштабів):  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \dots = 2,5$ .

Можна сказати, що один план отримали з іншого перетворенням подібності.

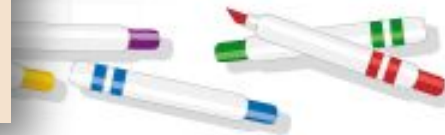
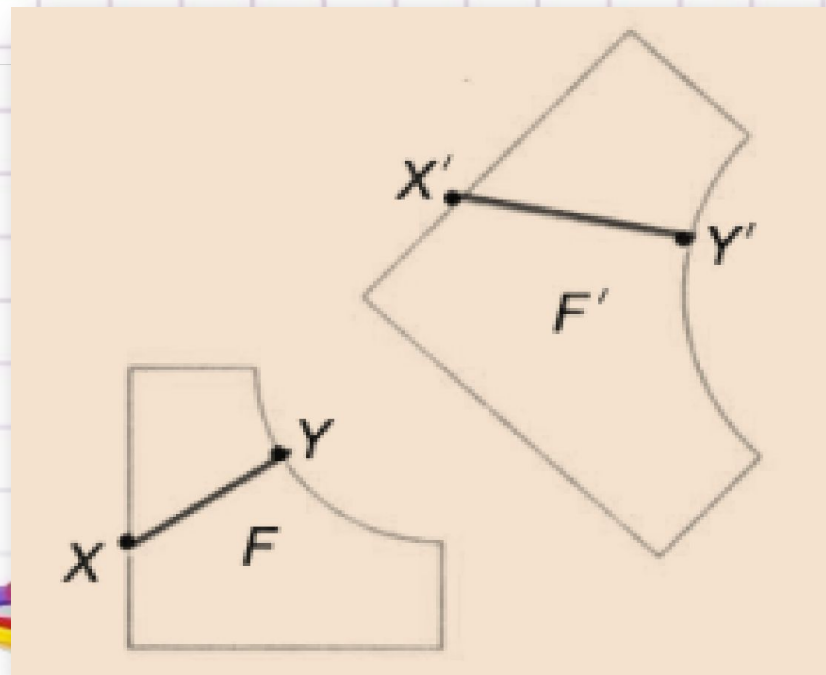


# Перетворення подібності

● Перетворення, що переводить фігуру  $F$  у фігуру  $F'$ , при якому відстані між відповідними точками змінюються в тому самому відношенні  $k > 0$ , називається перетворенням подібності, або подібністю.

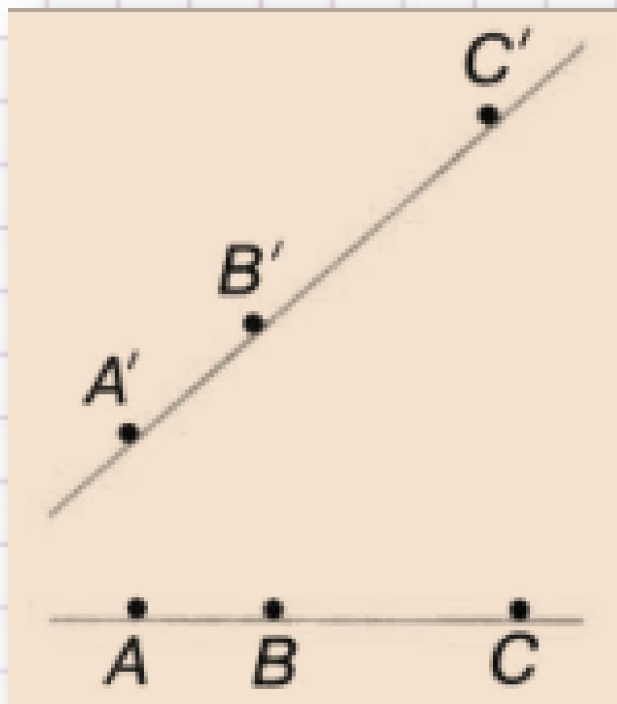
Це означає, що коли довільні точки  $X$  і  $Y$  фігури  $F$  при перетворенні подібності переходять у точки  $X'$  і  $Y'$  фігури  $F'$ , то  $X'Y' = k * XY$ , де  $k > 0$ .

*Число  $k$  називається коефіцієнтом подібності.*



# Властивість перетворення подібності

Теорема. При перетворенні подібності точки, що лежать на прямій, переходять у точки, що лежать на прямій, і зберігається порядок їх взаємного розміщення.



# Властивість перетворення подібності

## Доведення.

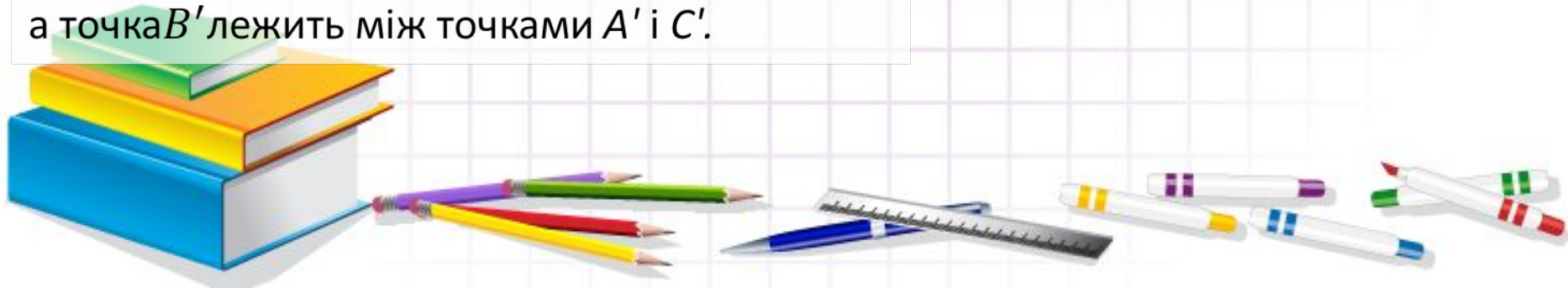
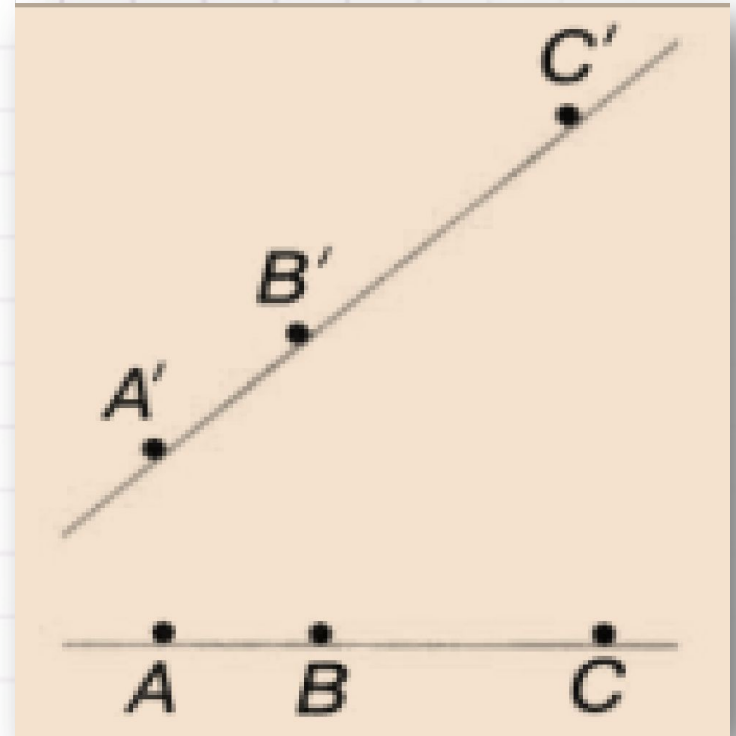
Нехай точки  $A$ ,  $B$  і  $C$  лежать на одній прямій і точка  $B$  вліжить між точками  $A$  і  $C$ .

Тоді  $AC = AB + BC$ . Деяке перетворення подібності переводить точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  у точки  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ .

За означенням перетворення подібності, маємо:

$$A'C' = k \cdot AC = k \cdot (AB + BC) = k \cdot AB + k \cdot BC = A'B' + B'C'.$$

З рівності  $A'C' = A'B' + B'C'$  випливає, що точки  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  лежать на одній прямій, а точка  $B'$  лежить між точками  $A'$  і  $C'$ .



# Властивість перетворення подібності

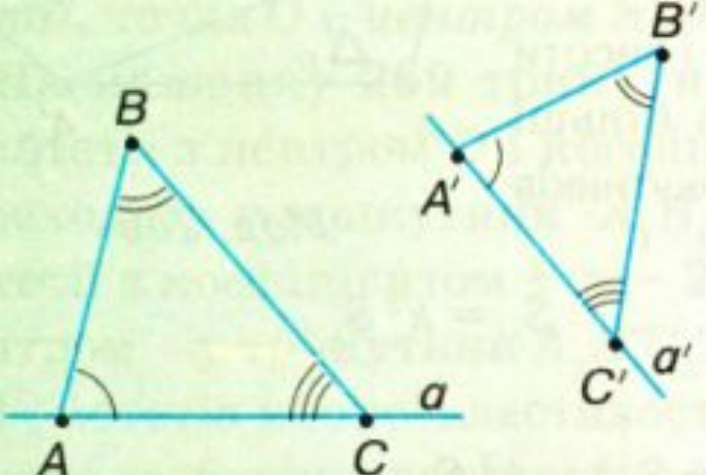
Наслідок. Перетворення подібності прямі переводить у прямі, промені – у промені, відрізки – у відрізки.

Перетворення подібності кут переводить у рівний йому кут





# Властивість перетворення подібності

Перетворення подібності	Властивості
	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Пряма переходить у пряму (<math>a</math> в <math>a'</math>), промінь – у промінь.</li><li>2. Відрізок переходить у відрізок (<math>AB</math> у <math>A'B'</math>, <math>BC</math> у <math>B'C'</math>, <math>AC</math> у <math>A'C'</math>).</li><li>3. Кут переходить у рівний йому кут (<math>\angle A = \angle A'</math>, <math>\angle B = \angle B'</math>, <math>\angle C = \angle C'</math>).</li></ol>

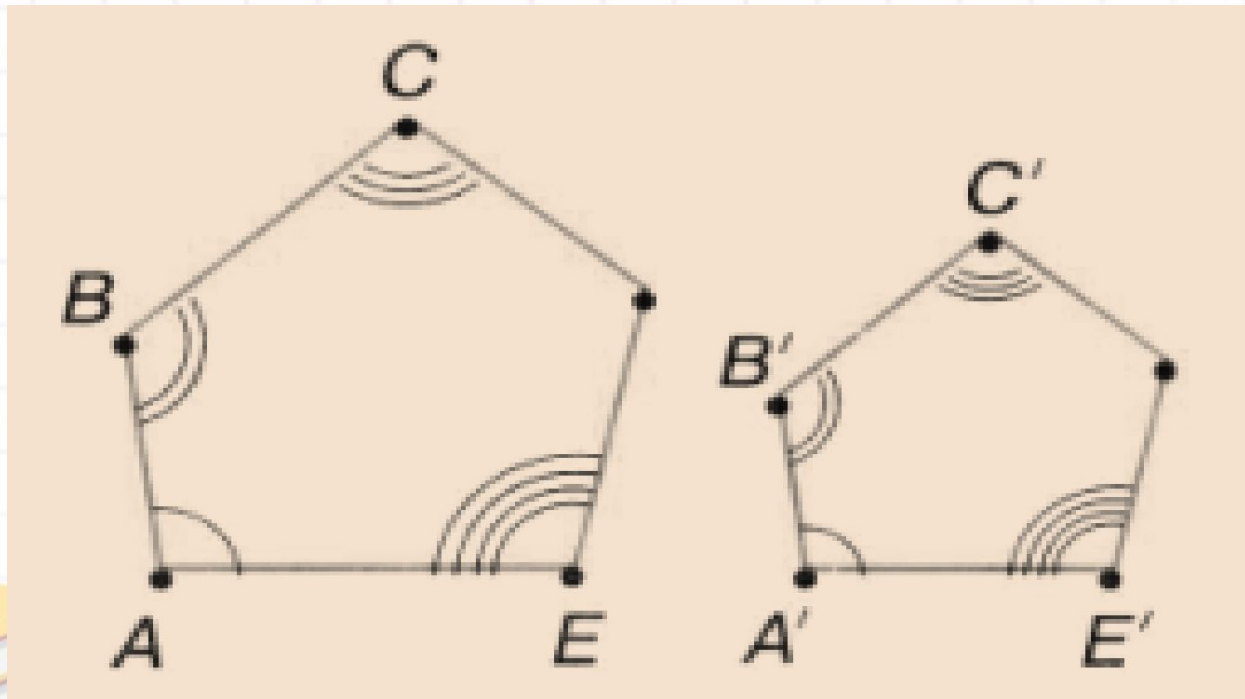


# Подібні фігури

- Дві фігури називаються подібними, якщо вони переводяться одна в одну перетворенням подібності.

Якщо фігура  $F$  подібна фігурі  $F'$ , то записують  $F \sim F'$ .

З властивостей перетворення подібності випливає, що у подібних фігур відповідні кути рівні, а відповідні відрізки - пропорційні.



# Приклади подібних фігур



# Відношення площ подібних многокутників

**Теорема.** Відношення площ подібних многокутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності.

**Коефіцієнт подібності  $k$**  дорівнює відношенню довжин відповідних елементів подібних фігур.



**Дано:**  $F$  і  $F'$  – подібні многокутники з коефіцієнтом подібності  $k$  (мал. 266)

**Довести:**  $\frac{S_{F'}}{S_F} = k^2$ .

**Доведення.** Розіб'ємо многокутник  $F$  на трикутники  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  (мал. 266). Оскільки многокутники  $F$  і  $F'$  подібні, то існує перетворення подібності, яке переводить многокутник  $F$  у многокутник  $F'$ , а трикутники розбиття многокутника  $F$  у трикутники  $\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_n$  відповідного розбиття многокутника  $F'$ . Площа многокутника  $F$  дорівнює сумі площ трикутників  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ , а площа многокутника  $F'$  дорівнює сумі площ трикутників  $\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_n$ . Якщо коефіцієнт подібності  $k$ , то сторони і висоти трикутників многокутника  $F'$  у  $k$  разів більші (мал. 266) за відповідні сторони і висоти трикутників многокутника  $F$ .

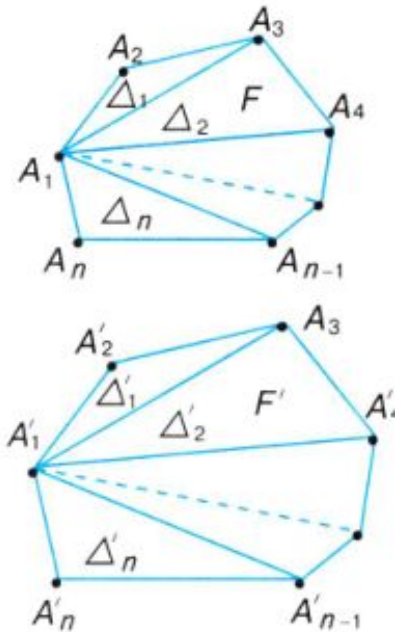
Звідси випливає:  $S_{\Delta'_1} = k^2 S_{\Delta_1}, S_{\Delta'_2} = k^2 S_{\Delta_2}, \dots, S_{\Delta'_n} = k^2 S_{\Delta_n}$ .

Додавши ці рівності почленно, дістанемо:

$$S_{F'} = S_{\Delta'_1} + S_{\Delta'_2} + \dots + S_{\Delta'_n} = k^2 (S_{\Delta_1} + S_{\Delta_2} + \dots + S_{\Delta_n}) = k^2 S_F.$$

Звідки  $\frac{S_{F'}}{S_F} = k^2$ .

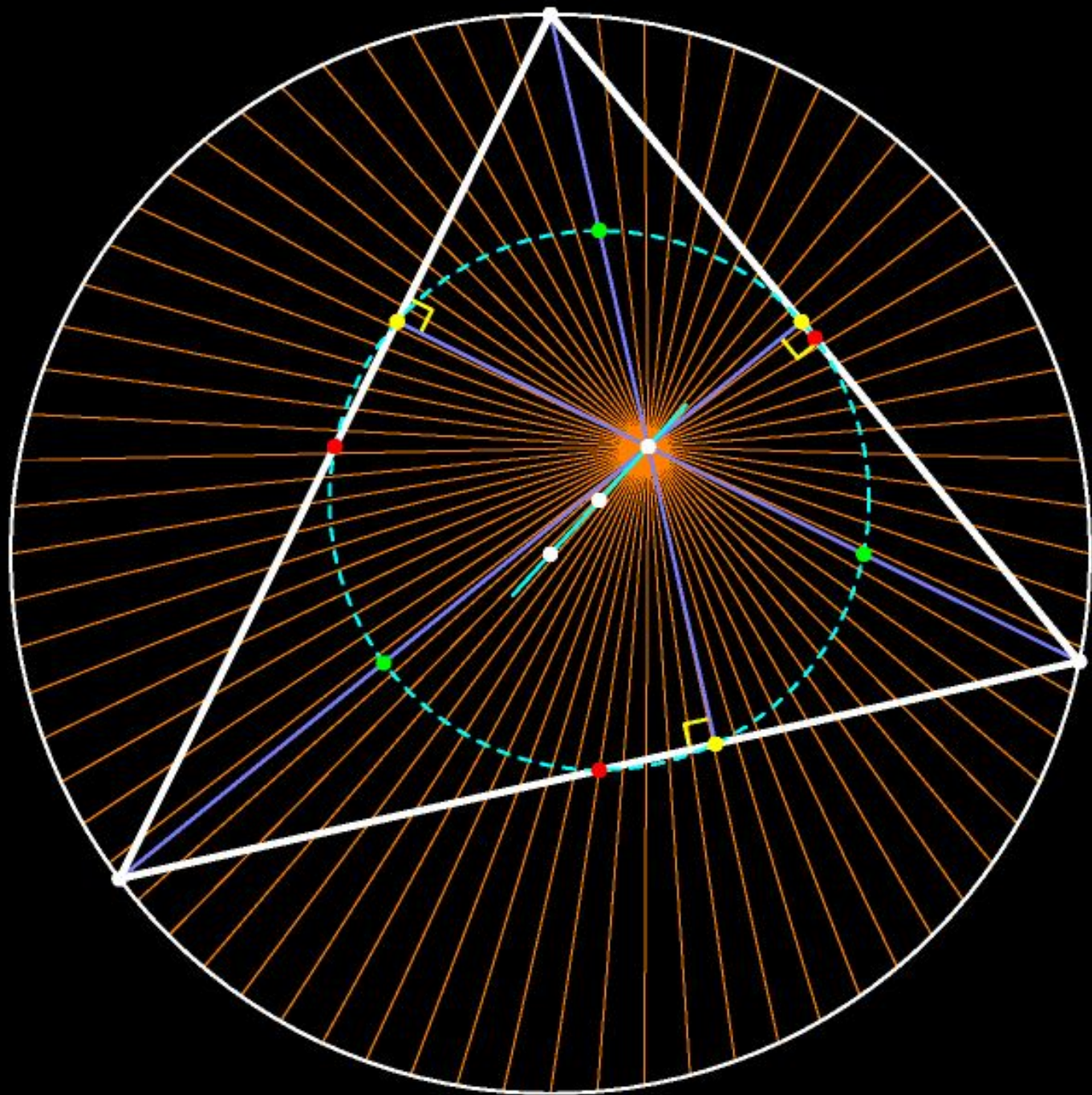
Цей факт справджується для будь-яких фігур.



Мал. 266

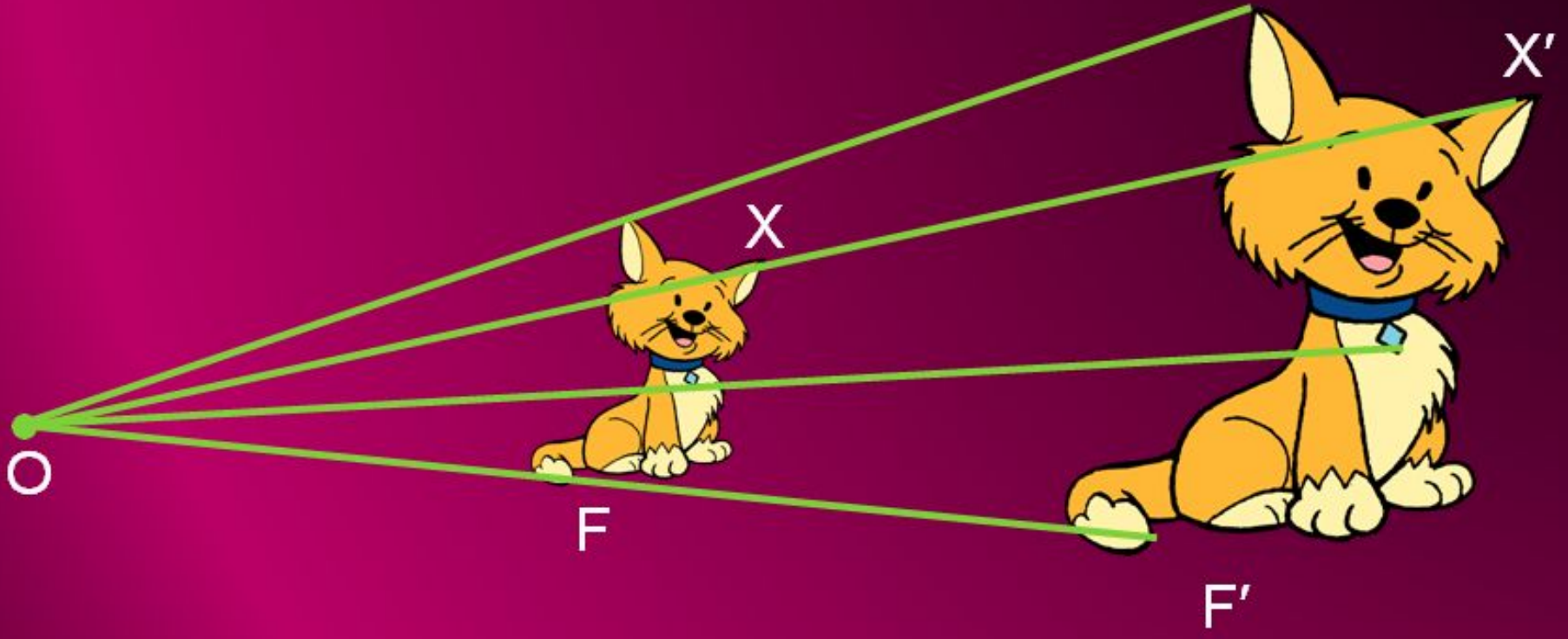
# ГОМОТЕТІЯ





22:55



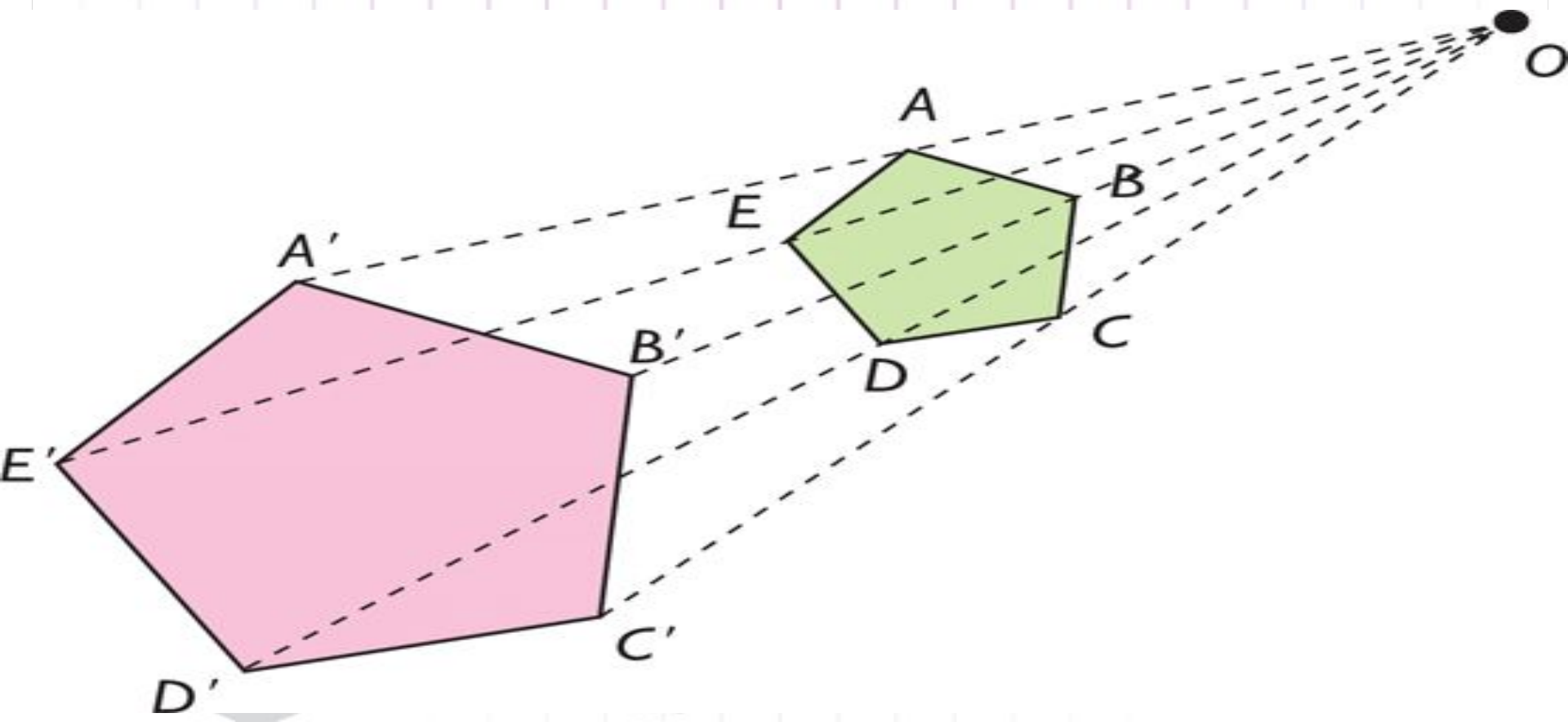


# Гомотетія

- Побудуємо подібні фігури.

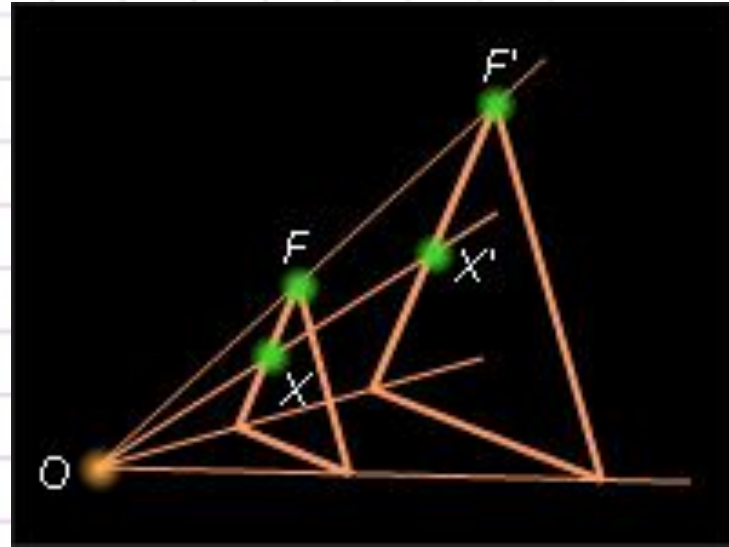
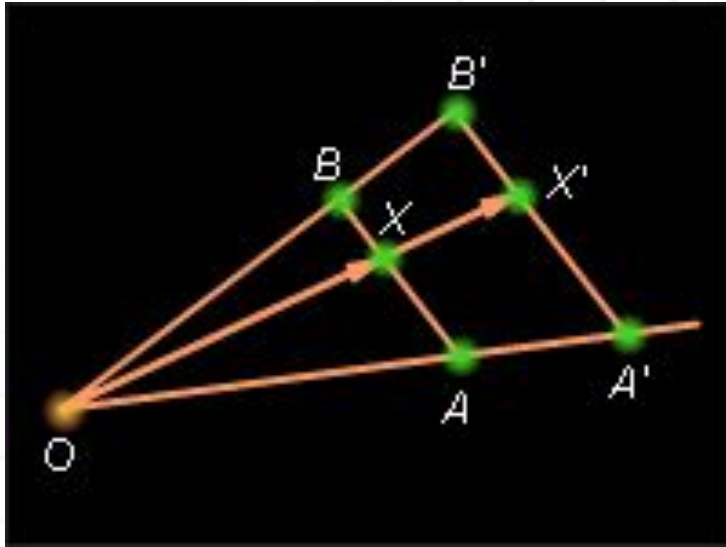
Нехай  $F$  – дана фігура ( $ABCDE$ ). Позначимо довільну точку  $O$ . Через кожну точку фігури  $F$  проведемо промені  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ ,  $OD$ ,  $OE$  та відкладемо на них відрізки  $k \cdot OA$ , ...,  $k \cdot OE$ . Отримаємо шукану фігуру  $F'$  ( $A'B'C'D'E'$ ).

Фігури  $F$  і  $F'$  називають гомотетичними з коефіцієнтом гомотетії  $k$  і центром гомотетії у точці  $O$ .

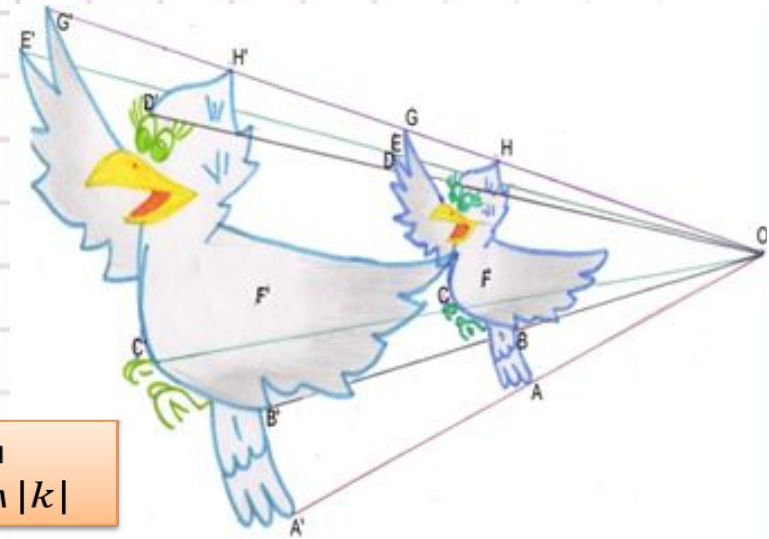
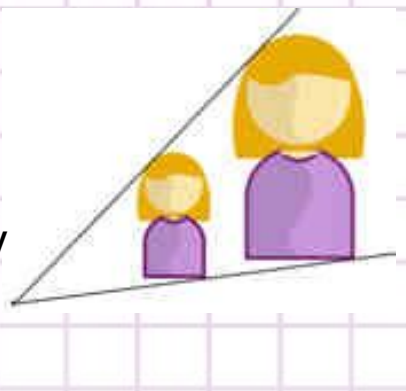




# Гомотетія



Гомотетія має всі властивості перетворення подібності. Крім того, вона ще має особливу властивість: гомотетія переводить пряму у паралельну їй пряму або у саму себе, якщо дана пряма проходить через центр гомотетії.

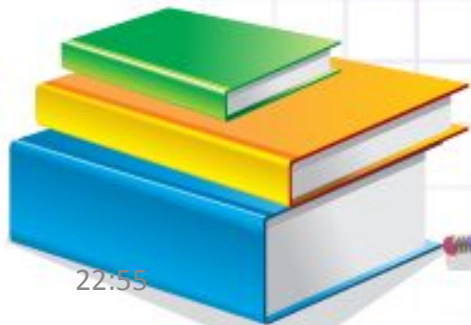
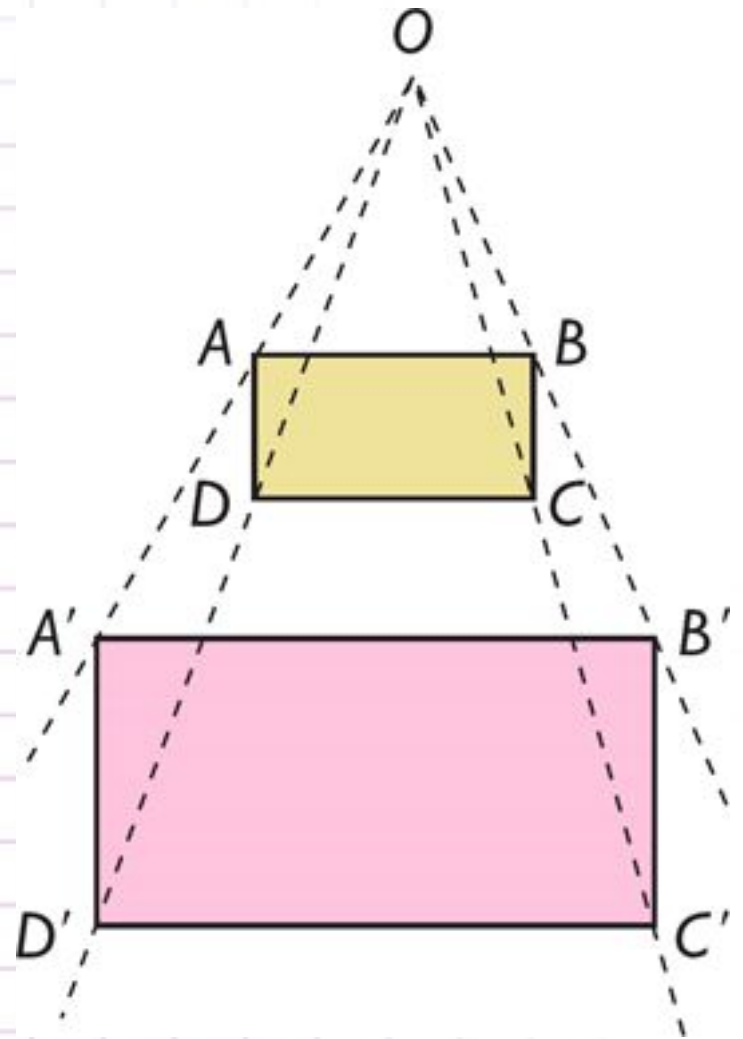


Гомотетія – перетворення подібності з коефіцієнтом  $|k|$



Задача.

Сторони прямокутника  $ABCD$  дорівнюють 8 см та 10 см. Коефіцієнт гомотетії дорівнює 2. Знайти площу подібного прямокутника  $A'B'C'D'$ .



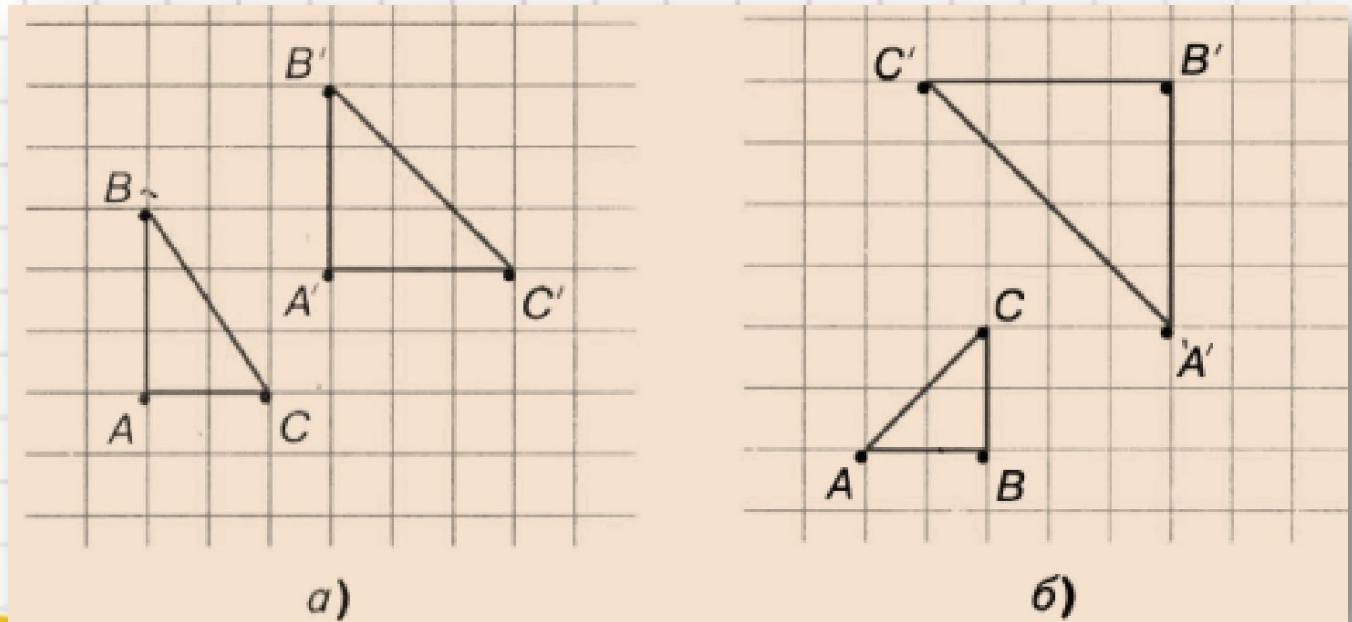
# Повторення

- 1) Що таке перетворення подібності?
- 2) Як довести, що при перетворенні подібності точки, які лежать на прямій, переходять у точки, які теж лежать на прямій, і зберігається порядок їх взаємного розміщення.
- 3) У які фігури переходять прямі, промені, відрізки, кути під час перетворення подібності?
- 4) Які дві фігури називаються подібними? Наведіть приклад подібних фігур.
- 5) Що таке гомотетія?
- 6) Що таке центр гомотетії? Коефіцієнт гомотетії?
- 7) Назвіть властивості гомотетії.



# Усні вправи

687. На якому з малюнків а) — б) зображено перетворення подібності, що переводить трикутник  $ABC$  у трикутник  $A'B'C'$ ?



# Усні вправи

690. За якої умови дві подібні фігури рівні?

691. Побудуйте які-небудь дві подібні, але не рівні фігури.

692. Чи достатньо лише рівності відповідних кутів двох багатокутників або лише пропорційності відповідних сторін, щоб ці багатокутники були подібними?

693. Чи будуть подібними:

- 1) два будь-яких квадрати;
- 2) два будь-яких прямокутники;
- 3) два будь-яких кола?



# Тренувальні вправи

694. Чому дорівнює відношення площ двох подібних багатокутників, якщо коефіцієнт їх подібності дорівнює: 1) 0,5; 2) 2; 3) 5?

695. Позначте точки  $O$  і  $X$ . Побудуйте точку  $X'$ , в яку переходить точка  $X$  при гомотетії з центром  $O$  і коефіцієнтом: 1)  $k=3$ ; 2)  $k = -3$ ; 3)  $k=1/2$ .

696. Гомотетія точку  $X$  переводить у точку  $X'$ . Побудуйте центр гомотетії, якщо коефіцієнт гомотетії дорівнює: 1) 4; 2) -2; 3) 0,5.



# Тренувальні вправи

697. Позначте точки  $O$  і  $A$ . Побудуйте точку  $A'$  так, щоб:

1)  $OA' = 3OA$ ; 2)  $OA' = -2OA$ ; 3)  $OA' = 1/3 \cdot OA$ .

698. Гомотетія з центром  $O$  точку  $A$  переводить у точку  $A'$ . Як розміщені точки  $A$  і  $A'$  відносно центра гомотетії, якщо:

1)  $k > 0$ ; 2)  $k < 0$ ; 3)  $k > 1$ ?

699. Чи подібні два ромби, якщо:

- 1) кут одного ромба дорівнює  $45^\circ$ , а кут другого —  $135^\circ$ ;
- 2) у кожного з них сторона дорівнює меншій діагоналі?



# Домашнє завдання

- Опрацювати п. 21
- Виконати тренувальні вправи





# Підсумок уроку

- ✓ З якими новими поняттями ми сьогодні познайомилися?
- ✓ Чого ми навчилися на уроці?
- ✓ Що для вас залишилося не зрозумілим?
- ✓ Чи комфортно вам було працювати на уроці?
- ✓ Ви йдете з уроку задоволені собою?

