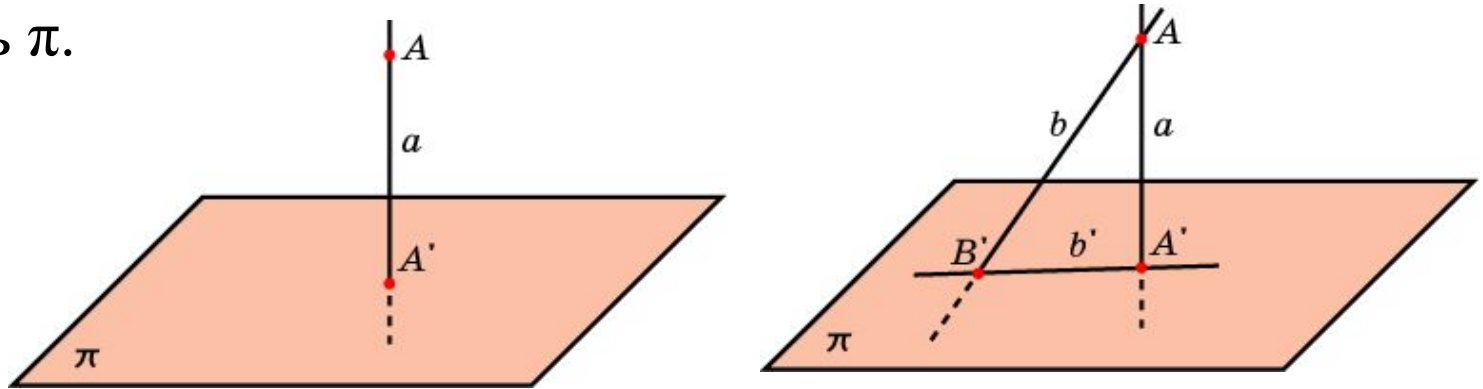


ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННАЯ

Пусть дана плоскость π и точка A пространства. Через точку A проведем прямую a , перпендикулярную плоскости π . Точку пересечения прямой a с плоскостью π обозначим A' . Она называется **ортогональной проекцией** точки A на плоскость π .

Отрезок AA' называется **перпендикуляром**, опущенным из точки A на плоскость π .

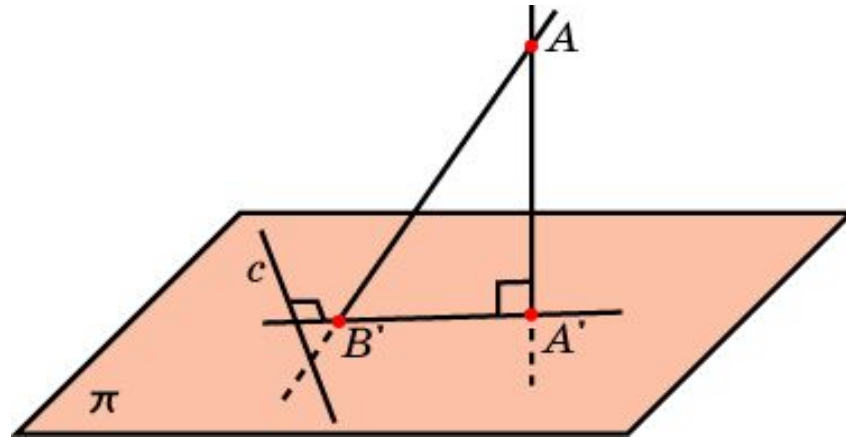


Наклонной к плоскости называется прямая, пересекающая эту плоскость и не перпендикулярная ей. Наклонной называют также отрезок, соединяющий точку, не принадлежащую плоскости, с точкой плоскости, и не являющийся перпендикуляром.

Соответствие, при котором точкам A пространства сопоставляются их ортогональные проекции A' , называется **ортогональным проектированием** на плоскость π .

Теорема о трех перпендикулярах

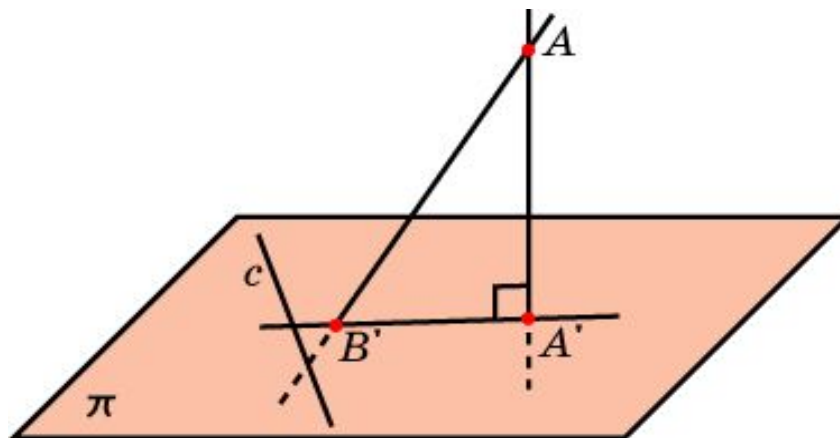
Теорема. Если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна ортогональной проекции наклонной к этой плоскости, то она перпендикулярна и самой наклонной.



Доказательство. Пусть прямая c плоскости π перпендикулярна проекции $A'B'$ наклонной AB' , AA' – прямая, перпендикулярная плоскости π , следовательно, и прямой c . Тогда прямая c будет перпендикулярна двум пересекающимся прямым $A'B'$ и AA' . По признаку перпендикулярности прямой и плоскости, прямая a перпендикулярна плоскости $AA'B'$ и, следовательно, она будет перпендикулярна наклонной AB' .

Упражнение 1

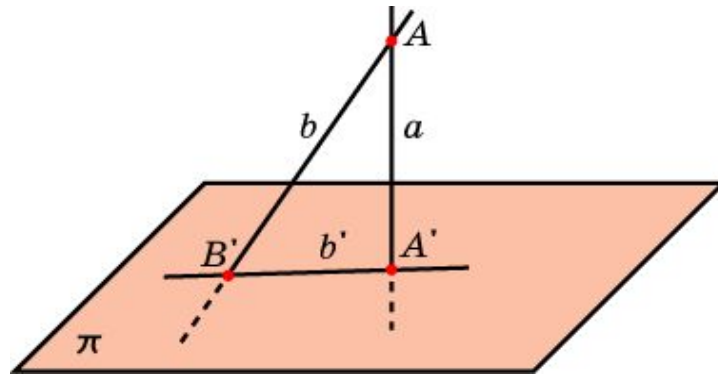
Докажите, что если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной к этой плоскости, то она перпендикулярна и ортогональной проекции этой наклонной.



Доказательство. Пусть прямая c плоскости π перпендикулярна наклонной AB' , AA' – прямая, перпендикулярная плоскости π , следовательно, и прямой c . Тогда прямая c будет перпендикулярна двум пересекающимся прямым AB' и AA' . По признаку перпендикулярности прямой и плоскости, прямая c перпендикулярна плоскости $AA'B'$ и, следовательно, она будет перпендикулярна ортогональной проекции $A'B'$ наклонной AB' .

Упражнение 2

Докажите, что перпендикуляр, опущенный из точки на плоскость, короче всякой наклонной, проведенной из той же точки к той же плоскости.



Доказательство. Пусть AB' – наклонная к плоскости π , AA' – перпендикуляр, опущенный на эту плоскость. Соединим отрезком точки A' и B' . Треугольник $AA'B'$ прямоугольный, AB' – гипотенуза, AA' – катет. Следовательно, $AA' < AB'$.

Упражнение 3

Может ли ортогональная проекция отрезка быть: а) меньше отрезка; б) равна отрезку; в) больше отрезка?

Ответ: а) Да; б) да; в) нет.

Упражнение 4

Верно ли утверждение: «Если из двух различных точек, не принадлежащих плоскости, проведены к ней две равные наклонные, то их проекции тоже равны»?

Ответ: Нет.

Упражнение 5

К плоскости прямоугольника $ABCD$ в точке пересечения диагоналей восстановлен перпендикуляр. Верно ли утверждение о том, что произвольная точка M этого перпендикуляра равноудалена от вершин прямоугольника?

Ответ: Да.

Упражнение 6

Точка M равноудалена от всех точек окружности. Верно ли утверждение о том, что она принадлежит перпендикуляру к плоскости окружности, проведённому через её центр?

Ответ: Да.

Упражнение 7

Найдите ГМ оснований наклонных одинаковой длины, проведённых к данной плоскости из данной точки.

Ответ: Окружность.

Упражнение 8

Найдите геометрическое место точек в пространстве, равноудаленных от двух данных точек.

Ответ: Плоскость, проходящая через середину отрезка, соединяющего данные точки, и перпендикулярная этому отрезку.

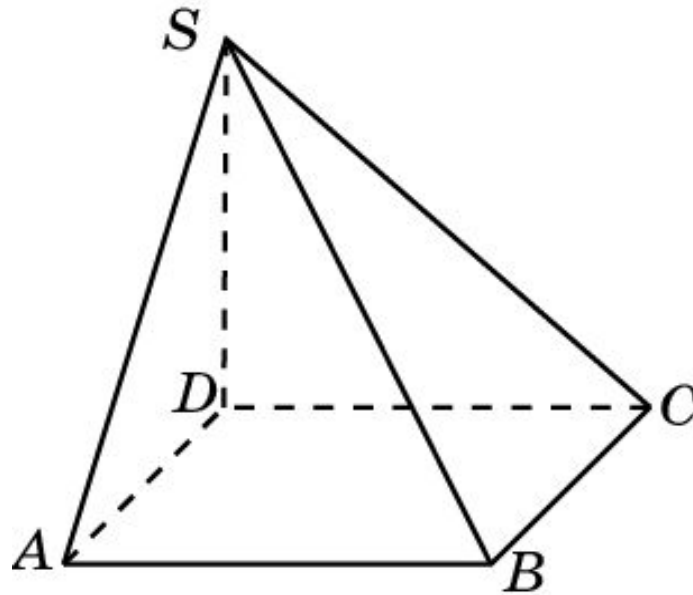
Упражнение 9

Найдите геометрическое место точек в пространстве, равноудаленных от трех данных точек, не принадлежащих одной прямой.

Ответ: Прямая, проходящая через центр описанной окружности треугольника с вершинами в данных точках, и перпендикулярная плоскости этого треугольника.

Упражнение 10

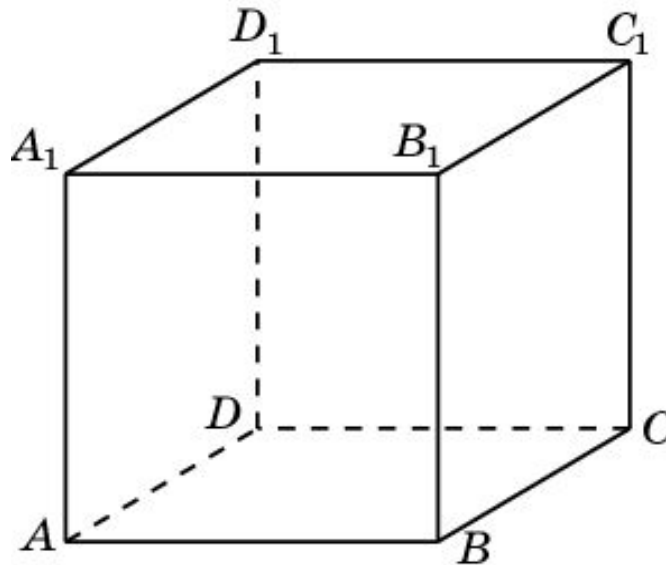
Основание $ABCD$ пирамиды $SABCD$ – прямоугольник, $AB < BC$. Ребро SD перпендикулярно плоскости основания. Среди отрезков SA , SB , SC и SD укажите наименьший и наибольший.



Ответ: SD – наименьший; SB – наибольший.

Упражнение 11

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ укажите ортогональную проекцию точки A на плоскость: а) BCC_1 ; б) BDD_1 ; в)* BDA_1 .



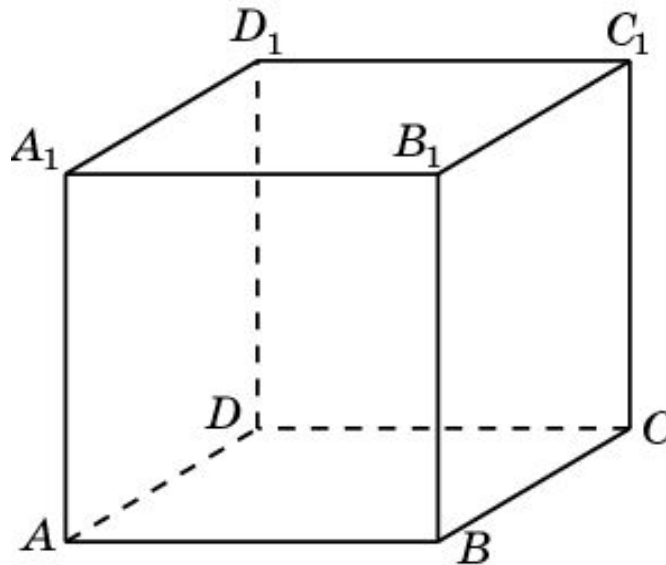
Ответ. а) точка B ;

б) точка пересечения прямых AC и BD ;

в) точка пересечения прямых AC_1 и плоскости BDA_1 .

Упражнение 12

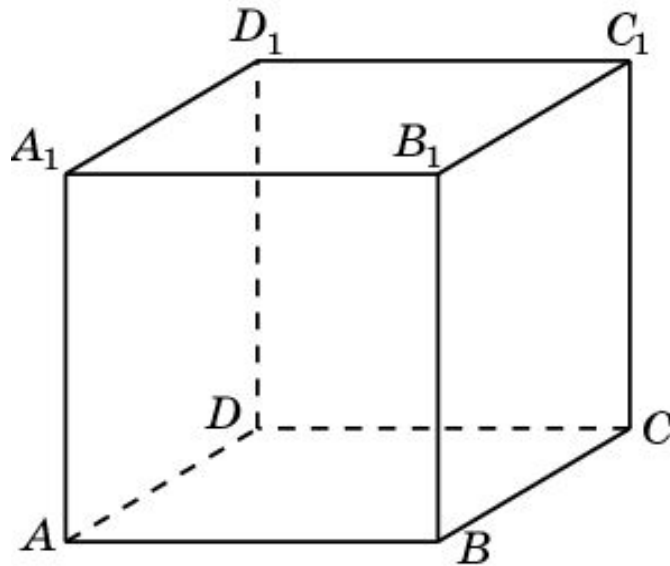
В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ укажите ортогональную проекцию отрезка AB_1 на плоскость: а) ABC ; б) BCC_1 ; в) BDD_1 .



- Ответ.** а) отрезок AB ;
б) отрезок BB_1 ;
в) отрезок, соединяющий точку B_1 и середину отрезка BD .

Упражнение 13

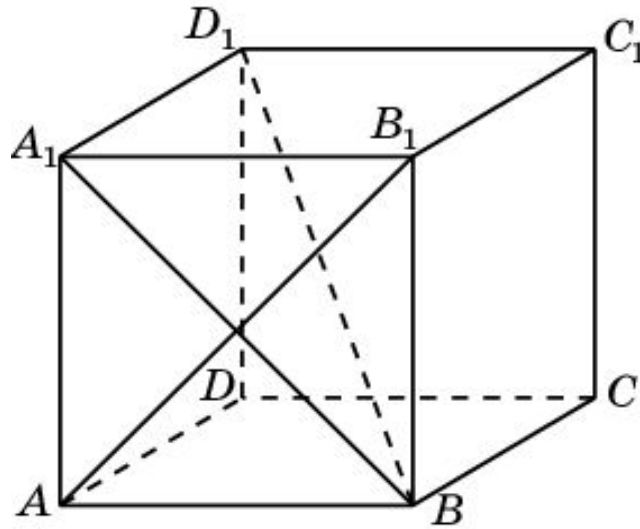
В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите длину ортогональной проекции отрезка AB_1 на плоскость BDD_1 .



Ответ. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Упражнение 14

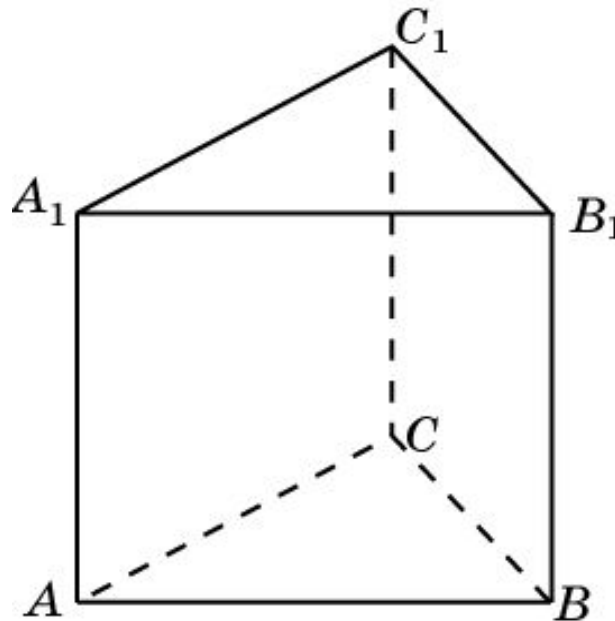
Докажите, что диагональ BD_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ перпендикулярна прямой AB_1 .



Доказательство. Ортогональной проекцией прямой BD_1 на плоскость ABB_1 является прямая BA_1 , которая перпендикулярна прямой AB_1 . По теореме о трех перпендикулярах, прямая BD_1 перпендикулярна прямой AB_1 .

Упражнение 15

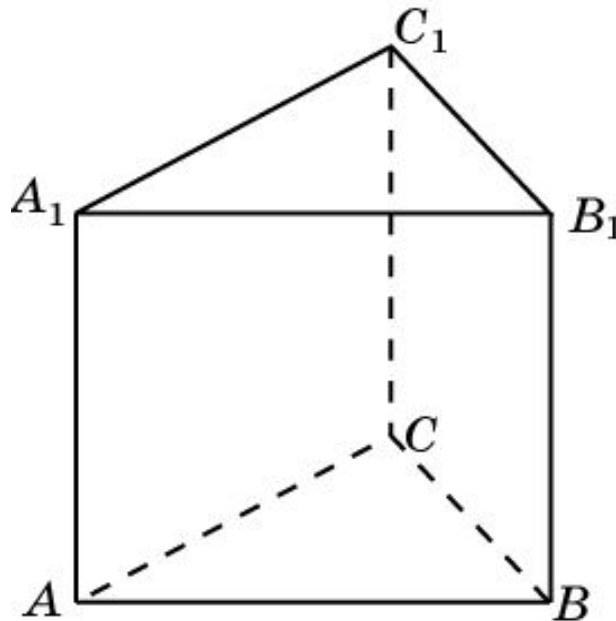
В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ укажите ортогональную проекцию отрезка AC_1 на плоскость: а) ABC ; б) BCC_1 .



Ответ. а) отрезок AC ;
б) отрезок, соединяющий точку C_1 и середину отрезка BC .

Упражнение 16

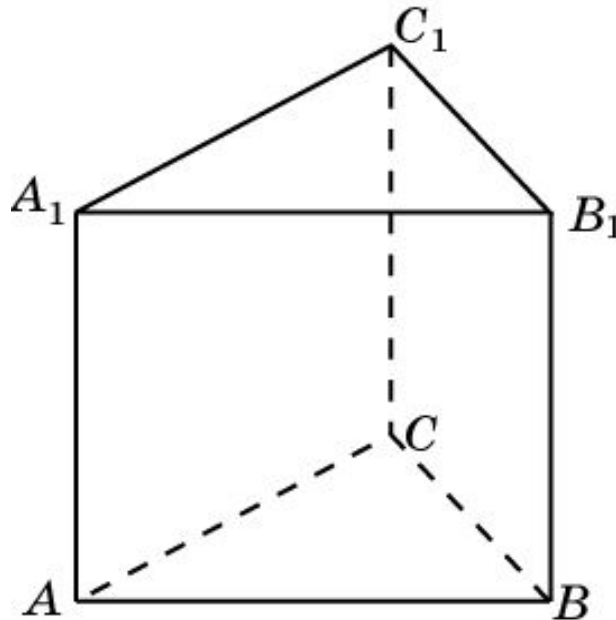
В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите длину ортогональной проекции отрезка AC_1 на плоскость BCC_1 .



Ответ. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Упражнение 17

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ укажите ортогональную проекцию точки B на плоскость: а) $A_1B_1C_1$; б) ACC_1 .

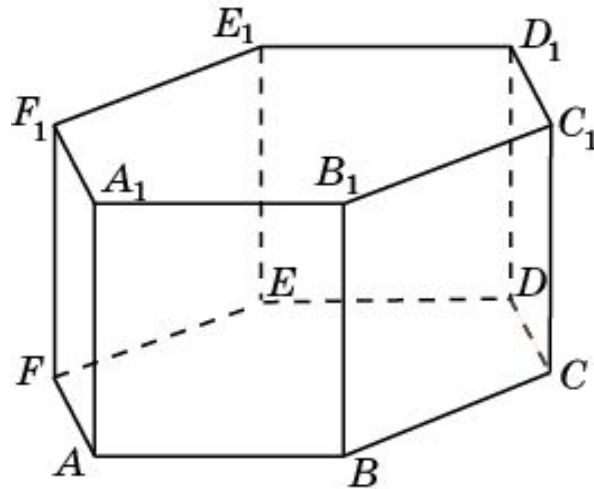


Ответ. а) точка B_1 ;

б) середина отрезка AC .

Упражнение 18

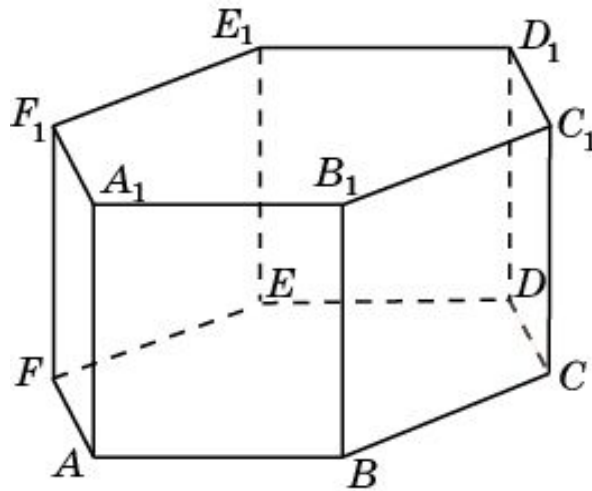
В правильной шестиугольной призме $A \dots F_1$ укажите ортогональную проекцию точки A на плоскость: а) $A_1B_1C_1$; б) CDD_1 ; в) DEE_1 ; г) BDD_1 ; д) BEE_1 ; е) BFF_1 ; ж) CEE_1 ; з) CFF_1 .



Ответ. а) A_1 ; б) C ; в) E ; г) B ;
д) точка пересечения прямых BE и AC ;
е) точка пересечения прямых BF и AD ;
ж) точка пересечения прямых CE и AD ;
з) точка пересечения прямых CF и AE .

Упражнение 19

В правильной шестиугольной призме $A \dots F_1$ укажите ортогональную проекцию отрезка AC_1 на плоскость: а) ABC ; б) CDD_1 ; в) CEE_1 ; г) CFF_1 ; д) BEE_1 ; е) DDF_1 .



Ответ. а) отрезок AC ; б) отрезок CC_1 ;

в) отрезок, соединяющий точку C_1 и середину отрезка CE ;

г) отрезок, соединяющий точку C_1 и точку пересечения AF и AE ;

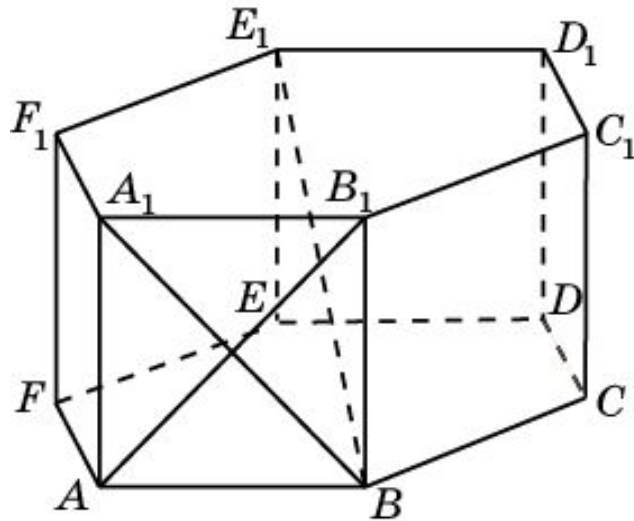
д) отрезок, соединяющий точку пересечения AC и BE с точкой

пересечения A_1C_1 и B_1E_1 ;

е) отрезок FD_1 ;

Упражнение 20

Докажите, что прямая BE_1 правильной шестиугольной призмы $A \dots F_1$ перпендикулярна прямой AB_1 .



Доказательство. Ортогональной проекцией прямой BE_1 на плоскость AB_1B является прямая BA_1 , которая перпендикулярна прямой AB_1 . По теореме о трех перпендикулярах, прямая BE_1 перпендикулярна прямой AB_1 .

Упражнение 21

Из точки A к данной плоскости проведены перпендикуляр и наклонная, пересекающие плоскость соответственно в точках B и C . Найдите проекцию отрезка AC , если $AC = 37$ см, $AB = 35$ см.

Ответ: 12 см.

Упражнение 22

Из точки A к данной плоскости проведены перпендикуляр и наклонная, пересекающие плоскость соответственно в точках B и C . Найдите отрезок AC , если $AB = 6$ см, $\angle BAC = 60^\circ$.

Ответ: 12 см.

Упражнение 23

Из точки A к данной плоскости проведены перпендикуляр и наклонная, пересекающие плоскость соответственно в точках B и C . Найдите отрезок AB , если $AC = 2\sqrt{10}$ см, $BC = 3AB$.

Ответ: 2 см.

Упражнение 24

Отрезки двух наклонных, проведенных из одной точки к плоскости, равны 15 см и 20 см. Проекция одного из этих отрезков равна 16 см. Найдите проекцию другого отрезка.

Ответ: 9 см.

Упражнение 25

Отрезок BC длиной 12 см является проекцией отрезка AC на плоскость α . Точка D принадлежит отрезку AC и $AD:DC = 2:3$. Найдите отрезок AD и его проекцию на плоскость α , если известно, что $AB = 9$ см.

Ответ: 6 см; 4,8 см.

Упражнение 26

Дан прямоугольный треугольник ABC , катеты которого AC и BC равны соответственно 20 и 15 см. Через вершину A проведена плоскость α , параллельная прямой BC . Проекция одного из катетов на эту плоскость равна 12 см. Найдите проекцию гипотенузы.

Ответ: $3\sqrt{41}$ см.

Упражнение 27

Сторона ромба равна a , острый угол 60° . Через одну из сторон ромба проведена плоскость. Проекция другой стороны на эту плоскость равна b . Найдите проекции диагоналей ромба.

Ответ: b и $\sqrt{2a^2 + b^2}$.