Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Васильева Наталья Евгеньевна

учитель математики

МОУ средняя общеобразовательная школа №1

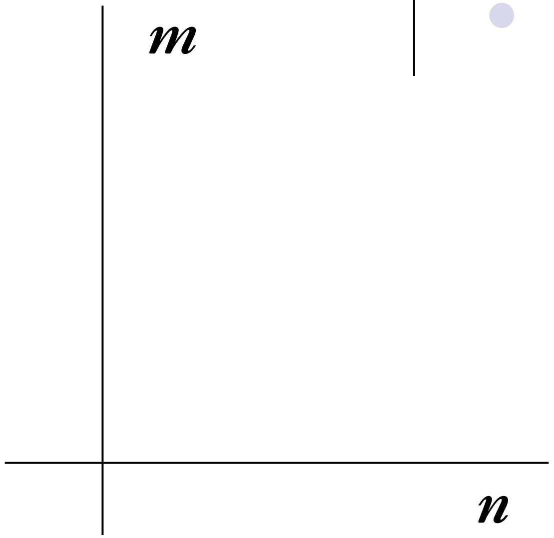
г. Малая Вишера

Цели урока:

- Материалы этого урока знакомят с признаком перпендикулярности прямой и плоскости и свойствами перпендикулярных прямой и плоскости.
- Окружающий нас мир дает много примеров перпендикулярности прямой и плоскости. Правильно установленный вертикальный столб перпендикулярен к плоскости земли. Линии пересечения стен комнаты перпендикулярны к плоскости пола. При строительстве зданий при установке столбов для их устойчивости очень важно обеспечить перпендикулярность к поверхности земли. Для этого существуют специальные способы проверки перпендикулярности, основанные на признаке перпендикулярности прямой и плоскости и свойствах перпендикулярных прямой и плоскости, которые мы и будем изучать.
- Изучив материалы предыдущего урока, вы познакомились с определением и свойствами перпендикулярных прямых, с определением прямой перпендикулярной к плоскости. Повторите еще раз эти материалы. Это поможет вам правильно ответить на вопросы теста, проверяющего ваши знания по теме «Перпендикулярные прямые».

Перпендикулярные прямые

Две прямые в пространстве называются ***перпендикулярными*** (взаимно перпендикулярными), если угол между ними равен 90^0. Для обозначения перпендикулярности используется знак $\perp$. На рисунке прямая ***m*** перпендикулярна прямой ***n*** или $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$.



Лемма о перпендикулярных прямых

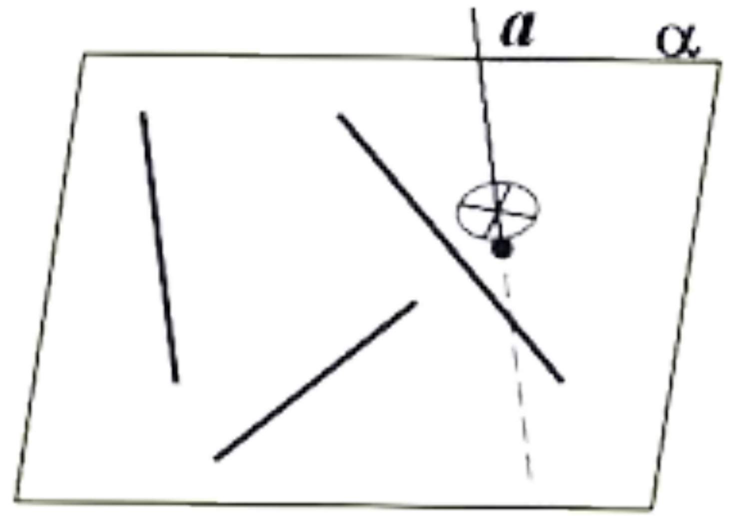
Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.

Символически эту лемму можно записать так

$$\left.\begin{array}{l} a\perp c \\ a\parallel b \end{array}\right\} \Rightarrow b\perp c$$

Прямая, перпендикулярная к плоскости

Прямая называется ***перпендикулярной*** к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой на этой плоскости. Для обозначения перпендикулярности используется знак $\perp$. На рисунке изображена прямая а, перпендикулярная плоскости а или а$\perp$α.



Теорема о двух параллельных прямых и плоскости

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.

Символически эту теорему можно записать так $\left.\begin{array}{l} a \parallel b \\ b \perp \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp \alpha$

Теорема о двух прямых, перпендикулярных к плоскости

Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны друг другу.

Символически эту теорему можно записать так $\left.\begin{array}{l} a \perp \alpha \\ b \perp \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel b$

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Наверное, каждому приходилось вкапывать штанги футбольных ворот. До перекладины порой и не доходило. Как важно при этом было так установить штангу так, чтобы она была перпендикулярна поверхности земли. Если использовать определение перпендикулярности прямой к плоскости, то тогда следует проверять перпендикулярность штанги к каждой прямой на футбольном поле. А нельзя ли ограничиться меньшим числом проверок? Оказывается можно. Но одной проверки явно недостаточно. Если данная прямая перпендикулярна только к одной прямой на плоскости, то она не перпендикулярна к самой плоскости (рис.3). Она может и лежать в этой плоскости. Если же прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна самой плоскости (рис.4). Это утверждение называется признаком перпендикулярности прямой и плоскости и формулируется в виде теоремы. Таким образом, чтобы установить штангу ворот перпендикулярно плоскости поля достаточно проверить ее перпендикулярность, посмотрев на нее с двух разных, но не противоположных сторон.

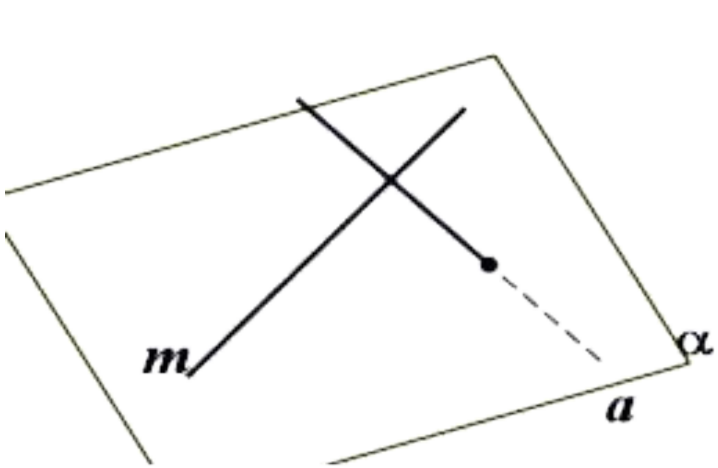


Рис. 10.3

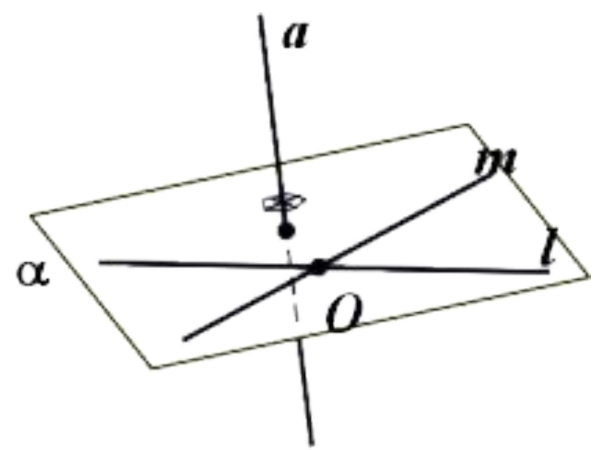


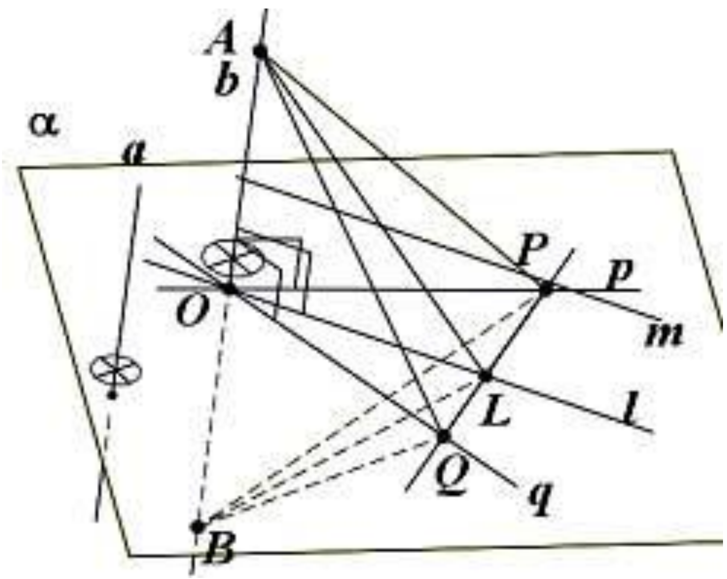
Рис. 10.4.

Теорема

Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

Пусть $b \perp q$; $b \perp p$; $p \subset a$; $q \subset a$; $p \cap q = O$. Докажем, что $b \perp a$.

Для этого нужно доказать, что прямая b перпендикулярна к любой (произвольной) прямой m на плоскости a. Рассмотрим сначала случай, когда прямая b проходит через точку пересечения O. Проведем через точку O прямую l, параллельную прямой m. Отметим на прямой b точки A и B, равноудаленные от точки O, и проведем в плоскости a прямую, пересекающую прямые p, l и q соответственно в точках P, L и Q. Так как прямые p и q – серединные перпендикуляры, то AP=BP и AQ=BQ. Следовательно, ∆APQ=∆BPQ (по трем сторонам). Тогда ∠APL= ∠BPL и ∆ APL= ∆ BPL (по двум сторонам и углу). Тогда AL=BL. Следовательно, ∆ALB – равнобедренный, отрезок LO является медианой и высотой в этом треугольнике, $\angle AOL = 90^0$ и $b \perp l$. Поскольку $l \parallel m$, то $b \perp m$ (по лемме о перпендикулярных прямых), то есть $b \perp a$.



Рассмотрим теперь случай, когда прямая a не проходит через точку O, но $a \perp q$; $a \perp p$. Проведем через точку O прямую, параллельную прямой a. Эта прямая перпендикулярна прямым p и q (по лемме о перпендикулярных прямых) и, следовательно, совпадает с прямой b. Поскольку $b \perp a$ и $b \parallel a$, то $a \perp a$ (по теореме о двух параллельных прямых и плоскости).

Теорема доказана. Символически эту теорему можно записать так

$$\left.\begin{array}{c} c \cap b \neq \varnothing \\ b \subset \alpha \\ c \subset \alpha \\ a \perp b \\ a \perp c \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp \alpha$$

Докажем две теоремы, обосновывающие существование плоскости, проходящей через данную точку и перпендикулярной данной прямой и существование прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной к данной плоскости. При доказательстве этих теорем будет использован признак перпендикулярности прямой и плоскости.

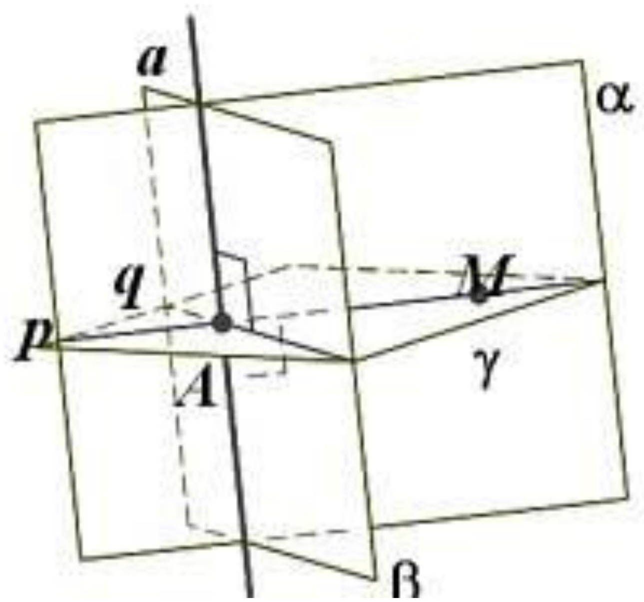
Плоскость, перпендикулярная прямой

Теорема

Через любую точку пространства проходит плоскость, перпендикулярная данной прямой и притом только одна.

Обозначим данную прямую буквой а, а произвольную точку пространства – буквой М.

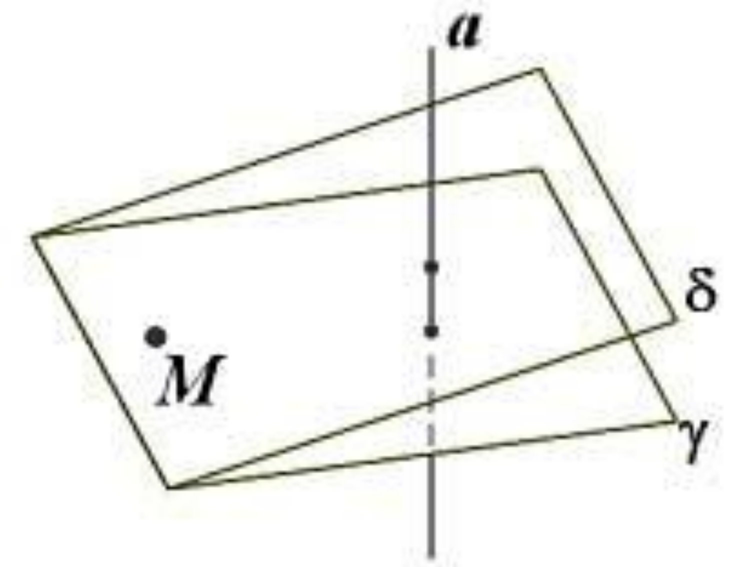
1. Докажем существование плоскости, перпендикулярной прямой а и проходящей через точку М. Проведем через прямую а две плоскости α и β так, чтобы плоскость α проходила через точку М.. В плоскости α проведем через точку М прямую р, перпендикулярную прямой а и пересекающую ее в точке А. В плоскости β проведем прямую q, перпендикулярную прямой а и проходящую через точку А. Рассмотрим плоскость, проходящую через прямые р и q. Эта плоскость перпендикулярна прямой а (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости) и проходит через произвольную точку М. Следовательно, это искомая плоскость.



Существование доказано.

2. Докажем единственность такой плоскости.

Проведем доказательство от противного. Пусть существуют две плоскости δ и γ, проходящие через точку М и перпендикулярные прямой а. Но тогда δ|| γ. Но плоскости δ и γ не могут быть параллельными друг другу, так как имеют общую точку М. Следовательно наше предположение неверно и существует только одна плоскость, проходящая через произвольную точку пространства перпендикулярно данной прямой. Единственность доказана.

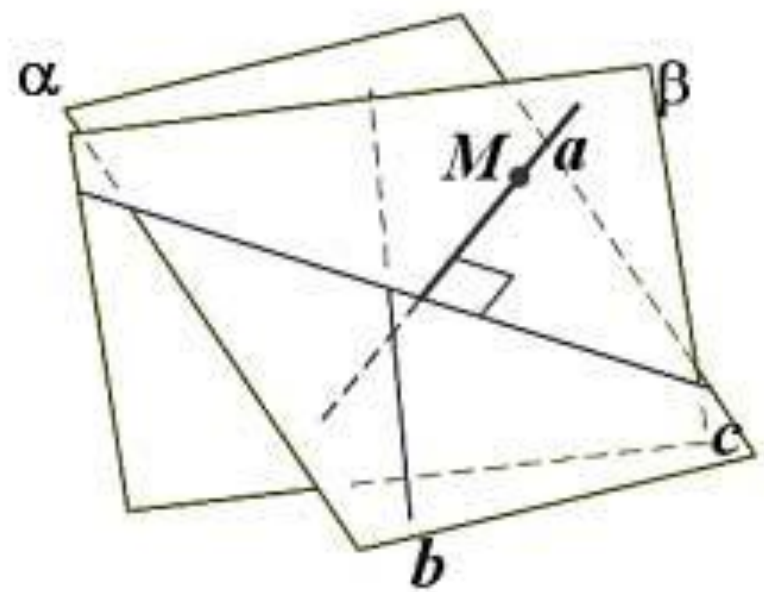


Теорема о прямой, перпендикулярной к плоскости

Через любую точку пространства проходит прямая, перпендикулярная данной плоскости и притом только одна.

Обозначим данную плоскость буквой а, а произвольную точку пространства – буквой М.

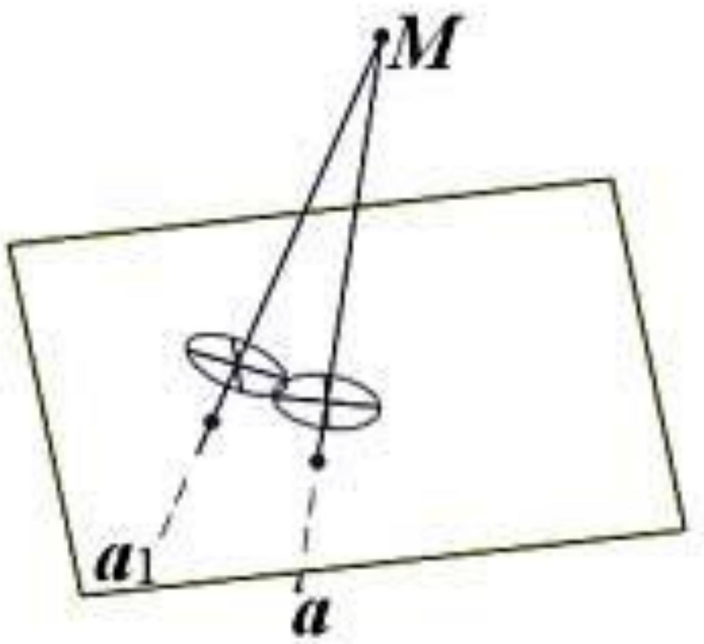
1. Докажем существование прямой, перпендикулярной плоскости α и проходящей через точку М. Проведем в плоскости α прямую b. Через точку М проведем плоскость β, перпендикулярную прямой b (это мы можем сделать на основании предыдущей теоремы о плоскости перпендикулярной прямой). Пусть с –общая прямая плоскостей α и β. Проведем в плоскости β через точку М прямую а, перпендикулярную прямой с. Тогда прямая а перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости α. Следовательно, прямая а перпендикулярна плоскости а (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости). Следовательно, а - искомая прямая. Существование доказано.



2. Докажем единственность такой прямой.

Проведем доказательство от противного. Пусть существует две прямые a и a1, проходящие чер[...] точку M и перпендикулярные плоскости a. Но тогда a||a1 (см. теорему о двух прямых, перпендикулярных к плоскости) Но прямые a и a1 не могут быть параллельными друг другу, так как имеют общую точку M. Следовательно наше предположение неверно и существует только одна прямая проходящая через произвольну[...] точку пространства перпендикулярно данной плоскости.

Единственность доказана.



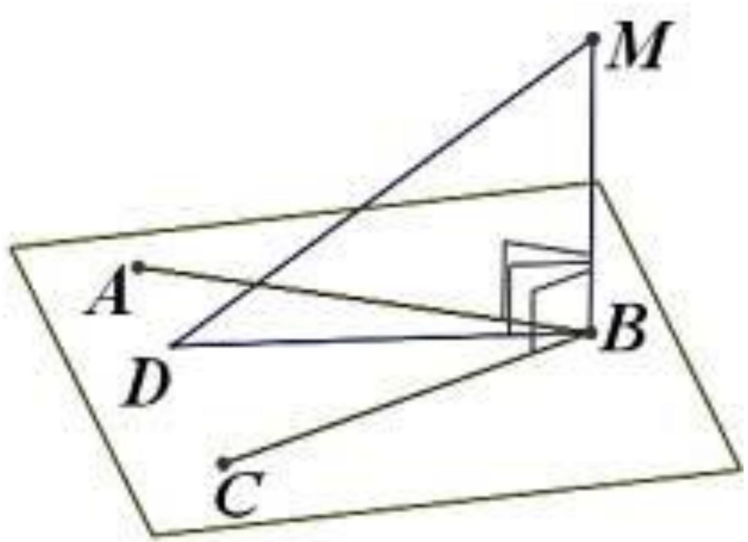
Примеры задач на доказательство. Примеры задач на вычисления

Дано: плоскость (АВС), $MB \perp AB$, $MB \perp BC$, $D \in (ABC)$.

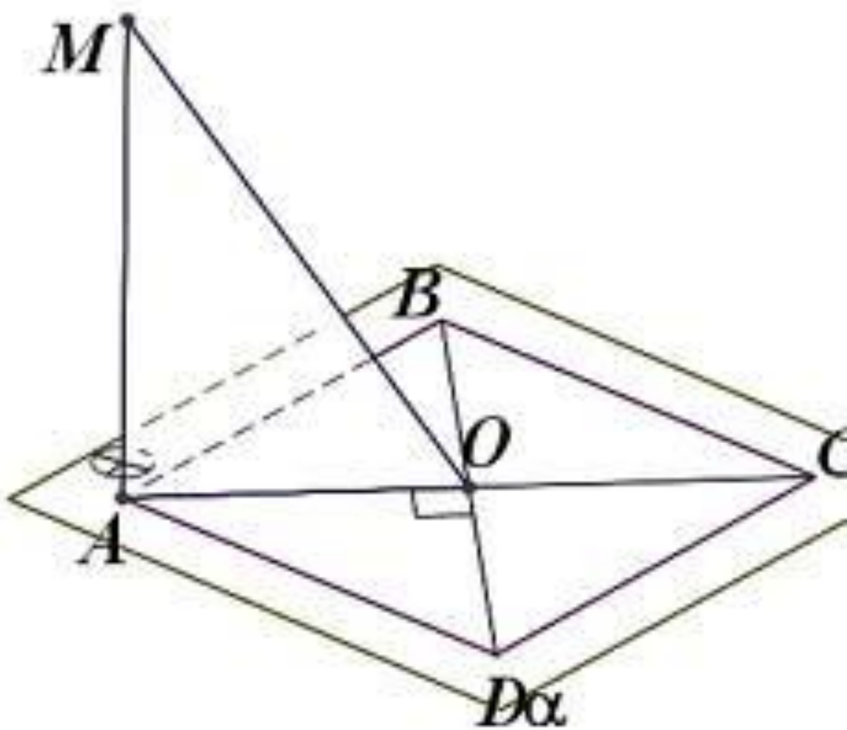
Доказать: ΔMBD - прямоугольный.

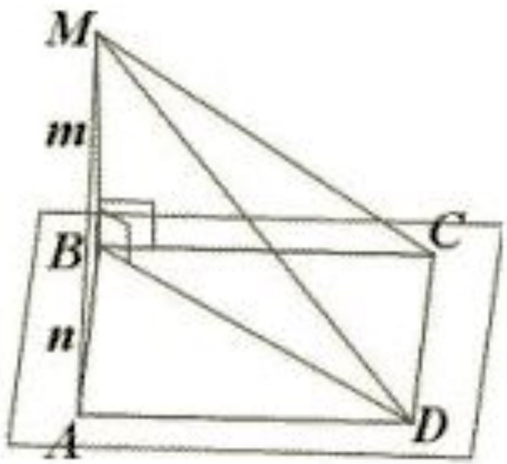
Доказательство.

$MB \perp AB$, $MB \perp BC$. Следовательно, $MB \perp (ABC)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости). Тогда $MB \perp BD$ (по определению прямой, перпендикулярной к плоскости). Следовательно, $\angle DBM = 90^0$ и ΔMBD – прямоугольный, что и требовалось доказать.



- **Дано**: ABCD - квадрат, MA⊥α, ABCD ∈α.
- **Доказать**: BD⊥MO.
- **Доказательство**.
- MA⊥α, следовательно, MA⊥BD (п определению прямой, перпендикулярной к плоскости). BD⊥AO (по свойству квадрата). Тогда BD⊥(AOM) (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости – BD перпендикулярна двум пересекающимся прямым AO и MA, лежащим в этой плоскости). Следовательно, BD⊥MO (по определению прямой перпендикулярной к плоскости), что и требовалось доказать.





Дано: ABCD - квадрат, $\angle MBA=\angle MBC=90^0$, MB=m, AB=n ABCD $\in\alpha$.

Найти: MA,MC,MD.

Решение.

BC=AB=n (т.к. ABCD –квадрат).

Тогда из ΔMBC

$MC = \sqrt{MB^2 + BC^2} = \sqrt{m^2 + n^2}$ (по теореме Пифагора).

Аналогично из ΔMBA

$MA = \sqrt{MB^2 + BA^2} = \sqrt{m^2 + n^2}$ (по теореме Пифагора).

$BD = n\sqrt{2}$ (диагональ квадрата). $BM\perp(ABC)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости – по условию BM перпендикулярна двум пересекающимся прямым AB и BC, лежащим в этой плоскости). Следовательно, $BM\perp BD$ (по определению прямой, перпендикулярной к плоскости). Тогда $\angle MBD=90^0$. Из ΔMBD $MD = \sqrt{MB^2 + BD^2} = \sqrt{m^2 + 2n^2}$ (по теореме Пифагора).

Ответ: $MA = MC = \sqrt{m^2 + n^2}$; $MD = \sqrt{m^2 + 2n^2}$.

Проверь себя. Перпендикулярные прямые

Перед Вами записаны предложения, разбитые на две части. Подумайте, какой из вариантов нужно выбрать, чтобы получилось верное предложение. Введите номер выбранного варианта.

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой,

то и другая прямая перпендикулярна к третьей прямой.

то другая прямая всегда параллельна третьей прямой.

то другая прямая никогда не пересекает третью прямую.

то другая прямая всегда скрещивается с третьей прямой.

Проверь себя. Перпендикулярные прямые

Перед Вами записаны предложения, разбитые на две части. Подумайте, какой из вариантов нужно выбрать, чтобы получилось верное предложение. Введите номер выбранного варианта.

Если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных прямых,

то она всегда лежит в одной плоскости с другой прямой

то она параллельна с другой прямой.

то она скрещивается с другой прямой.

то она перпендикулярна и к другой прямой. .

Проверь себя. Перпендикулярные прямые

Перед Вами записаны предложения, разбитые на две части. Подумайте, какой из вариантов нужно выбрать, чтобы получилось верное предложение. Введите номер выбранного варианта.

Если две прямые параллельны третьей прямой,

то все три прямые всегда лежат в одной плоскости.

то они скрещиваются друг с другом.

то они параллельны друг другу.

то они перпендикулярны друг к другу.

Проверь себя. Перпендикулярные прямые

Перед Вами записаны предложения, разбитые на две части. Подумайте, какой из вариантов нужно выбрать, чтобы получилось верное предложение. Введите номер выбранного варианта.

Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей

то она принадлежит другой плоскости.

то другая плоскость не перпендикулярна данной прямой.

то она перпендикулярна и другой плоскости.

то она всегда параллельна другой плоскости.

Проверь себя. Перпендикулярные прямые

Перед Вами записаны предложения, разбитые на две части. Подумайте, какой из вариантов нужно выбрать, чтобы получилось верное предложение. Введите номер выбранного варианта.

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости,

то другая прямая не перпендикулярна к этой плоскости.

то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости.

то другая прямая параллельна этой плоскости.

то другая прямая лежит в этой плоскости.

Перед Вами записаны предложения, понятия и названия теорем. Подумайте, какой из вариантов нужно выбрать, чтобы предложению понятию или теореме соответствовала верная символическая запись.

Лемма о перпендикулярных прямых

1) $\left.\begin{matrix} a \perp c \\ a \parallel b \end{matrix}\right\} \Rightarrow b \perp c$

2) $\left.\begin{matrix} a \parallel b \\ b \perp \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \perp \alpha$

3) $\left.\begin{matrix} a \perp \alpha \\ b \perp \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \parallel b$

4) $\left.\begin{matrix} a \perp c \\ a \perp b \end{matrix}\right\} \Rightarrow b \perp c$

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.

1) $\left.\begin{array}{l} a \perp c \\ a \parallel b \end{array}\right\} \Rightarrow b \perp c$

2) $\left.\begin{array}{l} a \perp \alpha \\ b \perp \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel b$

3) $\left.\begin{array}{l} a \parallel b \\ b \perp \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp \alpha$

4) $\left.\begin{array}{l} a \perp c \\ a \perp b \end{array}\right\} \Rightarrow b \perp c$

Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой плоскости

$$1)\ \left.\begin{matrix} a \perp c \\ a \parallel b \end{matrix}\right\} \Rightarrow b \perp c \qquad 2)\ \left.\begin{matrix} a \perp \alpha \\ b \perp \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \parallel b$$

$$3)\ \left.\begin{matrix} a \parallel b \\ b \perp \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \perp \alpha \qquad 4)\ \left.\begin{matrix} a \perp \alpha \\ \alpha \parallel \beta \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \perp \beta$$

Домашнее задание:

Л.С.Атанасян и др. Геометрия. Учебник для 10-11 классов средней школы.

1. Упражнение 129 б)

Прямая AM перпендикулярна к плоскости квадрата ABCD, диагонали которого пересекаются в точке O. Докажите, что MO^MD.

2. Упражнение 131

В тетраэдре ABCD точка M – середина ребра BC, AB=AC, DB=DC. Докажите, что плоскость треугольника ADM перпендикулярна к прямой BC.

3. Упражнение 134

Докажите, что все прямые, проходящие через данную точку M прямой a и перпендикулярные к этой прямой, лежат в плоскости, проходящей через точку M и перпендикулярной прямой a.

4. Упражнение 137

Докажите, что через каждую из двух взаимно перпендикулярных скрещивающихся прямых проходит плоскость, перпендикулярная к другой прямой.