

# Перпендикулярность прямых и плоскостей

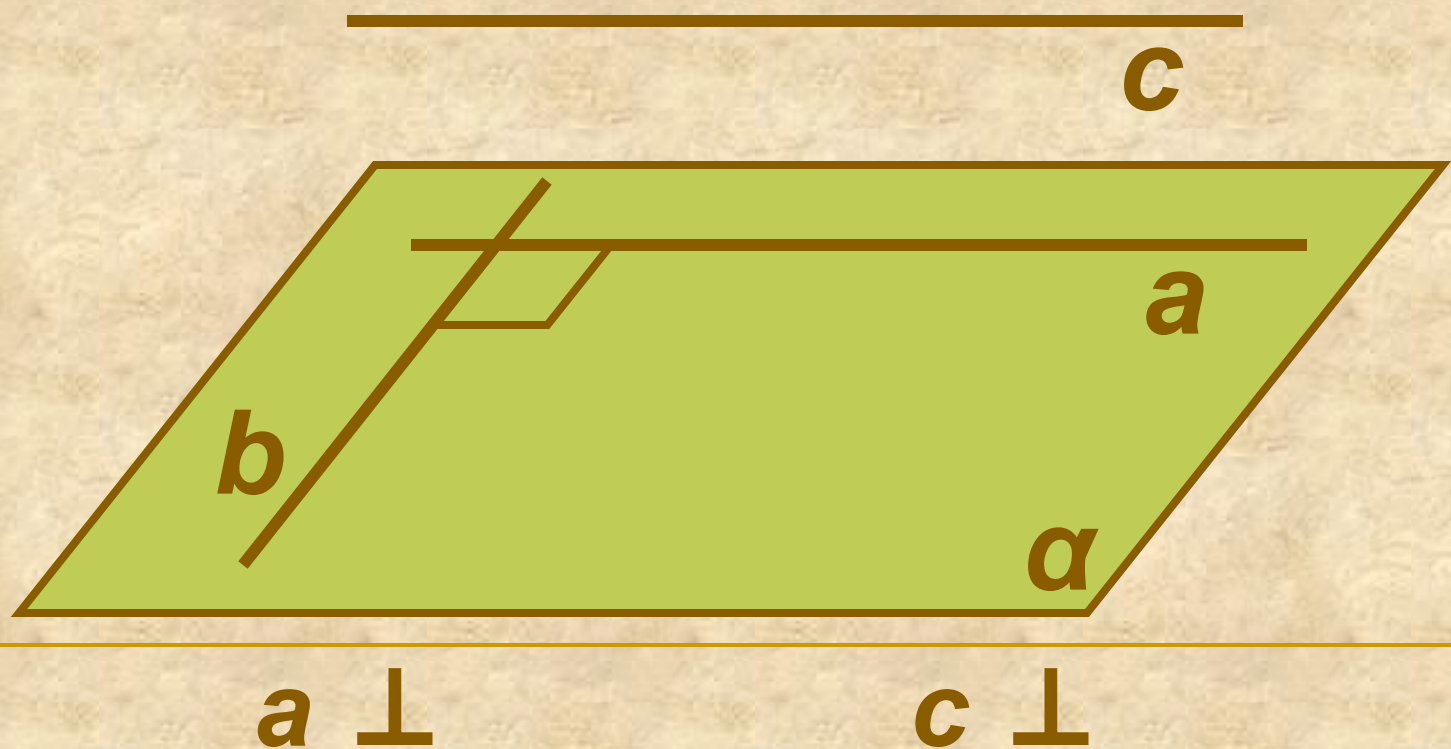
*Автор: Елена Юрьевна Семенова*

# Содержание

- Перпендикулярные прямые в пространстве
- Лемма
- Определение прямой, перпендикулярной к плоскости
- Теорема о перпендикулярности двух параллельных прямых к плоскости
- Теорема о параллельности двух перпендикулярных прямых к плоскости
- Признак перпендикулярности прямой и плоскости
- Теорема о существовании и единственности прямой, перпендикулярной к данной плоскости
- Перпендикуляр и наклонные
- Теорема о трех перпендикулярах
- Теорема, обратная теореме о трех перпендикулярах
- Угол между прямой и плоскостью

# Перпендикулярные прямые в пространстве

*Две прямые называются перпендикулярными, если угол между ними равен  $90^\circ$*



# Лемма

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.



Дано:  $a \parallel b$ ,  $a \perp c$

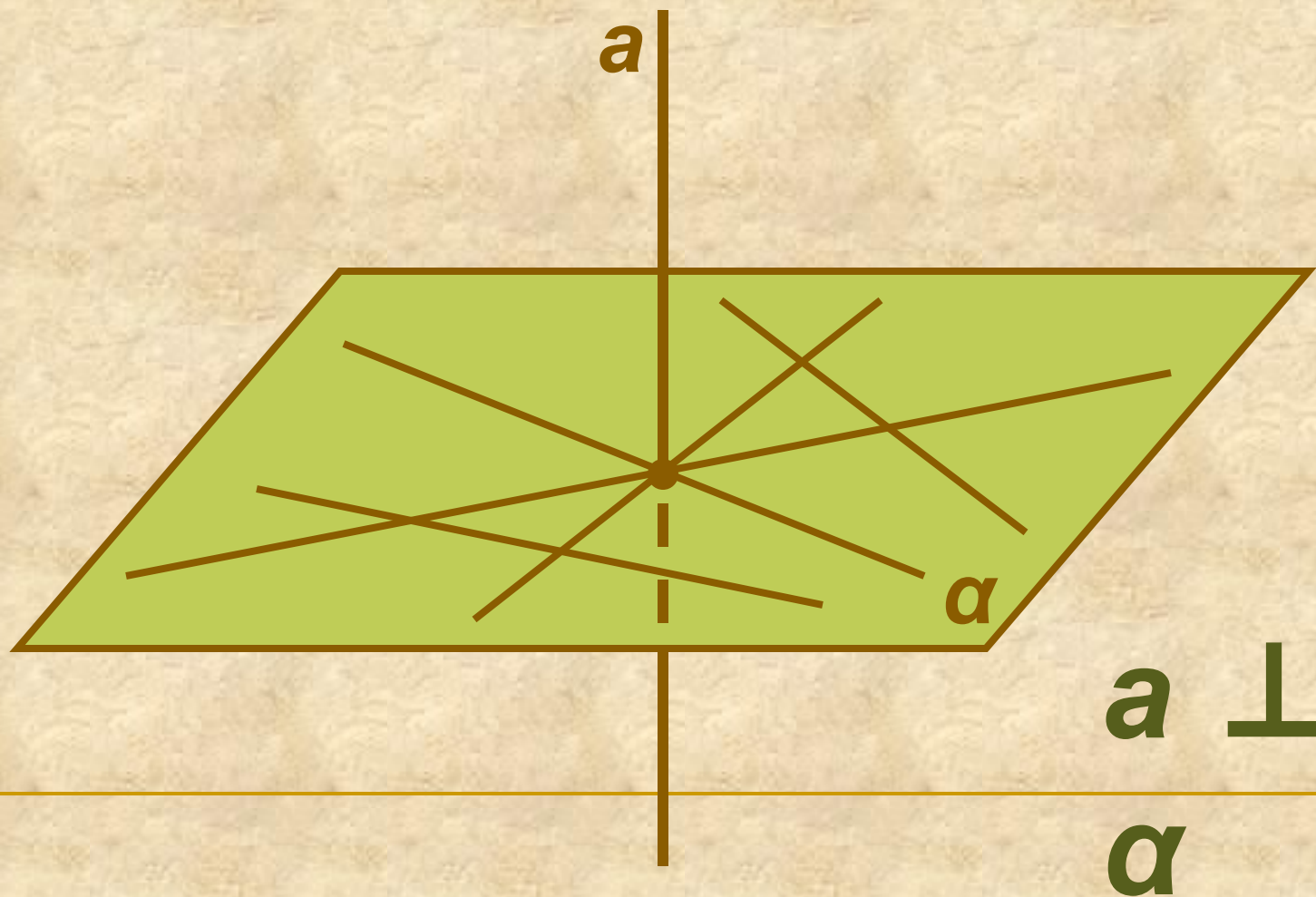
Доказать:  $b \perp c$



Доказательство:

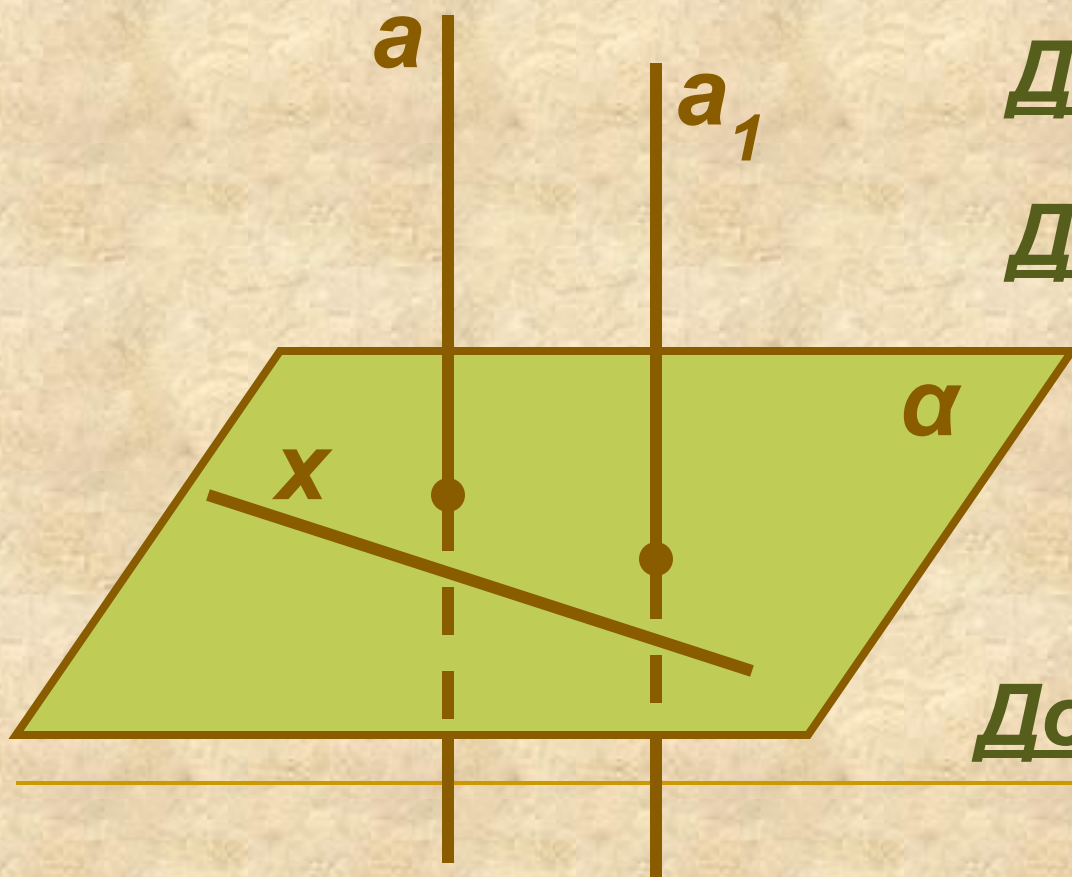


*Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости*



# Теорема 1

*Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.*



Дано:  $a \parallel a_1; a \perp \alpha$

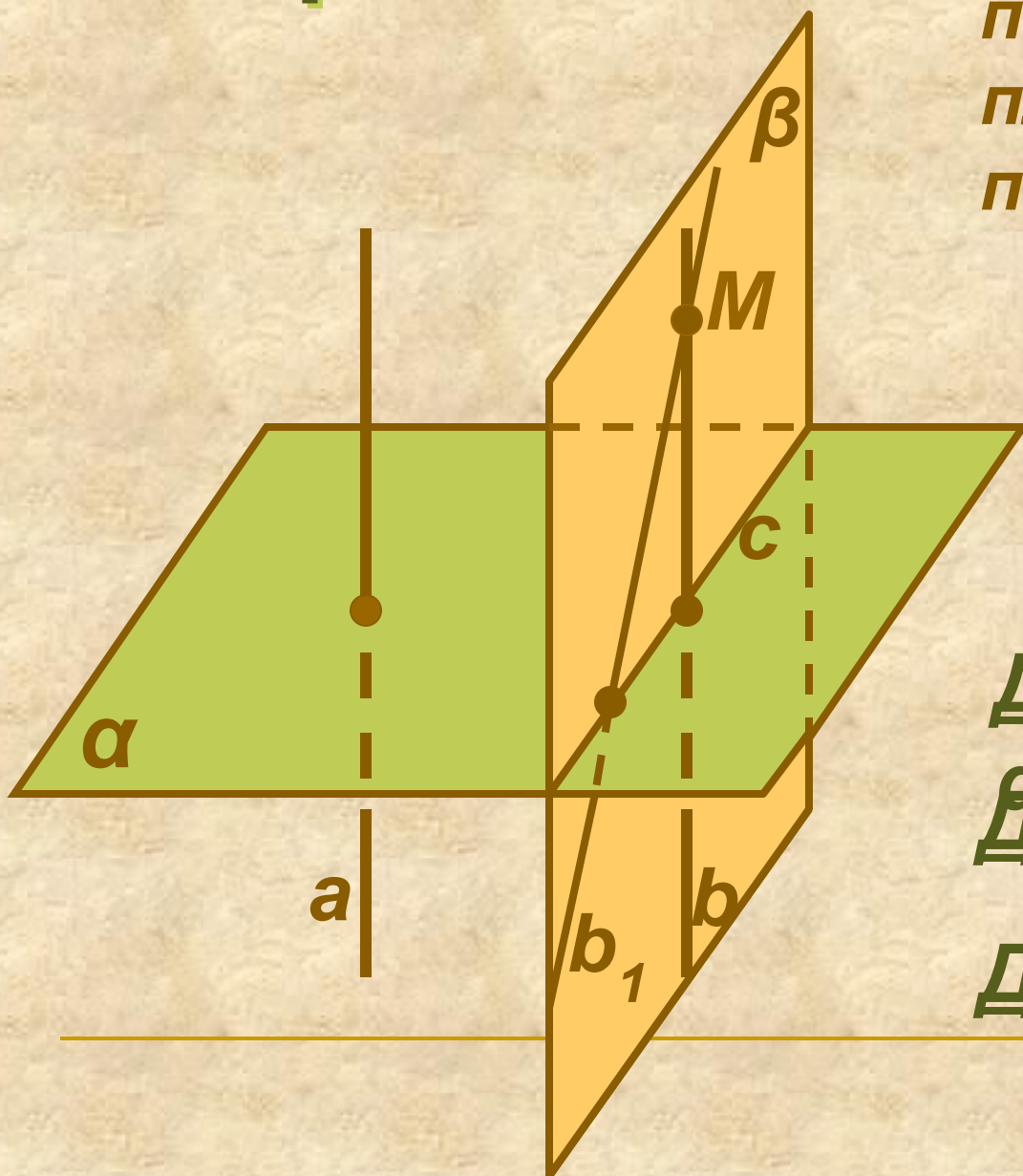
Доказать:  $a_1 \perp \alpha$

Доказательство:



# Теорема 2

Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.



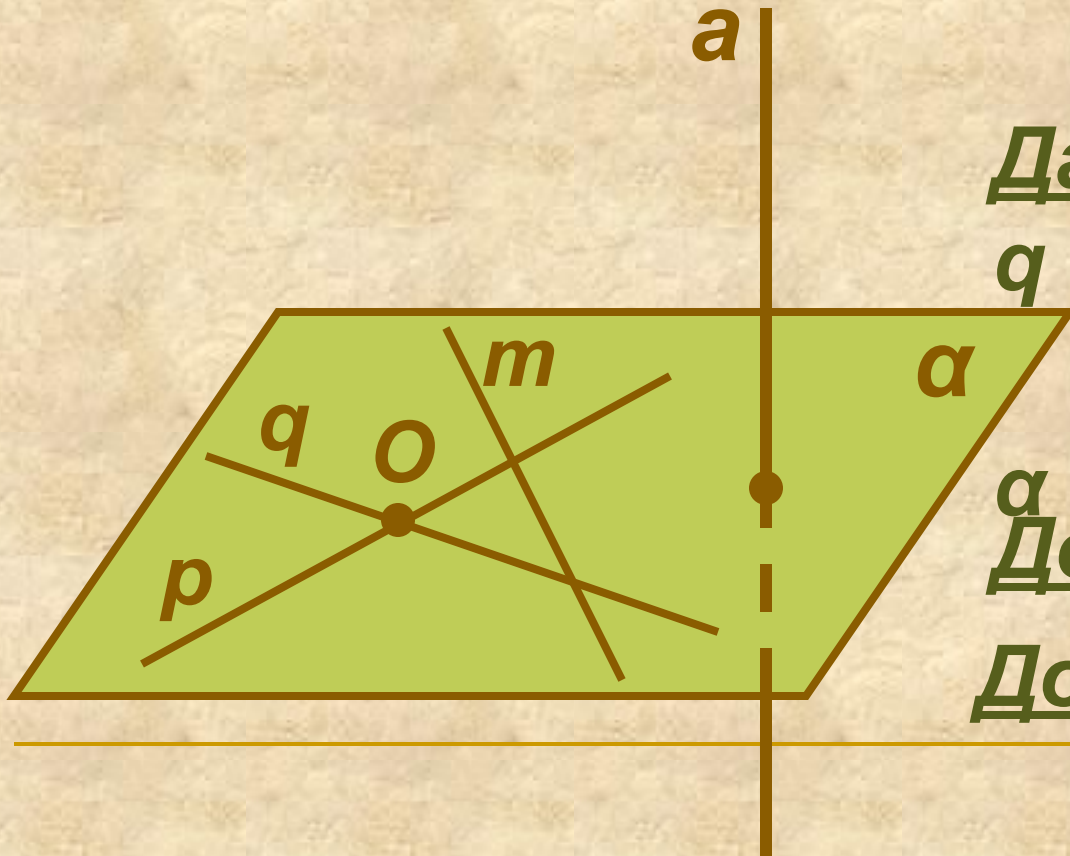
Дано:  $a \perp \alpha; b \perp \beta$

Доказать:  $a \parallel b$

Доказательство:

# Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.



Дано:  $a \perp p$ ;  $a \perp$

$q$

$p \subset \alpha$ ;  $q \subset$

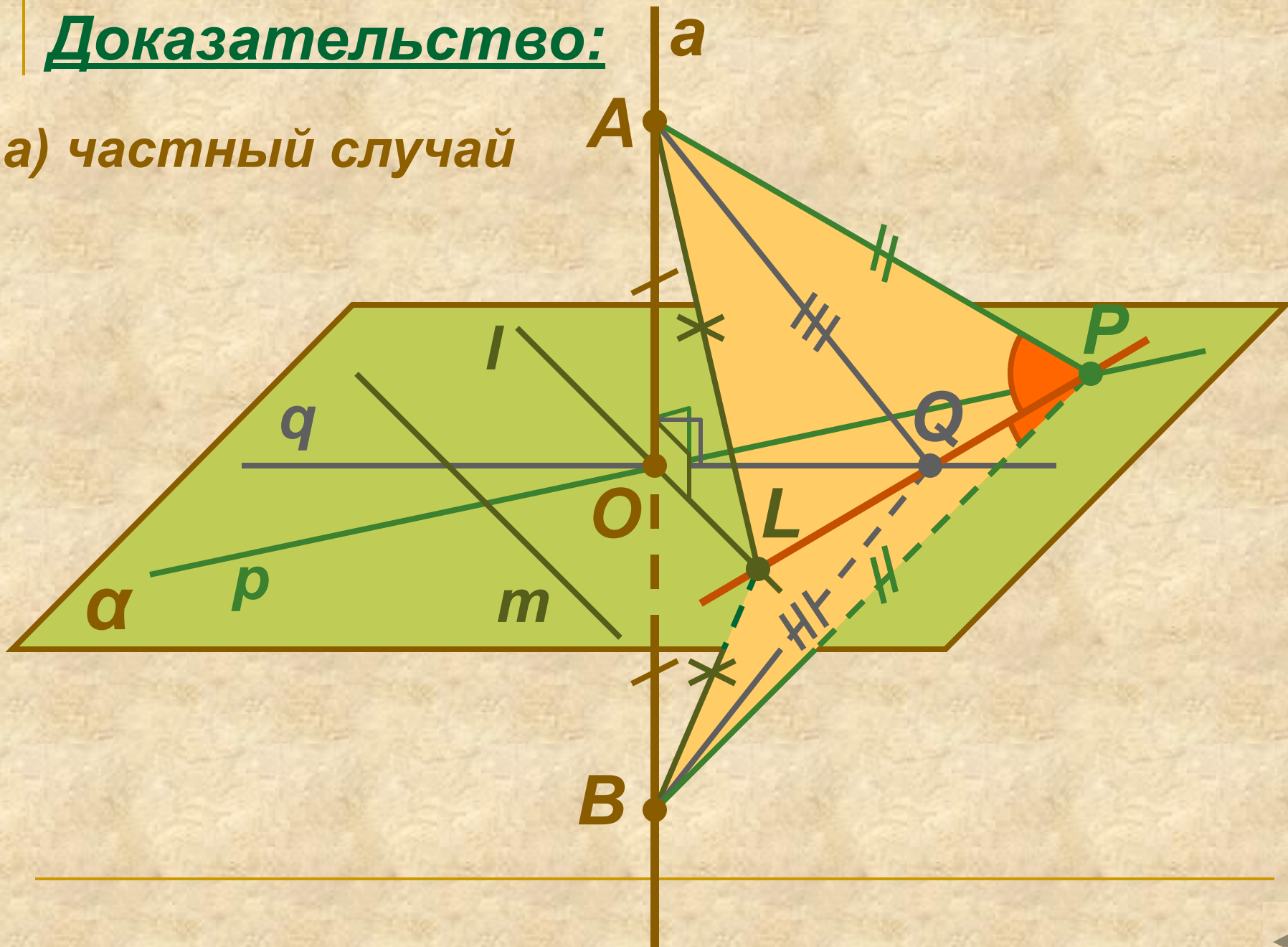
$\alpha$   
Доказать:  $a \perp \alpha$   
 $p \cap q = O$

Доказательство:



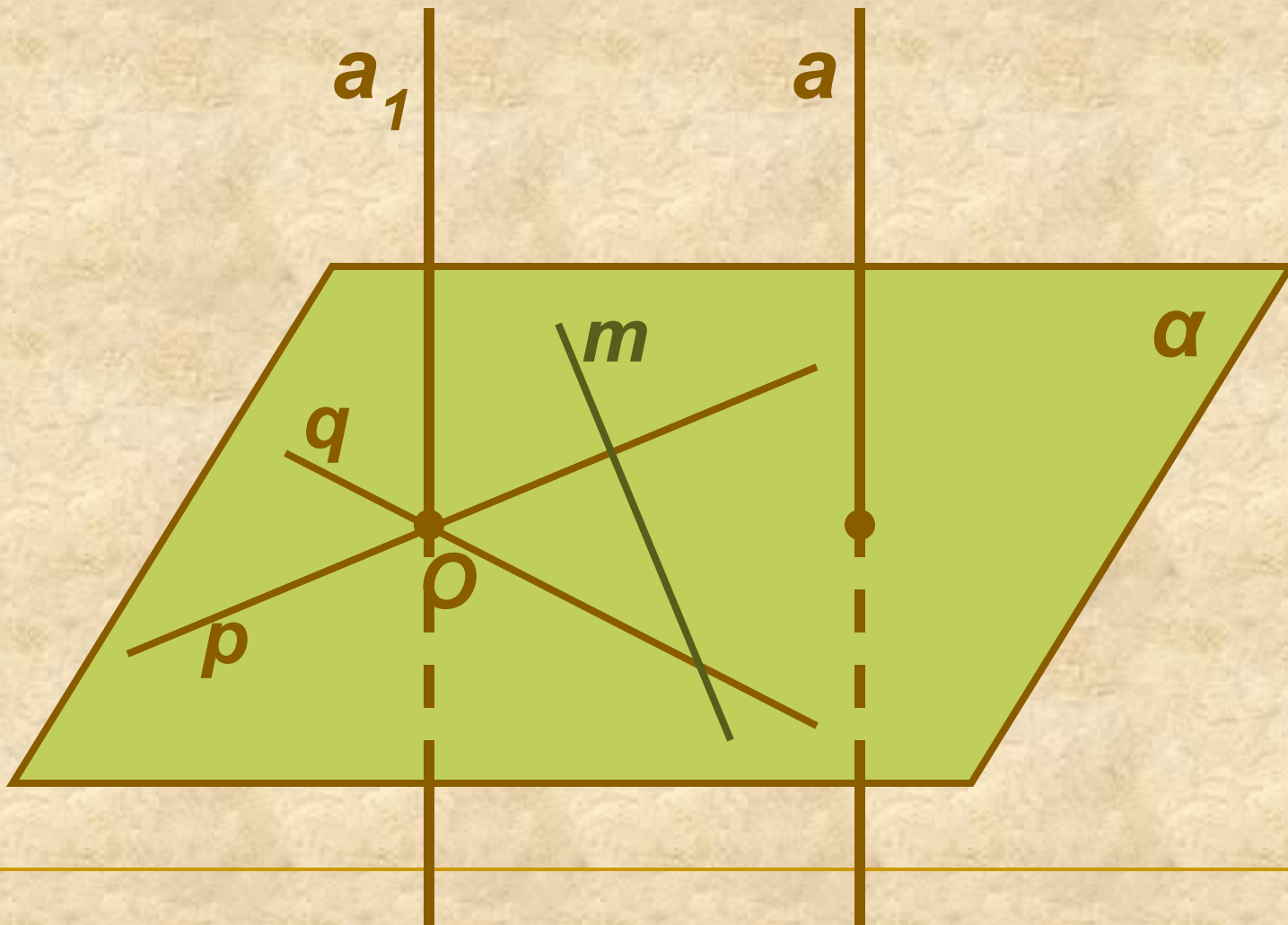
# Доказательство:

а) частный случай



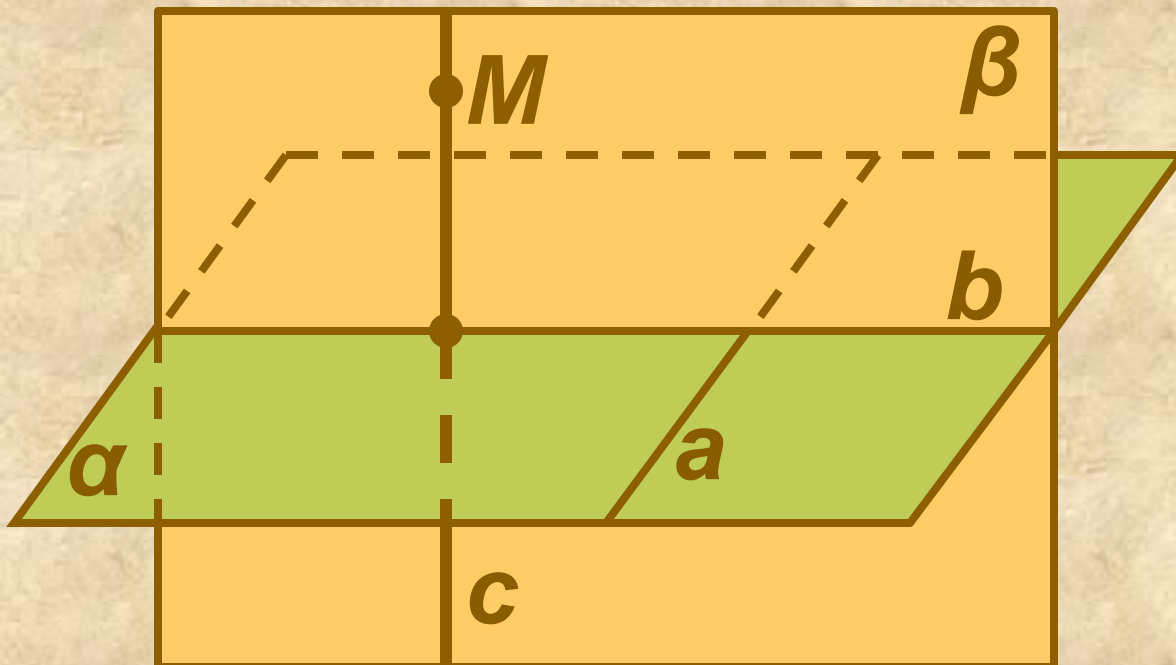
# Доказательство:

а) общий случай



# Теорема 4

*Через любую точку пространства проходит прямая, перпендикулярная к данной плоскости, и притом только одна.*



# Перпендикуляр и наклонные

$M \notin \alpha$

$MN \perp \alpha$

$H \in \alpha$

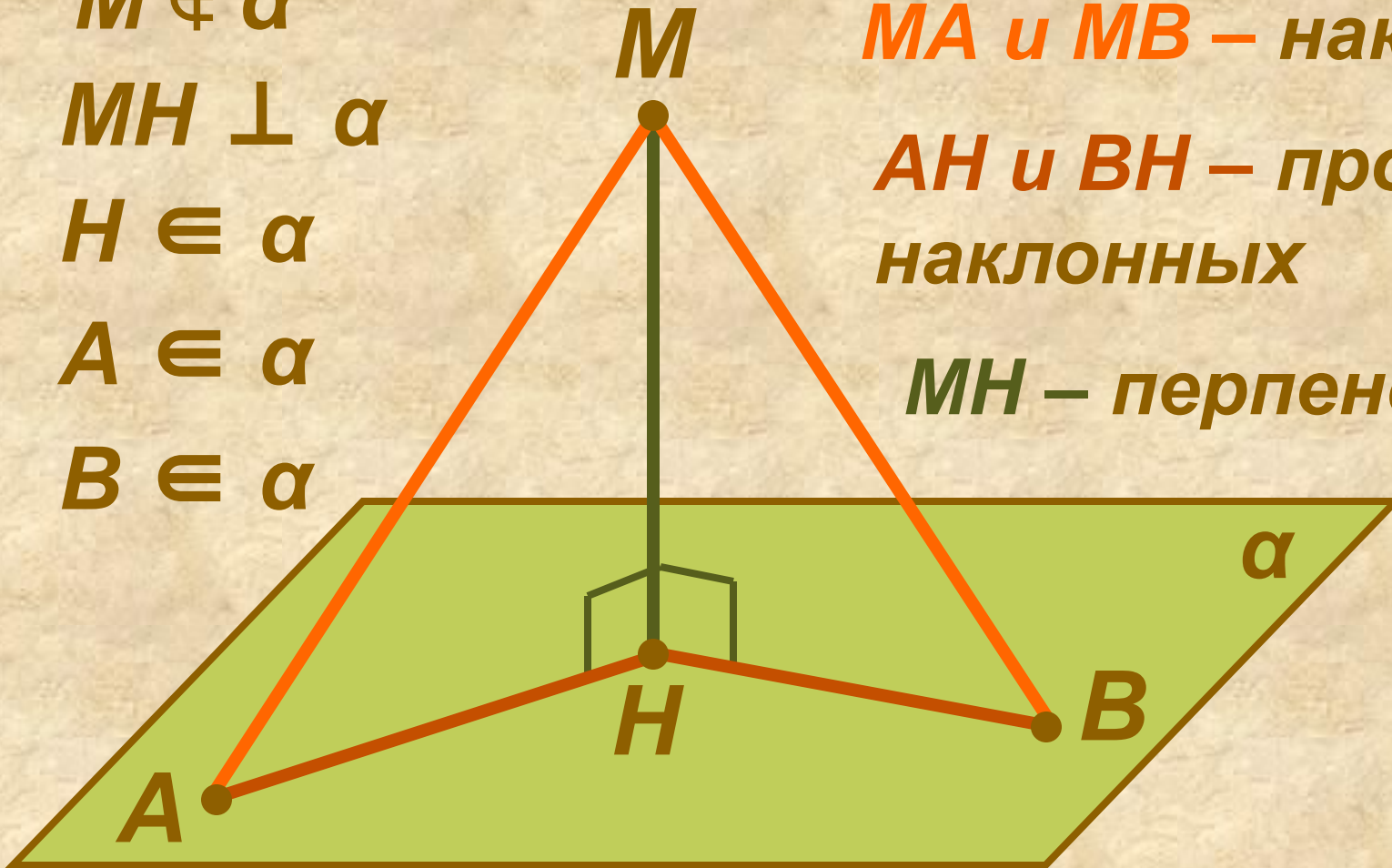
$A \in \alpha$

$B \in \alpha$

$MA$  и  $MB$  – наклонные

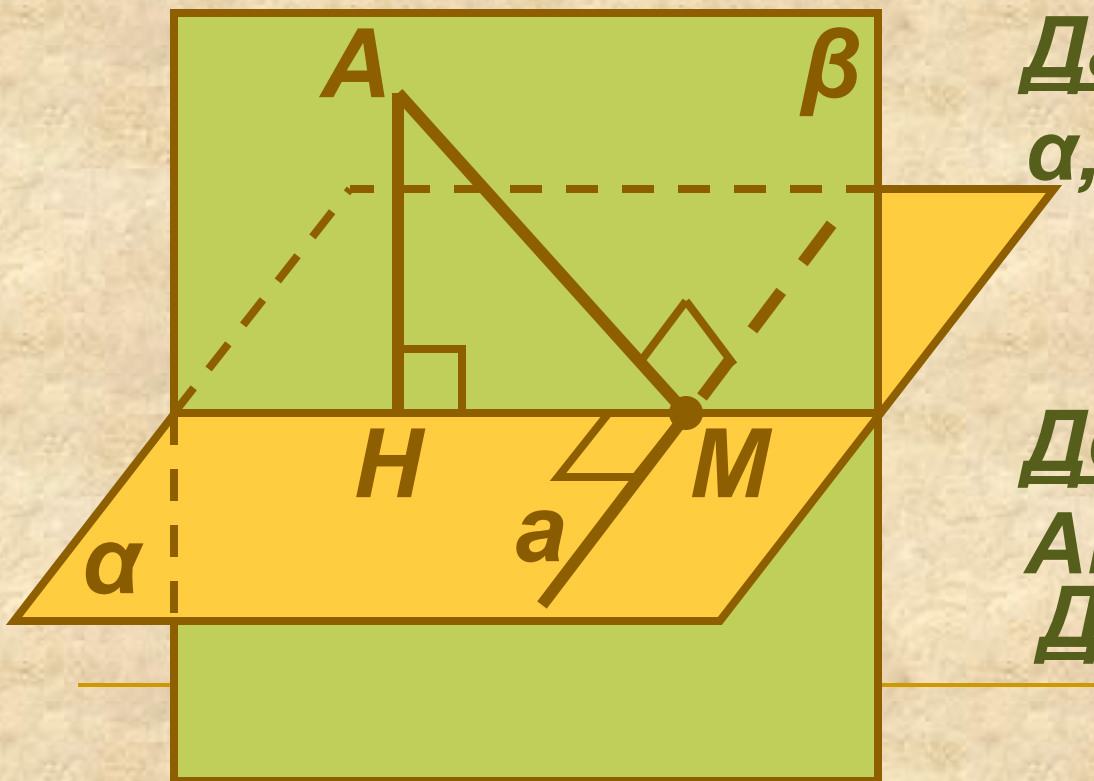
$AH$  и  $BH$  – проекции  
наклонных

$MN$  – перпендикуляр



# Теорема о трех перпендикулярах

Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна к самой наклонной.



Дано:  $a \subset \alpha$ ,  $AN \perp \alpha$ ,

$AM$  – наклонная,  
 $a \perp NM$ ,  $M \in a$

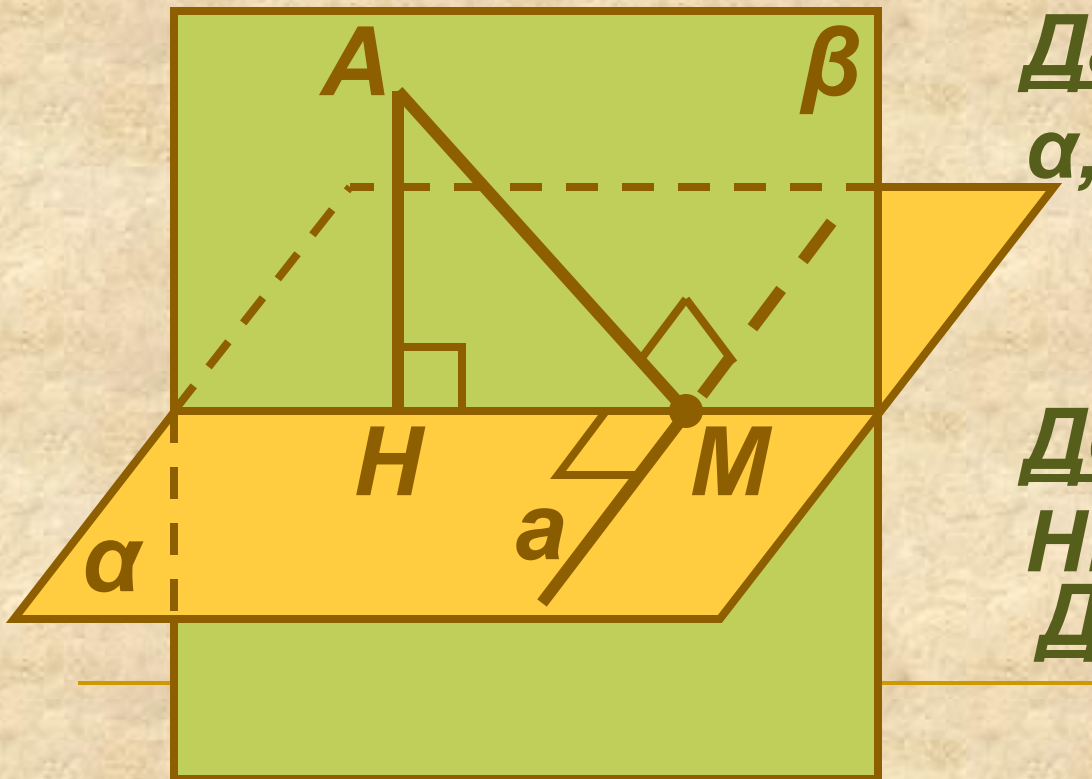
Доказать:  $a \perp$

$AM$

Доказательство:

# Теорема, обратная теореме о трех перпендикулярах

Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к ее проекции.



Дано:  $a \subset \alpha$ ,  $AN \perp \alpha$ ,

$AM$  – наклонная,  
 $a \perp AM$ ,  $M \in a$

Доказать:  $a \perp$

$NM$

Доказательство:

# Угол между прямой и плоскостью

$$(\hat{a ; \alpha}) = \angle AOH =$$

