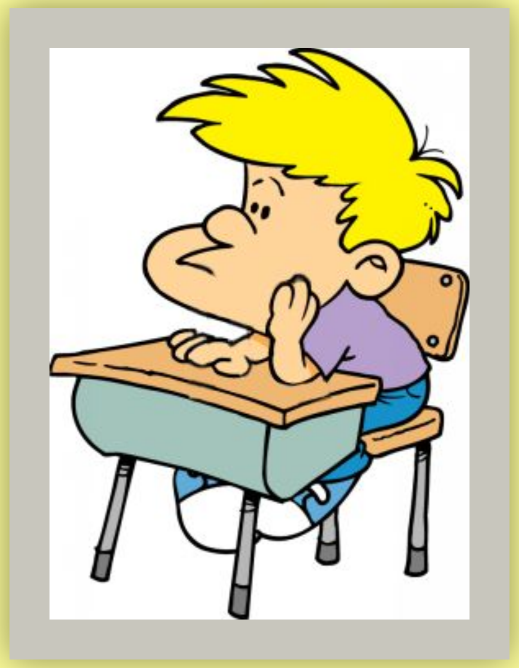
Первообразна

Функция	Первообразная	Функция	Первообразная
1) $f(x)=k$	$F(x)=kx$	6) $f(x)=\sin x$	$F(x)=-\cos x$
2) $f(x)=x^r$ $(r\neq-1)$	$F(x)=\frac{x^{r+1}}{r+1}$	7) $f(x)=\cos x$	$F(x)=\sin x$
		8) $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$	$F(x)=-\operatorname{ctg} x$
3) $f(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=\ln\lvert x\rvert$	9) $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x)=\operatorname{tg} x$
4) $f(x)=e^x$	$F(x)=e^x$	10) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$F(x)=\arcsin x$
5) $f(x)=a^x$	$F(x)=\frac{a^x}{\ln a}$	11) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$	$F(x)=\operatorname{arctg} x$

Выполнил:
Студент группы К-11
ХК ДУТ
Надыч Владимир

План



1. Первообразная;
2. Пример 1
3. Свойства первообразной
4. Техника интегрирования
5. Другие определения
6. Определение первообразной через предел n-ой производной
7. Теорема
8. Пример 2
9. Пример 3
10. Источники информации

Первообразная

Первообразная. **Непрерывная функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на промежутке X, если для каждого**

$$F'(x) = f(x).$$

Пример 1

Функция $F(x) = x^3$ **является первообразной для функции**

$f(x) = 3x^2$ **на интервале** $(-, +)$ **, так как**

$$F'(x) = (x^3)' = 3x^2 = f(x)$$

для всех x $(-, +)$ **.**

Легко проверить, что функция $x^3 + 13$ **имеет ту же производную**

$3x^2$**, поэтому** $x^3 + 13$ **также является первообразной для функции**

$3x^2$ **для всех** x $(-, +)$ **. Ясно, что вместо 13 можно взять**

<u>любую</u> **постоянную.**

Таким образом, *задача нахождения первообразной имеет бесчисленное множество решений.* Этот факт нашёл отражение в определении *неопределённого интеграла.*

Неопределённый интеграл функции $f(x)$ на промежутке X есть *множество всех её первообразных*. Это записывается в виде:

где C – любая постоянная, называемая *постоянной интегрирования*.

Свойства первообразной

Первообразная суммы равна сумме первообразных

Первообразная произведения константы и функции равна произведению константы и первообразной функции

Достаточным условием существования первообразной у заданной на отрезке функции является непрерывность на этом отрезке

Необходимыми условиями существования являются принадлежность
функции первому классу Бэраи выполнение для неё свойства Дарбу

У заданной на отрезке функции любые две первообразные отличаются на постоянную.

Техника интегрирования

Нахождение первообразных значительно сложнее, чем нахождение производных. Для этого имеется несколько методов:

линейность интегрирования позволяет разбивать сложные интегралы на части,

интегрирование через подстановку, часто применяемое вместе с тригонометрическими тождествами или натуральным логарифмом,

интегрирование по частям для операций с произведениями функций,

метод обратной цепочки, особый случай интегрирования по частям,

метод интегрирования рациональных дробей позволяет интегрировать любые рациональные функции (дроби с полиномами в числителе и знаменателе), алгоритм Риша - алгоритм для интегрирования любых элементарных функций,

некоторые интегралы можно найти в таблице интегралов,

при многократном интегрировании можно использовать дополнительную технику, для примера см. двойной интеграл и полярные координаты, Якобиан и теорема Стокса,

Системы компьютерной алгебры помогают автоматизировать некоторые вышеприведённые символьные операции (в частности алгоритм Риша), что очень удобно, когда алгебраические вычисления становятся слишком громоздкими,

если функция не имеет элементарной первообразной (как, например,), её интеграл может быть вычислен приближённо с помощьючисленного интегрирования.

Другие определения

Это определение является наиболее распространенным, но встречаются и другие, в которых ослаблены требования существования всюду конечной и выполнения всюду равенства , иногда в определении используют обобщения производной.

Определение первообразной через предел n-ой производной

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ если будет существовать предел для $f^{(n)}(x)$, функции являющейся $f(x)$, производной n- го порядка для функции

то есть $F(x) = \lim_{n \to -1} f^{(n)}(x)$.

Теорема

Данное определение эквивалентно основному определению.

В самом деле;

$$F'(x) = (\lim_{n\to -1} f^{(n)}(x))' = \lim_{n\to -1} f^{(n+1)}(x) = f^{(0)}(x) = f(x).$$

Пример 2

Вычислим первообразную для функции $f(x) = x^m$.

И так:

$$f'(x) = mx^{m-1}, f''(x) = m(m-1)x^{m-2}, f'''(x) = m(m-1)(m-2)x^{m-3}, \ldots, f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2)\ldots(m-(n-1))x^{m-n}$$

$$m \geqslant n.$$

при условии, что

Поскольку:

$$m(m-1)(m-2)\ldots(m-(n-1)) = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-(n-1))(m-n)(m-(n+1))\ldots2\cdot1}{(m-n)(m-(n+1))\ldots2\cdot1} = \frac{m!}{(m-n)!}.$$

Получаем:

$$F(x) = \lim_{n\to-1} f^{(n)}(x) = \lim_{n\to-1} \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n} = \frac{x^{m+1}}{m+1}.$$

Пример 3

Вычислим первообразную для функции: $f(x) = \sin x.$

$$f'(x) = \cos x = \sin(x + 1 \cdot \frac{\pi}{2}),$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}),$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}),$$

$$f^{IV}(x) = \sin x = \sin(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}),$$

…

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2}).$$

$$F(x) = \lim_{n \to -1} f^{(n)}(x) = \lim_{n \to -1} \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2}) = \sin(x - \frac{\pi}{2}) = -\cos x.$$

Источники информации

1. Интересные примеры нахождения неопределенных интегралов
2. Первообразная как интеграл Ньютона-Лейбница с переменным верхним пределом
3. Wolfram Integrator — вычисление интегралов онлайн с помощью системы Mathematica
4. Mathematical Assistant on Web — символьные вычисления онлайн

СПАСИБО
ЗА
ВНИМАНИЕ!